МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 34, № 3 (1983)

РАЗРЕШИМОСТЬ ФАКТОРИЗУЕМОЙ ГРУППЫ С РАЗЛОЖИМЫМИ ФАКТОРАМИ

В. С. Монахов

Конечная группа называется p-разложимой для простого числа p, если силовская p-подгруппа выделяется в ней прямым множителем. Нильпотентная группа p-разложима для каждого p. Через $\pi(X)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы X.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть A и B — подгруппы конечной группы G и пусть $G = AB$. Если подгруппы A и B p-разложимы для каждого $p \in \{2, 3, \pi(A) \cap \pi(B)\}$, то G резрешима.*

Теорема 1 обобщает известную теорему Виландта — Кегеля о разрешимости конечной группы, являющейся произведением нильпотентных подгрупп [1, стр. 674].

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующая лемма 1, которая несколько уточняет лемму Кегеля [1, стр. 677]. Напомним, что $Z(X)$ — центр X, а если Y — подгруппа группы X, то Y^X — наименьшая нормальная в X подгруппа, содержащая Y. Группа X называется p-замкнутой, если в ней силовская p-подгруппа X_p нормальна.

ЛЕММА 1. *Пусть A и B — подгруппы конечной группы G, обладающие следующими свойствами:*

1) $AB^g = B^gA$ *для всех* $g \in G$;

2) $O_\pi(B^G) = Z(B^G) = 1$, *где* $\pi = \pi(A) \cup \pi(B)$.

Тогда $A^G \cap B^G = 1$.

Доказательство. Воспользуемся методом доказательства леммы Кегеля. Пусть A_1 — наибольшая

π-подгруппа, содержащая A и перестановочная с каждой подгруппой, сопряженной с B. Предположим, что B^G не содержится в $N_G(A_1)$. Это означает, что существуют элементы $g \in G$ и $f \in B^g$ такие, что f не принадлежит $N_G(A_1)$. Поэтому A_1 — собственная подгруппа в $\langle A_1, A_1^f\rangle \subseteq \subseteq \langle A_1, f\rangle \subseteq A_1 B^g = B^g A_1$ и $\langle A_1, A_1^f\rangle$ есть π-группа. Кроме того, A_1^f перестановочна с каждой сопряженной с B подгруппой, так как этим свойством обладает A_1. Теперь $\langle A_1, A_1^f\rangle B^g = B^g\langle A_1, A_1^f\rangle$ для всех $g \in G$, что противоречит выбору A_1.

Итак, $B^G \subseteq N_G(A_1)$. Значит, $[B^G, A_1] \subseteq B^G \cap A_1$ и $[B^G, A_1)$ — нормальная в $B^G A_1$ π-подгруппа. Из условия 2) следует, что $[B^G, A_1] = 1$ и $A_1 \subseteq C_G(B^G)$. Так как $C_G(B^G) \lhd G$ и $C_G(B^G) \cap B^G = Z(B^G) = 1$, то $A_1^G \cap \cap B^G = 1$. Поэтому $A^G \cap B^G = 1$.

ЛЕММА 2. *Пусть конечная группа* $G = AB$ *с* p-*замкнутыми подгруппами* A *и* B. *Если* $O_p(A_p^G) = Z(A_p^G) = 1$, *то* $A_p^G \cap B_p^G = 1$.

Доказательство. Так как $A_p B_p = B_p A_p$, то $A_p^{ab} B_p = b^{-1} A_p b B_p = B_p b^{-1} A_p b = B_p A_p^{ab}$ для всех $a \in A$, $b \in B$. Первое условие леммы 1 выполнено. Так как выполняется и второе, то $A_p^G \cap B_p^G = 1$.

Секцией группы X называется фактор-группа некоторой подгруппы из X. Если X не содержит секций, изоморфных симметрической группе S_4 четырех символов, то X называется S_4-свободной.

ЛЕММА 3. *Если конечная группа* G *не является* S_4-*свободной, то существуют* $\{2, 3\}$-*подгруппы* H *и* K *такие, что* K *нормальна в* H *и* $H/K \cong S_4$.

Доказательство. По условию в группе G существует секция A/B, изоморфная S_4. Пусть C — нормальная в A подгруппа индекса 6, содержащая подгруппу B с индексом 4. По лемме Фраттини $A = CN_A/(T)$, где T — силовская 2-подгруппа из A. Так как T имеет индекс 2 в силовской 2-подгруппе из A, то $N_A(T)$ разрешима и содержит $\{2, 3\}$-холловскую подгруппу H. Кроме того, $A = HB$ и $H/H \cap B \cong A/B \cong S_4$.

