не вызывать возражений. Оно и на самом деле является лишним и привлечено автором лишь ради метода пар (об этом ниже) и для демонстрации параллелизма теории делимости для целых чисел и для многочленов; автор не упоминает, к сожалению, что корни этого параллелизма вполне вскрыты современной теорией колец.

Вообще, хотя автор и поставил себе целью изложить материал обычного курса высшей алгебры на основе идей и методов современной алгебры, однако его книга во многом находится в противоречии с духом современной алгебры. Для того чтобы сделать курс алгебры современным, недостаточно ввести в него понятия кольца, поля, гиперкомплексной системы,—необходимо ввести их, сохраняя их роль и место в современной науке. Так, автор определяет понятие изоморфизма колец и полей, однако это характернейшее для современной алгебры понятие остается в книге без всякого употребления. Больше того, хотя автор обнаруживает в § 22 поле комплексных чисел в кольце матриц 2-го порядка над полем действительных чисел, однако лишь построение комплексного поля при помощи пар (§ 43) он считает законным и лишь пары называет комплексными числами. Это предпочтение, систематически оказываемое автором при построении новых алгебраических систем методу пар, как единственно «строгому» и «научному», оказывается возможным лишь благодаря игнорированию понятия изоморфизма; оно находится в полном противоречии с идеями современной алгебры и возвращает читателя к давно пройденным страницам истории математики. Противоречит современным воззрениям и данное автором толкование понятия алгебраического расширения (§ 46). Теория полей, говоря об алгебраическом расширении, исходит из задачи построения поля, в котором существовали бы корни для рассматриваемого многочлена, и не считает возможным говорить о корне без указания того поля, в котором он лежит, тогда как при изложении автора сперва строится нечто, называемое алгебраическим расширением и содержащее корень заданного многочлена, и лишь затем это нечто случайно оказывается полем.

Особенно не повезло понятию числа. На стр. 119 автор говорит о широте этого понятия и невозможности указать для него границы. Действительно, эта, на самом деле мнимая, неопределенность понятия числа не может не возникнуть в представлении читателя рецензируемой книги. Из неоднократных высказываний автора (см. например стр. 241, 258, 264) можно заключить, что числом следует называть элемент любого кольца, на чем, вероятно, автор не стал бы настаивать. Во всяком случае, автор сознательно употребляет термин «гиперкомплексное число» для элементов любой гиперкомплексной системы (алгебры), хотя эта терминология в настоящее время уже не употребляется. Понятие числового поля, систематически используемое автором, оставлено без определения, хотя и противопоставляется на стр. 119 общему понятию поля. Метод доказательства теоремы о существовании корня, избранный автором, не позволил ему ограничиться подполями поля комплексных чисел, однако ничто не мешало автору ввести вполне доступное для студентов понятие характеристики поля и говорить о полях характеристики нуль, а не оперировать с таинственным понятием числового поля.

Все эти замечания не противоречат высказанному выше утверждению о пригодности рецензируемой книги в качестве учебника для высшей школы. Они показывают однако, что задача создания курса высшей алгебры, стоящего на современном научном уровне, пока остается открытой.

А. Курош

G. H. HARDY and **E. M. WRIGHT. An introduction to the theory of numbers,** Oxford, at the Clarendon press, 1938, XVI+403 p.

Рецензируемая книга охватывает почти все отделы теории чисел. Авторам удалось дать в ней ясное представление об основных проблемах, результатах и методах теории чисел, не вдаваясь в подробное изложение весьма громоздких и тонких аппаратов современной теории чисел. Книга разбита на 24 главы.

I глава содержит изложение свойств чисел натурального ряда (без доказательств), основных, принятых в анализе и теории чисел обозначений и некоторых свойств простейших аналитических функций, постоянно встречающихся в числовых исследованиях.

Во II главе более подробно рассмотрен вопрос о распределении простых чисел в натуральном ряду и арифметических прогрессиях, причем дано доказательство бесконечности числа простых чисел и простейшие, очень грубые оценки их числа. Теорема Дирихле относительно простых чисел в прогрессиях доказана для некоторых простых случаев. Кроме того, в этой главе рассмотрены числа Эйлера и Мерсенна. В этой же главе изложена теория делимости целых чисел.

Глава III посвящена дробям Фарея и простейшим свойствам плоских числовых решеток. Здесь доказана теорема Минковского относительно точек решеток в выпуклых центрально симметрических телах и дана связь между дробями Фарея и приближениями иррациональных чисел рациональными.

В главе IV дана классификация и основные свойства иррациональных чисел, например доказана иррациональность чисел e и e^2.

Глава V содержит простейшие свойства сравнений и приложения этих свойств к исследованию сумм Гаусса, Рамануджана и других тригонометрических сумм. В этой главе выяснены также основные свойства числовой функции Эйлера и кроме того подробно рассмотрен решенный Гауссом вопрос о построении правильного 17-угольника.

