



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Валландер, Времена пребывания для счетных цепей Маркова. II. Цепи с непрерывным временем, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1983, том 130, 56–64

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.169

16 февраля 2025 г., 17:55:27



ВРЕМЕНА ПРЕБЫВАНИЯ ДЛЯ СЧЕТНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА
 II. ЦЕПИ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Пусть $x(t)$ ($t \geq 0$) - однородная цепь Маркова с конечным или счетным множеством состояний A , P_a - вероятностная мера, отвечающая начальному условию $x(0) = a$ ($a \in A$), e - неотрицательная случайная величина с распределением

$$P.(e > t | B) = e^{-at}$$

(B - σ -алгебра событий, связанных с цепью). В этой части работы мы получаем ряд свойств случайного поля

$$\tau(\xi) = \int_0^e 1_{\{\xi\}}(x(t)) dt \quad (\xi \in A),$$

аналогичных полученным в части I ([1]) для цепей Маркова с дискретным временем.

Мы предполагаем, что $x(t)$ - сепарабельный процесс со стандартной переходной функцией, не имеющий мгновенных состояний (см. [2]). В этих предположениях время пребывания $\tau(\cdot)$ корректно определено, а переходный оператор P^t представим в виде

$$P^t = e^{Y_0 t},$$

причем область определения оператора Y_0 содержит все ограниченные функции на A . В неявной форме (см. часть I) мы используем также предположение, что $x(t)$ - строго марковский процесс.

Начнем с описания условных конечномерных распределений поля $\tau(\xi)$ при условии $x(e) = b$.

В нашей ситуации роль уравнения теплопроводности играет уравнение

$$\frac{\partial u(t, a)}{\partial t} = (Y_0 u)(t, a) \quad (I)$$

($t \in \mathbb{R}^+$, $a \in A$). Как обычно, подразумевается, что оператор Y_0 действует на переменную t .

Если f - ограниченная функция на A , то решение уравнения (I) с начальным условием $u(0, a) = f(a)$ задается формулой

$$u(t, a) = \mathbb{E}_a f(x(t)) = \sum_b P_t(a, b) f(b)$$

(единственное ограниченное решение), см. [4], стр.48. При этом

преобразование Лапласа

$$\hat{u}(\alpha, a) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} u(t, a) dt$$

удовлетворяет уравнению

$$(\alpha - \mathcal{G}_0) \hat{u} = f. \quad (2)$$

Для каждой неотрицательной ограниченной функции $\kappa: A \rightarrow \mathbb{R}$ мы рассматриваем оператор $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 - \kappa$ и уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{G} u \quad (3)$$

с начальным условием $u|_{t=0} = f$. Если f ограничена, то единственное ограниченное решение (3) задается формулой

$$u(t, a) = E_a \left[f(x(t)) e^{-\int_0^t \kappa(x(s)) ds} \right].$$

При этом \hat{u} удовлетворяет уравнению

$$(\alpha - \mathcal{G}) \hat{u} = f. \quad (4)$$

Формула Каца в нашем случае имеет вид

$$\hat{u}(\alpha, a) = E_a \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(x(t)) e^{-\int_0^t \kappa(x(s)) ds} dt \right].$$

Проверим, что \hat{u} — единственное ограниченное решение (4). Для этого покажем, что однородное уравнение

$$(\alpha - \mathcal{G}) q = 0 \quad (5)$$

имеет единственное ограниченное решение $q \equiv 0$. Действительно, если q — ограниченное решение (5), то

$$e^{qt} = e^{\alpha t} q, \quad (1 - e^{-\alpha} e^{\mathcal{G}}) q = 0.$$

Полугруппа операторов $e^{\mathcal{G}t}$ — полустохастическая ([2], стр. 343), поэтому оператор $(1 - e^{-\alpha} e^{\mathcal{G}})$ обратим (в пространстве ограниченных функций) и $q \equiv 0$.

Решение уравнения (4) можно представить через функцию Грина:

$$\hat{u}(a, a) = \sum_b G(a, b) f(b), \quad (6)$$

где $G(\cdot, b)$ - ограниченное решение уравнения

$$(a - \mathcal{L})G(\cdot, b) = \mathbb{1}_{\{b\}}(\cdot).$$

Аналогично части I находим

$$E_a \left[e^{-\int_0^e \kappa(x(s)) ds}, x(e) = b \right] = G(a, b),$$

$$E_{ab} \left[e^{-\int_0^e \kappa(x(s)) ds} \right] = \frac{G(a, b)}{G_0(a, b)}.$$

Для конечного $B \subset A$ введем $\kappa^* = \kappa + \sum_{\xi \in B} \gamma(\xi) \mathbb{1}_{\{\xi\}}$ и соответствующую функцию Грина G^* . Тогда

$$E_{ab} \left[e^{-\sum_{\xi \in B} \gamma(\xi) \tau(\xi) - \int_0^e \kappa(x(s)) ds} \right] = \frac{G^*(a, b)}{G_0(a, b)}.$$

