

О ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ КВАНТОВЫХ ВОЛНОВОДОВ

Приведены необходимые и достаточные условия возникновения собственных значений оператора Шредингера в полосах и цилиндрах при малых локализованных возмущениях. Построены асимптотики собственных значений.

Ключевые слова: оператор Шредингера, волновод, возмущение, спектр, асимптотика.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается возмущение квантового волновода, математической моделью которого является задача Дирихле для оператора $\mathcal{H}_0^{(m)} := -(\Delta + \mu_m)$ в n -мерном цилиндре $\Pi = (-\infty, \infty) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — односвязная ограниченная область с достаточно гладкой границей при $n \geq 3$ и интервал (a, b) при $n = 2$. Здесь и далее $0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \dots$ — собственные значения задачи Дирихле в области Ω для оператора $-\Delta' := -(\partial^2/\partial x_2^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2)$ при $n \geq 3$ и для оператора $-\Delta' := -d^2/dx_2^2$ при $n = 2$. Хорошо известно, что при возмущении волноводов может возникать малое собственное значение для $m = 1$ (т.е. для $\mathcal{H}_0^{(1)}$). В частности, в работах [1], [2] было показано существование такого собственного значения для слабо изогнутых волноводов, а в работе [3] была вычислена его асимптотика по малому параметру. В [3] также были приведены условия, при которых возникает собственное значение в случае возмущения волновода малым потенциалом, и построена его асимптотика. В [4]–[7] рассматривались локальные деформации волноводов. В [4] было доказано, что если среднее значение возмущения положительно, то собственное значение возникает, а если отрицательно, то собственного значения не существует. Кроме того, в двумерном случае была построена асимптотика возникающего собственного значения. Для трехмерного осесимметричного цилиндра асимптотика возникающего собственного значения (на физическом уровне строгости) была построена в [5]. В работе [6] было показано, что при $n = 2$ в критическом случае, когда среднее значение возмущения границы равно нулю, собственное значение может как возникать, так и не возникать. В работе [7] была построена асимптотика такого собственного значения в случае, когда оно все же возникает. В работе [8] были исследова-

* Башкирский государственный педагогический университет, Уфа, Россия.
E-mail: gadylshin@bspu.ru, gadylshin@yandex.ru

ны вопросы возникновения собственного значения и его асимптотики при возмущении малым локализованным дифференциальным оператором второго порядка, к частному случаю которого сводится (помимо упомянутых выше возмущений) и слабое кручение волновода. Причем для последнего случая было показано отсутствие собственных значений.

В настоящей работе рассмотрено малое возмущение, которое представляет собой произвольный локализованный оператор второго порядка и частными случаями которого являются все упомянутые выше возмущения волноводов. По существу, мы развиваем подход, предложенный в работе [9], где было рассмотрено аналогичное возмущение оператора Шредингера на оси и дано простое объяснение “нерегулярного” (необязательного) появления собственных значений при, очевидно, регулярном возмущении.

Структура работы следующая. В разделе 2 дается формулировка основного утверждения, в разделе 3 – его доказательство. В остальных четырех разделах приведены некоторые примеры, иллюстрирующие основное утверждение работы и его следствия.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

Всюду далее $H_{\text{loc}}^j(\Pi)$ – множество функций, определенных на Π , сужения которых на любую ограниченную область $D \subset \Pi$ принадлежат $H^j(D)$, $\|\cdot\|_G$ и $\|\cdot\|_{j,G}$ – нормы в $L^2(G)$ и $H^j(G)$, соответственно. Далее, пусть $Q = (-R, R) \times \Omega$, где $R > 0$ – произвольное действительное число, $L^2(\Pi; Q)$ – подмножество функций из $L^2(\Pi)$ с носителями из \overline{Q} , \mathcal{L}_ε – линейное отображение $H_{\text{loc}}^2(\Pi)$ в $L^2(\Pi; Q)$ такое, что $\|\mathcal{L}_\varepsilon[u]\|_Q \leq C(\mathcal{L})\|u\|_{2,Q}$, где постоянная $C(\mathcal{L})$ не зависит от ε , $0 < \varepsilon \ll 1$,

$$\langle F \rangle := \int_{\Pi} F dx.$$

Целью работы является исследование вопросов существования и асимптотик собственных значений задачи Дирихле для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon^{(m)} := \mathcal{H}_0^{(m)} - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon$ в цилиндре Π :

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{(m)} \psi_\varepsilon^{(m)} = \lambda_\varepsilon^{(m)} \psi_\varepsilon^{(m)} \quad \text{при } x \in \Pi, \quad \psi_\varepsilon^{(m)} = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Pi. \quad (2.1)$$