В главе VI рассмотрена малая теорема Ферма и целый ряд элементарных следствий из нее, как например теорема, что среди чисел f_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$f_n = \sum_{r=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{q_r} c_{r,s} n^s \right) a_r^n$$

при $c_{r,s}$ целых рациональных будет бесчисленное множество составных. В этой же главе вводится понятие квадратичного вычета и доказываются все свойства символа Лежандра, включая закон взаимности. Здесь же доказана теорема Вильсона вместе с некоторыми ее обобщениями, введено понятие первообразного корня и, наконец, рассмотрены некоторые, следующие из малой теоремы Ферма свойства чисел Мерсенна.

В главе VII изложена общая теория алгебраических сравнений по простому модулю и в качестве применений этой теории доказаны теоремы Ферма, Вильсона, Вольтенсхольма и теорема Штаудта относительно Бернуллиевых чисел.

В главе VIII рассмотрены свойства сравнений по составному модулю, в частности по модулю, равному степени простого числа. В качестве приложений этих общих свойств здесь доказаны теоремы Бауэра и Лейдесдорфа относительно делимости числителя чисел $s_m = \sum_{t(m)} \frac{1}{t}$, где $t(m)$—совокупность всех чисел меньших m и взаимно простых с m, на m^2, и наконец теоремы относительно вычетов чисел 2^p и $(p-1)!$ по модулю p^2, где p—простое число.

Глава IX посвящена вопросу о представлении действительных чисел десятичными дробями и дробями, расположенными по степеням любого целого числа. Здесь введено понятие множества меры нуль и доказаны некоторые метрические теоремы. В этой же главе рассмотрена задача Баше о представлении каждого числа суммой различных степеней двойки и в виде суммы различных степеней тройки с положительными и отрицательными знаками. Здесь же даны простейшие признаки делимости.

В главе X рассмотрены общие свойства непрерывных дробей. Здесь доказана теорема Лагранжа о квадратичных иррациональностях, рассмотрен ряд свойств чисел Фибоначчи и Люка и доказаны некоторые общие теоремы о приближении действительных чисел рациональными дробями с помощью алгоритма непрерывных дробей.

Глава XI посвящена более подробному исследованию вопроса о приближении действительных чисел рациональными дробями. Здесь прежде всего доказана с помощью принципа Дирихле общая теорема о приближении всякого иррационального числа с точностью до единицы, деленной на квадрат знаменателя приближающей дроби; дан признак Лиувилля трансцендентности числа, доказаны теоремы о трансцендент-

ности всех чисел, за исключением счетного множества, и трансцендентности чисел e и π. Теорема Линдемана и другие более поздние теоремы о трансцендентности различных классов чисел приведены без доказательства. Кроме того в этой главе приведен, в большинстве случаев без доказательства, ряд метрических теорем относительно характера приближения почти всех чисел рациональными дробями.

В главе XII изучаются общие законы арифметики в теле рациональных чисел k (1), гауссовом теле $k(i)$ и теле $k(\rho)$, где $\rho = e^{4/3\pi i}$. Здесь рассмотрен алгоритм Эвклида в этих телах и доказаны основные теоремы о единственности представления каждого числа в виде произведения простых чисел тела.

Глава XIII посвящена диофантовым уравнениям. Здесь подробно рассмотрено уравнение Ферма $x^n + y^n = z^n$ для случаев $n = 2, 3, 4$, уравнение $x^3 + y^3 = 3z^3$, проблема о представлении всякого рационального числа в виде суммы трех кубов неотрицательных рациональных чисел и, в связи с этой последней задачей, уравнение $t^3 = x^3 + y^3 + z^3$.

В главах XIV и XV более подробно рассмотрена арифметика квадратичных полей— существование алгоритма Эвклида, вопрос о том, в каких полях все идеалы будут главными, примеры полей, имеющих не главные идеалы. Кроме того на целом ряде примеров разобраны вопросы о единицах поля, идеалах и малой теореме Ферма в этих полях.

В главе XVI рассмотрены элементарные свойства и аналитические выражения следующих арифметических функций: функции Эйлера $\varphi(n)$, функции Мебиуса $\mu(n)$, числа делителей числа n $d(n)$, суммы k-ых степеней делителей числа n, $\sigma_k(n)$ и числа представлений данного числа n в виде суммы двух квадратов, $r(n)$. Вид этой последней числовой функции $r(n)$ устанавливается с помощью введения характера по модулю 4. В этой же главе дан вид четных совершенных чисел.

Глава XVII посвящена рассмотрению аналитических функций, служащих функциями-женератриссами для числовых функций предыдущей главы. Здесь рассмотрены некоторые простейшие свойства $\zeta(s)$ Римана и других связанных с $\zeta(s)$ рядов Дирихле, а также ряды Ламберта, для которых получены соотношения с помощью ранее доказанных, арифметическими методами, теорем относительно числовых функций.

