V. V. Gorgorova, I. V. Pavlov, On Haar uniqueness properties for vector-valued random processes, *Uspekhi Mat. Nauk*, 2007, Volume 62, Issue 6, 169–170

DOI: 10.4213/rm8557

О свойствах хааровской единственности для векторнозначных случайных процессов

В. В. Горгорова, И. В. Павлов

Рассмотрим фильтрованное пространство (ф.п.) $\bigl(\Omega, \mathbb{F} = (\mathscr{F}_k)_{k=0}^N, \mathscr{F}\bigr)$, где число N конечно, все σ-алгебры $\mathscr{F}_k$ конечны, $\mathscr{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}_N$ и $\mathscr{F}_k \neq \mathscr{F}_{k+1}$ при любом k. Обозначим через $\mathscr{P}$ множество вероятностных мер на $(\Omega, \mathscr{F})$, каждая из которых нагружает все атомы из $\mathscr{F}$. Пусть $Z = \bigl(Z_k, \mathscr{F}_k\bigr)_{k=0}^N$ – адаптированный векторнозначный случайный процесс (в.с.п.) на $(\Omega, \mathscr{F})$, где $Z_k = (Z_k^{(1)}, \dots, Z_k^{(l)})$. Как обычно, символ $f|_A$ означает ограничение случайной величины (с.в.) f на событие $A \in \mathscr{F}$. Пусть

$$A = B_1 + \dots + B_m,$$

где A – атом в $\mathscr{F}_k$, B_i – атом в $\mathscr{F}_{k+1}$ $(i = 1, \dots, m)$ и $1 \leqslant m < \infty$ (m зависит от A; это число мы будем называть характеристикой дробления атома $A \in \mathscr{F}_k$). Обозначим через $\mathscr{P}(Z, \mathbb{F})$ (соответственно $\mathscr{P}(Z^{(i)}, \mathbb{F})$) множество мер P из $\mathscr{P}$, относительно которых в.с.п. $Z = (Z_k, \mathscr{F}_k, \mathsf{P})_{k=0}^N$ (соответственно процесс $Z^{(i)} = (Z_k^{(i)}, \mathscr{F}_k^{(i)}, \mathsf{P})_{k=0}^N$) является мартингалом. Имеем: $\mathscr{P}(Z, \mathbb{F}) = \bigcap_{i=1}^l \mathscr{P}(Z^{(i)}, \mathbb{F})$.

Фильтрация $\mathbb{H} = (\mathscr{H}_n)_{n=0}^L$ на $(\Omega, \mathscr{F})$ называется хааровской, если для любого n $(0 \leqslant n \leqslant L)$ σ-алгебра $\mathscr{H}_n$ порождена разбиением Ω ровно на $n+1$ атом. Хааровская фильтрация $\mathbb{H} = (\mathscr{H}_n)_{n=0}^L$ называется интерполирующей хааровской фильтрацией (и.х.ф.) исходной фильтрации $\mathbb{F}$, если существует последовательность натуральных чисел $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_N = L$, для которой $\mathscr{H}_{n_k} = \mathscr{F}_k$.

Предположим, что $\mathscr{P}(Z, \mathbb{F}) \neq \varnothing$, и зафиксируем меру $\mathsf{P} \in \mathscr{P}(Z, \mathbb{F})$. По мартингалу $Z = (Z_k, \mathscr{F}_k, \mathsf{P})_{k=0}^N$ построим мартингальную хааровскую интерполяцию $Y = (Y_n, \mathscr{H}_n)_{n=0}^L$, используя формулу $Y_n = \mathsf{E}^{\mathsf{P}}[Z_N \mid \mathscr{H}_n]$ (вероятностное решение задачи Дирихле). Если и.х.ф. $\mathbb{H}$ фильтрации $\mathbb{F}$ фиксирована, то процесс Y определяется по мартингалу Z однозначно.