Аналогично части I получаем

$$G(a, b) - G^*(a, b) = \sum_{c \in B} \gamma(c) G^*(a, c) G(c, b).$$

Отсюда для $\xi \in B$

$$G^*(a, \xi) = \frac{d(\xi)}{d}$$

и для любого $b \in A$

$$G^*(a, b) = G(a, b) - \frac{1}{d} \sum_{c \in B} \gamma(c) d(c) G(c, b).$$

Здесь d и $d(c)$ - определители, аналогичные введенным в части I. Вычисления, почти совпадающие с вычислениями части I, дают окончательную формулу

$$E_{ab} \left[e^{-\sum_{\xi \in B} \gamma(\xi) \tau(\xi) - \int_0^e \kappa(x(s)) ds} \right] = \frac{G(a, b)}{G_0(a, b)} -$$

$$\frac{\sum_{M \in B} \left(\prod_{c \in M} \gamma(c) \right) \sum_{\xi \in M} G(a, \xi) G_{\xi}(M)}{G_0(a, b) \sum_{M \in B} \left(\prod_{c \in M} \gamma(c) \right) G(M)},$$

где $G(M) = \det \| G(c, d) \|_{c, d \in M}$, а $G_{\xi}(M)$ - определитель, получающийся из $G(M)$ подстановкой b вместо каждого вхождения ξ в правом аргументе $G(\cdot, \cdot)$.

В случае $B = \{\xi\}$ получаем

$$P_{ab} [\tau(\xi) = 0] = 1 - \frac{G_0(a, \xi) G_0(\xi, b)}{G_0(a, b) G_0(\xi, \xi)},$$

$$P_{ab} [\tau(\xi) > t] = \frac{G_0(a, \xi) G_0(\xi, b)}{G_0(a, b) G_0(\xi, \xi)} e^{-\frac{t}{G_0(\xi, \xi)}} \quad (t > 0),$$

$$E_{ab} \left[e^{-\int_0^{\tau(\xi)} k(x(s)) ds} \mid \tau(\xi) = 0 \right] = \frac{G(a, b) G(\xi, \xi) - G(a, \xi) G(\xi, b)}{G_0(a, b) G_0(\xi, \xi) - G_0(a, \xi) G_0(\xi, b)} \cdot \frac{G_0(\xi, \xi)}{G(\xi, \xi)},$$

$$E_{ab} \left[e^{-\int_0^{\tau(\xi)} k(x(s)) ds} \mid \tau(\xi) = t \right] = \frac{G(a, \xi) G(\xi, b) G_0(\xi, \xi)^2}{G_0(a, \xi) G_0(\xi, b) G(\xi, \xi)^2} e^{-t \left[\frac{1}{G(\xi, \xi)} - \frac{1}{G_0(\xi, \xi)} \right]} \quad (t > 0).$$

Отметим, что приводимые формулы ближе к соответствующим формулам для броуновского движения (см. [3]), чем к формулам части I.

Аналогично формулам части I можно выписать еще несколько полезных, но громоздких формул. Мы их опускаем.

Назовем цепь Маркова Π -цепью, если ядро $Q(a, b)$ оператора Q_0 симметрично и $Q(a, b) = 0$, $|a - b| > 1$. Такие цепи задаются набором величин $q(a) = Q(a, a+1)$ ($Q(a, a) = -\sum_{b \neq a} Q(a, b)$).

Функцию Грина Π -цепи можно описать так же, как в части I.

Сначала строим функции q_1 и q_2 - положительное возрастающее и положительное убывающее решения уравнения и доказываем, что вронсиан

$$W = W(a) = q_1(a) [q_1(a+1)q_2(a) - q_1(a)q_2(a+1)]$$

не зависит от a . Затем полагаем

$$G(a, b) = G(b, a) = \frac{1}{W} q_1(a) q_2(b) \quad (a \leq b).$$

Соответствующие выкладки почти дословно такие же, как в части I.

В случае периодической функции q можно выписать явное выражение для функции Грина, почти совпадающее с аналогичным выражением из части I.

Рассмотрим для определенности $q \equiv q_0$. Тогда (5) превращается в

$$(\alpha + 2q_0)q(a) - q_0 [q(a-1) + q(a+1)] = 0,$$

что переходит при замене α на $e^\alpha - 1$ и q_0 на p_0 в аналогичное уравнение из части I. Поэтому

$$G_0(a, b) = \frac{\lambda_-^{|b-a|}}{\lambda_+ - \lambda_-},$$

где

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{\lambda_{\mp}} = \frac{\alpha + 2q_0 \pm \sqrt{\alpha(\alpha + 4q_0)}}{2q_0}.$$

Та же замена α на $e^\alpha - 1$ и $q(a)$ на $p(a)$ позволяет получить и общую формулу для функции Грина в периодическом случае.