Для простых μ_m и малых комплексных k определим линейный оператор $A^{(m)}(k): L^2(\Pi; Q) \rightarrow H_{\text{loc}}^2(\Pi)$ как

$$A^{(m)}(k)g := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(x')}{2K_j^{(m)}(k)} \int_{\Pi} e^{-K_j^{(m)}(k)|x_1-t_1|} \phi_j(t')g(t) dt, \quad (2.2)$$

где $x' = (x_2, \dots, x_n)$, ϕ_j – ортонормированные в $L^2(\Omega)$ собственные функции задачи Дирихле в области Ω для оператора $-\Delta'$, соответствующие собственным значениям μ_j , $K_j^{(m)}(k) = i\sqrt{\mu_m - \mu_j - k^2}$ при $j < m$, $K_m^{(m)}(k) = k$ и $K_j^{(m)}(k) = \sqrt{\mu_j - \mu_m + k^2}$ при $j > m$. Далее, на функциях из $L^2(\Pi; Q)$ определим оператор $T_\varepsilon^{(m)}(k): L^2(\Pi; Q) \rightarrow L^2(\Pi; Q)$ как

$$T_\varepsilon^{(m)}(k)g := \mathcal{L}_\varepsilon[A^{(m)}(k)g] - \frac{1}{2k} \langle g \phi_m \rangle \mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m]. \quad (2.3)$$

Обозначим через $\mathcal{B}(X, Y)$ (через $\mathcal{B}(X)$) банахово пространство линейных ограниченных операторов из банахова пространства X в банахово пространство Y (в банахово пространство X), а через $\mathcal{B}^{\text{hol}}(X, Y)$ (через $\mathcal{B}^{\text{hol}}(X)$) обозначим множество голоморфных операторнозначных функций со значениями в $\mathcal{B}(X, Y)$ (в $\mathcal{B}(X)$).

В этих обозначениях из определения $T_\varepsilon^{(m)}(k)$ следует, что при малых k оператор $T_\varepsilon^{(m)}(k) \in \mathcal{B}^{\text{hol}}(L^2(\Pi; Q))$, а следовательно,

$$S_\varepsilon^{(m)}(k) := (I - \varepsilon T_\varepsilon^{(m)}(k))^{-1} \in \mathcal{B}^{\text{hol}}(L^2(\Pi; Q)), \quad S_\varepsilon^{(m)}(k) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} I, \quad (2.4)$$

где I – тождественный оператор. В свою очередь, из (2.4) вытекает

ЛЕММА 1. Если μ_m – простое собственное значение задачи Дирихле для $-\Delta'$ в Ω , то при достаточно малых k уравнение

$$2k - \varepsilon \langle \phi_m, S_\varepsilon^{(m)}(k) \mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] \rangle = 0 \quad (2.5)$$

имеет единственное решение $k_\varepsilon^{(m)}$, причем

$$k_\varepsilon^{(m)} = \varepsilon \frac{1}{2} \langle \phi_m, \mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] \rangle + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \langle \phi_m, T_\varepsilon^{(m)}(0) \mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] \rangle + O(\varepsilon^3), \quad (2.6)$$

а если $\mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] = 0$, то $k_\varepsilon^{(m)} = 0$.

Основным утверждением, доказательству которого посвящена работа, является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть μ_m – простое собственное значение задачи Дирихле для $-\Delta'$ в Ω , а $k_\varepsilon^{(m)}$ – решение уравнения (2.5). Тогда:

1) если $\mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] = 0$ или $\text{Re} k_\varepsilon^{(m)} \leq 0$, но $k_\varepsilon^{(m)} \neq 0$, то не существует малого собственного значения краевой задачи (2.1);

2) если $\text{Re} k_\varepsilon^{(m)} > 0$, а при $t \geq 2$ дополнительно и $\text{Im} k_\varepsilon^{(m)} > 0$, то существует единственное малое собственное значение краевой задачи (2.1), и оно определяется равенством

$$\lambda_\varepsilon^{(m)} = -(k_\varepsilon^{(m)})^2, \quad (2.7)$$

а соответствующая единственная собственная функция имеет вид

$$\psi_\varepsilon^{(m)} = A^{(m)}(k_\varepsilon^{(m)}) S_\varepsilon^{(m)}(k_\varepsilon^{(m)}) \mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m]; \quad (2.8)$$

3) если $t \geq 2$, $\text{Re} k_\varepsilon^{(m)} > 0$, $\text{Im} k_\varepsilon^{(m)} \leq 0$, но

$$\langle \phi_j, S_\varepsilon^{(m)}(k_\varepsilon^{(m)}) \mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] \rangle = 0 \quad (2.9)$$

при всех $j = 1, \dots, t-1$, то существует единственное малое собственное значение краевой задачи (2.1), определяемое равенством (2.7), а соответствующая единственная собственная функция имеет вид (2.8);

4) если $t \geq 2$, $\text{Re} k_\varepsilon^{(m)} > 0$, $\text{Im} k_\varepsilon^{(m)} \leq 0$, но

$$\langle \phi_j, S_\varepsilon^{(m)}(k_\varepsilon^{(m)}) \mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] \rangle \neq 0 \quad (2.10)$$

хотя бы для одного $j \leq t-1$, то не существует малого собственного значения краевой задачи (2.1).