Пусть $|M|$ обозначает число элементов множества M. Говорят, что мартингальная мера $\mathsf{P} \in \mathscr{P}(Z, \mathbb{F})$ удовлетворяет свойству хааровской единственности ($\mathsf{P} \in \mathrm{HUP}(Z)$), если для исходной фильтрации $\mathbb{F}$ можно построить такую и.х.ф. $\mathbb{H}$, что для соответствующей мартингальной интерполяции $Y = (Y_n, \mathscr{H}_n)_{n=0}^L$ имеет место соотношение $|\mathscr{P}(Y, \mathbb{H})| = 1$ (т. е. только относительно исходной меры P процесс Y является мартингалом). Более важным является следующее определение. Говорят, что мартингальная мера $\mathsf{P} \in \mathscr{P}(Z, \mathbb{F})$ удовлетворяет свойству универсальной хааровской единственности ($\mathsf{P} \in \mathrm{UHUP}(Z)$), если для любой и.х.ф. $\mathbb{H}$ исходной фильтрации $\mathbb{F}$ имеет место соотношение $|\mathscr{P}(Y, \mathbb{H})| = 1$, где $Y = (Y_n, \mathscr{H}_n)_{n=0}^L$ – соответствующая мартингальная интерполяция процесса Z. Аналогично определяются включения $\mathsf{P} \in \mathrm{HUP}(Z^{(i)})$ и $\mathsf{P} \in \mathrm{UHUP}(Z^{(i)})$. Ясно, что для любого i $(0 \leqslant i \leqslant l)$ справедливо $\mathscr{P}(Z, \mathbb{F}) \cap \mathrm{HUP}(Z^{(i)}) \subset \mathrm{HUP}(Z)$ и $\mathscr{P}(Z, \mathbb{F}) \cap \mathrm{UHUP}(Z^{(i)}) \subset \mathrm{UHUP}(Z)$. Из результатов работы [1] вытекает, что если $\mathrm{HUP}(Z^{(i)}) \neq \varnothing$ (соответственно $\mathrm{UHUP}(Z^{(i)}) \neq \varnothing$ и для любого k $(0 \leqslant k < N)$ и любого атома $A \in \mathscr{F}_k$ характеристика дробления m не превосходит 3), то $\mathrm{HUP}(Z^{(i)}) = \mathscr{P}(Z^{(i)}, \mathbb{F})$ (соответственно $\mathrm{UHUP}(Z^{(i)}) = \mathscr{P}(Z^{(i)}, \mathbb{F})$). Отсюда вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Если* $\mathrm{HUP}(Z^{(i)}) \neq \varnothing$ (*соответственно* $\mathrm{UHUP}(Z^{(i)}) \neq \varnothing$ *и для любого* k $(0 \leqslant k < N)$ *и любого атома* $A \in \mathscr{F}_k$ *характеристика дробления* m *не превосходит* 3), *то* $\mathrm{HUP}(Z) = \mathscr{P}(Z, \mathbb{F})$ (*соответственно* $\mathrm{UHUP}(Z) = \mathscr{P}(Z, \mathbb{F})$).

На самом деле справедлива следующая теорема.

Теорема 1. 1) *Если* $\mathrm{HUP}(Z) \neq \varnothing$, *то для любого* k $(0 \leqslant k < N)$ *и любого атома* $A \in \mathscr{F}_k$ *с характеристикой дробления* m, *строго большей* 1, *существует номер* i

такой, что выполняется неравенство

$$\min_{1\leqslant j\leqslant m} Z_{k+1}^{(i)}|_{B_j} < Z_k^{(i)}|_A < \max_{1\leqslant j\leqslant m} Z_{k+1}^{(i)}|_{B_j}. \tag{1}$$

2) *Если для любого* k $(0 \leqslant k < N)$ *и любого атома* $A \in \mathscr{F}_k$ *с характеристикой дробления* m, *строго большей* 1, *существует номер* i *такой, что выполняется неравенство* (1), *то* $\mathrm{HUP}(Z) = \mathscr{P}(Z,\mathbb{F})$.

Данная теорема является обобщением на случай векторнозначных процессов соответствующего одномерного результата из [2].

Следствие 1. *Если* $\mathbb{F}$ – *естественная фильтрация процесса* Z, *то выполняется условие* (1) *и поэтому* $\mathrm{HUP}(Z) = \mathscr{P}(Z,\mathbb{F})$.