Докажем теперь, что для любой Д-цепи с непрерывным временем случайный процесс $\tau(\xi)$ ($\xi \in \mathbb{Z}$) марковский относительно мер P_{ab} (ср. с противоположным явлением в случае дискретного времени, описанным в части I).

Марковское свойство в точке $\xi \in \mathbb{Z}$ означает, что для любой функции $k \geq 0$ с $k(\xi) = 0$ и любого $t \geq 0$

$$E_{ab} \left[e^{-\int_0^t k(x(s)) ds} \mid \tau(\xi) = t \right] =$$

$$= E_{ab} \left[e^{-\int_0^t K_-(x(s)) ds} \mid \tau(\xi) = t \right] \cdot E_{ab} \left[e^{-\int_0^t K_+(x(s)) ds} \mid \tau(\xi) = t \right],$$

где $K_- = K \mathbb{1}_{(-\infty, \xi]}$, $K_+ = K \mathbb{1}_{[\xi, \infty)}$.

Следует оговорить, что при $t = 0$ эти условные ожидания определены лишь для $\xi < \min(a, b)$ и $\xi > \max(a, b)$.

В соответствии с выписанными выше формулами, выражающими условные ожидания через функции Грина, для проверки марковского свойства достаточно проверить равенства

$$a) \quad \frac{1}{G(\xi, \xi)} - \frac{1}{G_0(\xi, \xi)} = \left[\frac{1}{G_-(\xi, \xi)} - \frac{1}{G_0(\xi, \xi)} \right] + \left[\frac{1}{G_+(\xi, \xi)} - \frac{1}{G_0(\xi, \xi)} \right],$$

$$b) \quad \frac{[G(a, b)G(\xi, \xi) - G(a, \xi)G(\xi, b)]G_0(\xi, \xi)}{[G_0(a, b)G_0(\xi, \xi) - G_0(a, \xi)G_0(\xi, b)]G(\xi, \xi)} =$$

$$= \frac{[G_-(a, b)G_-(\xi, \xi) - G_-(a, \xi)G_-(\xi, b)]G_0(\xi, \xi)}{[G_0(a, b)G_0(\xi, \xi) - G_0(a, \xi)G_0(\xi, b)]G_-(\xi, \xi)} \times$$

$$\times \frac{[G_+(a, b)G_+(\xi, \xi) - G_+(a, \xi)G_+(\xi, b)]G_0(\xi, \xi)}{[G_0(a, b)G_0(\xi, \xi) - G_0(a, \xi)G_0(\xi, b)]G_+(\xi, \xi)},$$

в)

$$\frac{G(a, \xi)G(\xi, b)G_0(\xi, \xi)^2}{G_0(a, \xi)G_0(\xi, b)G(\xi, \xi)^2} =$$

$$= \frac{G_-(a, \xi)G_-(\xi, b)G_0(\xi, \xi)^2}{G_0(a, \xi)G_0(\xi, b)G_-(\xi, \xi)^2} \cdot \frac{G_+(a, \xi)G_+(\xi, b)G_0(\xi, \xi)^2}{G_0(a, \xi)G_0(\xi, b)G_+(\xi, \xi)^2}.$$

Стандартные вычисления дают

$$g_1^-(a) = \begin{cases} g_1(a), & a \leq 0 \\ \frac{g_{2,0}(-1) - g_1(-1)}{g_{2,0}(-1) - g_{1,0}(-1)} g_{1,0}(a) + \frac{g_1(-1) - g_{1,0}(-1)}{g_{2,0}(-1) - g_{1,0}(-1)} g_{2,0}(a), & a \geq 0 \end{cases}$$

$$g_2^-(a) = \begin{cases} \frac{g_2(-1) - g_{2,0}(-1)}{g_2(-1) - g_1(-1)} g_1(a) + \frac{g_{2,0}(-1) - g_1(-1)}{g_2(-1) - g_1(-1)} g_2(a), & a \leq 0 \\ g_{2,0}(a), & a \geq 0 \end{cases}$$

$$g_1^+(a) = \begin{cases} g_{1,0}(a), & a \leq 0 \\ \frac{g_2(1) - g_{1,0}(1)}{g_2(1) - g_1(1)} g_1(a) + \frac{g_{1,0}(1) - g_1(1)}{g_2(1) - g_1(1)} g_2(a), & a \geq 0 \end{cases}$$

$$g_2^+(a) = \begin{cases} \frac{g_2(1) - g_{2,0}(1)}{g_{1,0}(1) - g_{2,0}(1)} g_{1,0}(a) + \frac{g_{1,0}(1) - g_2(1)}{g_{1,0}(1) - g_{2,0}(1)} g_{2,0}(a), & a \leq 0 \\ g_2(a), & a \geq 0 \end{cases}$$