Непосредственно из теоремы 1 и из (2.6) вытекает

СЛЕДСТВИЕ. При выполнении условий 2 или 3 теоремы 1 собственное значение имеет асимптотику

$$\lambda_\varepsilon^{(m)} = -\varepsilon^2 \frac{1}{4} \langle \phi_m \mathcal{L}_\varepsilon [\phi_m] \rangle^2 + O(\varepsilon^3),$$

а если $\langle \phi_m \mathcal{L}_\varepsilon [\phi_m] \rangle = o(\varepsilon)$, то

$$\lambda_\varepsilon^{(m)} = -\varepsilon^4 \frac{1}{4} \langle \phi_m T_\varepsilon^{(m)}(0) \mathcal{L}_\varepsilon [\phi_m] \rangle^2 + o(\varepsilon^4).$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО УТВЕРЖДЕНИЯ

Обозначим через $\mathcal{B}^{\text{mer}}(X, Y)$ (через $\mathcal{B}^{\text{mer}}(X)$) – множество мероморфных операторнозначных функций со значениями в $\mathcal{B}(X, Y)$ (в $\mathcal{B}(X)$). Множество линейных операторов из банахова пространства X в $H_{\text{loc}}^2(\Pi)$ таких, что их сужение на любое ограниченное множество D принадлежит $\mathcal{B}(X, H^2(D))$, обозначим как $\mathcal{B}(X, H_{\text{loc}}^2(\Pi))$. Через $\mathcal{B}^{\text{hol}}(X, H_{\text{loc}}^2(\Pi))$ (через $\mathcal{B}^{\text{mer}}(X, H_{\text{loc}}^2(\Pi))$) обозначим множество операторнозначных функций со значениями в $\mathcal{B}(X, H_{\text{loc}}^2(\Pi))$ таких, что для любого ограниченного D они принадлежат $\mathcal{B}^{\text{hol}}(X, H^2(D))$ (принадлежат $\mathcal{B}^{\text{mer}}(X, H^2(D))$). Далее, пусть $P_\varepsilon^{(m)}(k)$ и $\mathcal{R}_\varepsilon^{(m)}(k)$ – операторы, определяемые равенствами

$$P_\varepsilon^{(m)}(k)f := \varepsilon \frac{\langle \phi_m S_\varepsilon^{(m)}(k)f \rangle S_\varepsilon^{(m)}(k) \mathcal{L}_\varepsilon [\phi_m]}{2k - \varepsilon \langle \phi_m S_\varepsilon^{(m)}(k) \mathcal{L}_\varepsilon [\phi_m] \rangle} + S_\varepsilon^{(m)}(k)f, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{R}_\varepsilon^{(m)}(k) := A^{(m)}(k)P_\varepsilon^{(m)}(k). \quad (3.2)$$

Обозначим $\mathbb{C}_+ := \{k : \text{Re } k > 0\}$.

ЛЕММА 2. Пусть μ_m – простое собственное значение задачи Дирихле для $-\Delta'$ в Ω . Тогда существуют $R > 0$ и $\varepsilon_0(R) > 0$ такие, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ справедливы утверждения.

1. $\mathcal{R}_\varepsilon^{(m)}(k) \in \mathcal{B}^{\text{mer}}(L^2(\Pi; Q), H_{\text{loc}}^2(\Pi))$ в круге $|k| < R$, причем, если к тому же $k \in \mathbb{C}_+$, то $\mathcal{R}_\varepsilon^{(m)}(k) \in \mathcal{B}^{\text{mer}}(L^2(\Pi; Q), H^2(\Pi))$.