Замечание 1. Сформулированная теорема 1 остается верной, если $l=\infty$, а также в случае, когда Ω счетно, а $l<\infty$ (определение в последнем случае интерполирующей хааровской фильтрации, а также обсуждение случая $l=1$ имеется в [2]).

Теорема 2. *Пусть для любого* k $(0 \leqslant k < N)$ *и любого атома* $A \in \mathscr{F}_k$ *характеристика дробления* m *не превосходит* 3 *и существует номер* i *такой, что числа* $Z_k^{(i)}|_A, Z_{k+1}^{(i)}|_{B_1}, \dots, Z_{k+1}^{(i)}|_{B_m}$ *различны. Тогда* $\mathrm{UHUP}(Z) = \mathscr{P}(Z,\mathbb{F})$.

Замечание 2. Утверждение, обратное теореме 2, неверно. Действительно, пусть $N=1$, $l=2$ и множество Ω дробится на три атома $\omega_1,\omega_2,\omega_3$. Пусть $Z_0^{(1)} = Z_0^{(2)} = 2$, $Z_1^{(1)}(\omega_1)=4$, $Z_1^{(1)}(\omega_2)=2$, $Z_1^{(1)}(\omega_3)=1$, $Z_1^{(2)}(\omega_1)=1$, $Z_1^{(2)}(\omega_2)=4$, $Z_1^{(2)}(\omega_3)=2$. Легко видеть, что в данном случае $|\mathscr{P}(Z,\mathbb{F})|=1$, т. е. $\mathrm{UHUP}(Z)=\mathscr{P}(Z,\mathbb{F})$. Однако условия теоремы 2 не выполняются ни при $i=1$, ни при $i=2$. Таким образом, из того, что $\mathrm{UHUP}(Z)\neq\varnothing$, не следует существование такого номера i, что $\mathrm{UHUP}(Z^{(i)})\neq\varnothing$.

Приведем также один результат, дающий конструкцию мартингальной меры из множества $\mathrm{UHUP}(Z)$, когда условия теоремы 2 не выполняются. Пусть $\bigl(\Omega^{(i)}, (\mathscr{F}_k^{(i)})_{k=0}^N, \mathscr{F}^{(i)}\bigr)$ – ф.п. $(i=1,2)$, где $N<\infty$, $\mathscr{F}_0^{(i)} = \{\Omega^{(i)},\varnothing\}$, а $\mathscr{F}^{(i)} = \mathscr{F}_N^{(i)}$ – конечные σ-алгебры. Обозначим через $\mathbb{F}^{(i)}$ фильтрацию $(\mathscr{F}_k^{(i)})_{k=0}^N$. Рассмотрим $\Omega = \Omega^{(1)}\times\Omega^{(2)}$, $\mathscr{F}_k = \mathscr{F}_k^{(1)}\otimes\mathscr{F}_k^{(2)}$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}^{(1)}\otimes\mathscr{F}^{(2)}$ и обозначим $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_k^{(1)}\otimes\mathscr{F}_k^{(2)})_{k=0}^N$.

Теорема 3. *Пусть процесс* $(Z_k^{(i)},\mathscr{F}_k^{(i)})_{k=0}^N$ *допускает единственную мартингальную меру* $\mathsf{P}^{(i)}$, *нагружающую все атомы* σ-*алгебры* $\mathscr{F}^{(i)}$ $(i=1,2)$. *Тогда мера* $\mathsf{P}=\mathsf{P}^{(1)}\otimes\mathsf{P}^{(2)}$ *принадлежит множеству* $\mathrm{UHUP}(Z)$.

Список литературы

[**1**] М. Н. Богачева, И. В. Павлов, *УМН*, **57**:3 (2002), 143–144; англ. пер.: M. N. Bogacheva, I. V. Pavlov, *Russian Math. Surveys*, **57**:3 (2002), 581–583. [**2**] И. В. Павлов, А. Г. Данекянц, *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, **11**:1 (2004), 73–82.

В. В. Горгорова (V. V. Gorgorova)
Ростовский государственный строительный университет
E-mail: gorgorovav@aaanet.ru

Представлено Д. В. Трещёвым
Принято редколлегией
08.10.2007

И. В. Павлов (I. V. Pavlov)
Ростовский государственный строительный университет
E-mail: pavloviv2005@mail.ru