В главе XVIII рассмотрены верхние и нижние границы роста числовых функций $d(n)$, $\varphi(n)$, $\sigma(n)$, $r(n)$ и даны также асимптотические формулы для

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(k), \quad \sum_{k=1}^{n} d(k), \quad \sum_{k=1}^{n} \sigma(k), \quad \sum_{k=1}^{n} r(n).$$

Кроме того дано асимптотическое выражение для числа целых чисел, не делящихся на квадрат.

В главе XIX рассмотрен вопрос о числе представлений целого числа в виде суммы положительных слагаемых, произвольных или различных и, в общем случае, принадлежащих к той или иной арифметической прогрессии. Доказательства всех теорем этой главы основаны на ряде функциональных тождеств, именно: тождествах Эйлера

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + x^{2k+1}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - x^{2k})}, \quad \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^{2k}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2+n}}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - x^{2k})},$$

тождестве Якоби из теории эллиптических функций

$$\prod_{n=1}^{\infty} \{(1 - x^{2n})\ (1 + x^{2n-1}z^2)\,(1 + x^{2n-1}z^{-2})\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2} z^{2n},$$

тождествах Роджера—Рамануджана, например

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-x^k)}=\prod_{k=0}^{\infty}(1-x^{5k+1})^{-1}(1-x^{5k+4})^{-1}.$$

и некоторых других. Все эти тождества снабжены полными доказательствами.

В главе XX рассмотрен вопрос о представлении всякого целого положительного числа в виде суммы четырех квадратов целых чисел и дано три доказательства теоремы Лагранжа. Первое доказательство опирается только на алгебраическое тождество Эйлера и элементарный минимальный принцип (доказательство Ландау); во втором доказательстве для представления простого числа суммой четырех квадратов используются некоторые предложения из арифметики кватернионов, а третье доказательство основано на тождествах для θ-функций, полностью доказанных с помощью вспомогательных тождеств, полученных в предыдущих главах (доказательство Якоби). Это последнее доказательство позволяет установить также число представлений числа суммой четырех квадратов.

В XXI главе изложены некоторые результаты, относящиеся к общей проблеме Варинга, и даны границы для $g(n)$ и $G(n)$. Границы чисел $g(3)$, $g(4)$ и $g(6)$ сверху и границы чисел $g(n)$ снизу приведены с доказательствами, в остальных случаях даны формулировки результатов. В этой главе рассмотрена также проблема представления целого числа в виде суммы степеней целых чисел с положительными и отрицательными знаками, проблема Тарри и одно обобщение великой теоремы Ферма.

В главе XXII доказаны все те предложения относительно распределения простых чисел, которые не требуют для своего доказательства применения комплексного переменного и исследования расположения нулей $\zeta(s)$. В частности здесь доказано тождество Чебышева и даны постоянные границы для числа $\frac{\pi(x)\ln x}{x}$. Кроме того здесь рассмотрено поведение двух числовых функций: числа различных простых делителей и числа всех простых делителей числа n.

В главе XXIII подробно рассмотрена теорема Кронекера о том, что если иррациональные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ линейно независимы в рациональном теле, то дробные доли чисел $n\alpha_1, n\alpha_2, \ldots, n\alpha_p$, где n пробегает натуральный ряд, всюду плотно распределены в p-мерном единичном кубе. Здесь приведены различные формы, интерпретации и доказательства этой теоремы, в частности известное доказательство Г. Бора. В этой же главе дана постановка проблемы о равномерном распределении чисел в данном интервале и доказана теорема о том, что дробные доли $n\alpha$ для иррационального α распределены равномерно на интервале (0,1).

Глава XXIV посвящена известной теореме Минковского относительно системы n линейных форм от n целочисленных переменных. Здесь даны различные как арифметические, так и геометрические доказательства и самой теоремы Минковского и ряда ее обобщений и модификаций.

Рецензируемая книга написана очень ясным языком и составлена с большим математическим вкусом. Она является прекрасным введением в теорию чисел и представляет большой интерес для студентов старших курсов физматов университетов и преподавателей средних школ.

К числу недостатков книги, с моей точки зрения, следует отнести, прежде всего, отсутствие систематического изложения теории первообразных корней и индексов, а в связи с этим и двучленных сравнений высших степеней. Кроме того в книге можно было бы изложить вполне элементарную теорию уравнения Пелля и на частных примерах дать представление о теории квадратичных форм. Было бы естественным также изложить в этой книге очень изящные теоремы И. Виноградова о распределении квадратичных вычетов и первообразных корней. Наконец очень жаль, что в книге отсутствуют элементарные методы в аддитивной теории чисел, принадлежащие В. Бруну

и Л. Шнирельману. Наличие этих последних методов позволило бы осветить в книге, с одной стороны, проблемы, связанные с плотностями последовательностей, а с другой стороны, проблемы Гольдбаха.

Но сделанные мной замечания, естественно, не снижают очень большой ценности этой книги, и я считаю, что перевод ее следовало бы издать у нас в СССР для того, чтобы сделать книгу доступной советскому читателю.

А. Гельфонд