Ясно, что при проверке формул а) - в) без ограничения общности можно считать $a \leq b$ и $\xi = 0$. Из предположения $\xi = 0$ и условия $K(\xi) = 0$ с учетом уравнения $(\lambda - \mathcal{Y})g = 0$ получаем

$$g(-1) = \frac{\lambda + q(0) + q(-1) - q(0)g(1)}{q(-1)}.$$

Это позволяет преобразовать выражения для g_1^- и g_2^- :

$$g_1^-(a) = \begin{cases} g_1(a), & a \leq 0 \\ \frac{g_1(1) - g_{2,0}(1)}{g_{1,0}(1) - g_{2,0}(1)} g_{1,0}(a) + \frac{g_{1,0}(1) - g_1(1)}{g_{1,0}(1) - g_{2,0}(1)} g_{2,0}(a), & a \geq 0 \end{cases}$$

$$g_2^-(a) = \begin{cases} \frac{g_{2,0}(1) - g_2(1)}{g_1(1) - g_2(1)} g_1(a) + \frac{g_1(1) - g_{2,0}(1)}{g_1(1) - g_2(1)} g_2(a), & a \leq 0 \\ g_{2,0}(a), & a \geq 0 \end{cases}$$

Далее

$$W = q(0) [q_1(1) - q_2(1)],$$

$$W_0 = q(0) [q_{1,0}(1) - q_{2,0}(1)],$$

$$W_- = q(0) [q_1(1) - q_{2,0}(1)],$$

$$W_+ = q(0) [q_{1,0}(1) - q_2(1)],$$

так что $W + W_0 = W_- + W_+$. Последнее равенство доказывает формулу а).

Формулу б) следует проверять при $0 < a \leq b$ и $a \leq b < 0$. Оба случая рассматриваются совершенно одинаково, поэтому ограничимся первым из них. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{G(a,b)G(\xi,\xi) - G(a,\xi)G(\xi,b)}{G(\xi,\xi)} = \\ & = \frac{G(a,b)G(0,0) - G(0,a)G(0,b)}{G(0,0)} = \frac{[q_1(a) - q_2(a)]q_2(b)}{W} \end{aligned}$$

Поэтому соотношение б) эквивалентно соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{[q_1(a) - q_2(a)]q_2(b)}{W} \cdot \frac{[q_{1,0}(a) - q_{2,0}(a)]q_{2,0}(b)}{W_0} = \\ & = \frac{[q_1^-(a) - q_2^-(a)]q_2^-(b)}{W_-} \cdot \frac{[q_1^+(a) - q_2^+(a)]q_2^+(b)}{W^+}, \end{aligned}$$

а последнее проверяется прямой подстановкой.

Для доказательства формулы в) следует рассмотреть три случая: $0 < a \leq b$, $a \leq 0 \leq b$, $a \leq b < 0$.

В первом из них

$$\frac{G(a,\xi)G(\xi,b)}{G(\xi,\xi)^2} = \frac{G(0,a)G(0,b)}{G(0,0)^2} = q_2(a)q_2(b)$$

и формула в) превращается в очевидное тождество. Два других случая рассматриваются совершенно аналогично.

Таким образом, марковское свойство доказано.

Совместное распределение минимума $m = \min_{t \leq e} x(t)$ и максимума $M = \max_{t \leq e} x(t)$ в случае Д-цепи с непрерывным временем находится так же, как в части I. Для любого конечного $B \subset A$ справедлива формула

$$P_a(\tau(B)=0) = 1 - \sum_{\xi \in B} \frac{\xi G_o(B)}{G_o(B)},$$

где $G_o(B) = \det \|G_o(c,d)\|_{c,d \in B}$, а $\xi G_o(B)$ - определитель, получающийся из $G_o(B)$ заменой каждого члена вида $G_o(c,\xi)$ на $G_o(a,\xi)$.

В интересующем нас случае совместного распределения m и M берем $B = \{x, y\}$ и получаем для $P_a(m > x, M < y)$ точно также же выражение, как в части I (различия сконцентрированы в формулах для λ_{\pm} , см. выше и часть I).

ЛИТЕРАТУРА

1. В а л л а н д е р С.С. Времена пребывания для счетных цепей Маркова. I. Цепи с дискретным временем. - Зап. научн. семинар. ЛОМИ, 1982, т. II9, с. 39-61.
2. Ч ж у н К.Л. Однородные цепи Маркова. М., Мир, 1964.
3. И т о К., М а к к и н Г. Диффузионные процессы и их траектории. М., Мир, 1968.
4. Д ы н к и н Е.Б. Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963.