ЛЕММА 4. *Конечная группа, содержащая нильпотентную* $\{2, 3\}$-*холловскую подгруппу*, 3-*разрешима*.

Доказательство. Достаточно показать непростоту группы G в случае, когда 3 делит $|G|$. Предположим, что G простая и 3 делит $|G|$. В S_4-свободных группах нет нильпотентных $\{2, 3\}$-холловских подгрупп [2], отличных от 2-силовской. Если G не S_4-свободна, то по лемме 3 существует ненильпотентная $\{2, 3\}$-подгруппа. Это противоречит теореме Виландта [1, стр. 285]. Лемма доказана.

Через $S(G)$ обозначим произведение всех разрешимых нормальных в G подгрупп.

ЛЕММА 5. *Пусть конечная группа $G = AB$ и пусть A разрешима, а $|B|$ взаимно прост с 6. Если в A существует нильпотентная $\{2, 3\}$-холловская подгруппа, то G разрешима.*

Доказательство. Если G — $3'$-группа, то G разрешима по лемме Сыскина [3]. Пусть 3 делит $|G|$ и N — минимальная нормальная в G подгруппа. Если $BN \neq G$, то $BN = (BN \cap A) B$ и BN разрешима по индукции, поэтому разрешима и N. Пусть $BN = G$. Тогда $G/N \cong B/B \cap N$ и G/N имеет порядок взаимно простой с 6. Значит нильпотентная $\{2, 3\}$-холловская подгруппа из A содержится в N и N 3-разрешима по лемме 4. Из минимальности N следует, что N разрешима. Итак, в любом случае G содержит разрешимую нормальную подгруппу N. Фактор-группа G/N удовлетворяет условиям леммы и по индукции разрешима. Поэтому разрешима и G. Лемма доказана.

Теорема 1 вытекает из следующей более общей теоремы

ТЕОРЕМА 2. *Пусть A и B — подгруппы конечной группы G и пусть $G = AB$. Предположим, что A и B — p-замкнуты для каждого $p \in \pi(A) \cap \pi(B)$. Если A и B 2-разложимы и 3-разложимы, то G разрешима.*

Доказательство индукцией по порядку G. Пусть N — минимальная нормальная в G подгруппа. Фактор-группа $G/N = AN/N \cdot BN/N$, а подгруппы $AN/N \cong A/A \cap N$ и $BN/N \cong B/B \cap N$ будут 2- и 3-разложимыми и p-замкнутыми для каждого $p \in \pi(AN/N) \cap \pi(BN/N)$. По индукции G/N разрешима, а N неразрешима. Поэтому $S(G) = 1$ и $C_G(N) = 1$. Следовательно, в G единственная минимальная нормальная подгруппа.

Пусть $p \in \pi(A) \cap \pi(B)$ и пусть A_p и B_p — силовские p-подгруппы из A и B соответственно. Так как A и B p-замкнуты и $S(G) = 1$, то $A_p^G \cap B_p^G = 1$ по лемме 2. Но G содержит точно одну минимальную нормальную подгруппу. Поэтому либо $A_p^G = 1$, либо $B_p^G = 1$. Итак для каждого p, либо p не делит $|A|$, либо p не делит

$|B|$. Следовательно, порядки A и B взаимно просты. Но теперь $G = N$ — простая группа.

Так как группа Судзуки $\mathrm{Sz}(q)$ нефакторизуема [4, стр. 52], то по теореме Глаубермана [2] порядок G делится на 3, а по теореме Фомина [5] порядок одного из факторов, пусть порядок A, делится на 6. Теперь в G существует нильпотентная $\{2, 3\}$-холловская подгруппа. По лемме 5 группа G разрешима. Теорема доказана.

Гомельское отделение
Института математики АН БССР

Поступило
25.I.1982

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Huppert B., **Endliche Gruppen. 1, Berlin — Heidelberg — N. Y, Springer-Verlag, 1967.**
[2] Glauberman G., Factorizations in local subgroups of finite groups, Reg. Con. Ser. Math., № 33, (1977), 77.
[3] Сыскин С. А., Об одном вопросе Р. Бэра, Сиб. матем. ж., 20, № 3 (1979), 679—681.
[4] Монахов В. С., Произведение сверхразрешимой и циклической или примарной групп, Сб., Конечные группы (Тр. Гомельского семинара), Минск, «Наука и техника», 1978, 50—63.
[5] Фомин А. Н., Одно замечание о факторизуемых группах, Алгебра и логика, 11, № 5 (1972), 608—611.