2. В этом круге лежит единственный полюс $k_\varepsilon^{(m)}$, который является решением уравнения (2.5) и имеет первый порядок. Вычет функции $\mathcal{R}_\varepsilon^{(m)}(k)f$ в полюсе $k_\varepsilon^{(m)}$ определяется равенством (2.8) при $k_\varepsilon^{(m)} \neq 0$, равенством

$$\psi_\varepsilon^{(m)} = \lim_{k \rightarrow 0} A^{(m)}(k)S_\varepsilon^{(m)}(k)\mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] \quad (3.3)$$

при $k_\varepsilon^{(m)} = 0$, $\mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] \neq 0$ и равенством

$$\psi_\varepsilon^{(m)}(x) = \phi_m(x'), \quad (3.4)$$

если $\mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] = 0$, с точностью до скалярного множителя, причем этот множитель не равен нулю, если $\langle \phi_m f \rangle \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $P_\varepsilon^{(m)}(k) \in \mathcal{B}^{\text{mer}}(L^2(\Pi; Q))$ в силу (2.4) и определения (3.1), а $A^{(m)}(k) \in \mathcal{B}^{\text{mer}}(L_2(\Pi; Q), H_{\text{loc}}^2(\Pi))$ в силу (2.2), причем $A^{(m)}(k) \in \mathcal{B}^{\text{hol}}(L_2(\Pi; Q), H_2^2(\Pi))$ при $k \in \mathbb{C}_+$, то из (3.2) вытекает справедливость утверждения 1.

Покажем справедливость утверждения 2. Пусть $k_\varepsilon^{(m)}$ – решение уравнения (2.5). Из (2.2)–(2.4), (3.1), (3.2) следует, что $k_\varepsilon^{(m)}$ – полюс оператора $\mathcal{R}_\varepsilon^{(m)}(k)$, причем если $k_\varepsilon^{(m)} \neq 0$, то это полюс первого порядка. Из этих же формул следует, что других полюсов при $k \neq 0$ не существует, $k = 0$ является полюсом первого порядка, если $k_\varepsilon^{(m)} = 0$, и $k = 0$ не является полюсом, если $k_\varepsilon^{(m)} \neq 0$. Действительно, на любом ограниченном подмножестве из Π при $k \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\varepsilon^{(m)}(k)f &\sim \frac{\phi_m}{2k} \langle \phi_m P_\varepsilon^{(m)}(0)f \rangle, & k_\varepsilon^{(m)} \neq 0, \\ \mathcal{R}_\varepsilon^{(m)}(k)f &\sim \frac{\phi_m}{4k^2} \langle \phi_m S_\varepsilon^{(m)}(0)\mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] \rangle, & k_\varepsilon^{(m)} = 0.\end{aligned}$$

Если $k_\varepsilon^{(m)} \neq 0$, то $\langle \phi_m P_\varepsilon^{(m)}(0)f \rangle = 0$ в силу (3.1), а если $k_\varepsilon^{(m)} = 0$, то $\langle \phi_m S_\varepsilon^{(m)}(0)\mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] \rangle = 0$ в силу уравнения (2.5). Следовательно, нуль не является полюсом второго порядка, если $k_\varepsilon^{(m)} = 0$, и нуль не является полюсом, если $k_\varepsilon^{(m)} \neq 0$. Равенства (2.8), (3.3) и (3.4) для вычета следуют из явного вида оператора $\mathcal{R}_\varepsilon^{(m)}(k)$.

ЛЕММА 3. Пусть μ_m – простое собственное значение задачи Дирихле для $-\Delta'$ в Ω , $k_\varepsilon^{(m)}$ – решение уравнения (2.5), а $\psi_\varepsilon^{(m)}$ – функция, определяемая равенством (2.8), если $k_\varepsilon^{(m)} \neq 0$, и равенством (3.4), если $\mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] = 0$. Тогда:

- 1) если $\text{Re } k_\varepsilon^{(m)} \leq 0$, то $\psi_\varepsilon^{(m)} \notin L^2(\Pi)$;
- 2) если $\text{Re } k_\varepsilon^{(m)} > 0$, а при $m \geq 2$ дополнительно и $\text{Im } k_\varepsilon^{(m)} > 0$, то $\psi_\varepsilon^{(m)} \in H^2(\Pi)$;
- 3) если $m \geq 2$, $\text{Re } k_\varepsilon^{(m)} > 0$, $\text{Im } k_\varepsilon^{(m)} \leq 0$, но выполняются равенства (2.9) при всех $j = 1, \dots, m-1$, то $\psi_\varepsilon^{(m)} \in H^2(\Pi)$;
- 4) если $m \geq 2$, $\text{Re } k_\varepsilon^{(m)} > 0$, $\text{Im } k_\varepsilon^{(m)} \leq 0$, но имеет место неравенство (2.10) хотя бы для одного $j \leq m-1$, то $\psi_\varepsilon^{(m)} \notin L^2(\Pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $k_\varepsilon^{(m)} \neq 0$ – решение уравнения (2.5), то в силу этого уравнения $\langle \phi_m S_\varepsilon^{(m)}(k_\varepsilon^{(m)})\mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] \rangle \neq 0$. Тогда справедливость утверждений леммы, за исключением пункта 1, для случая $\mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] = 0$ вытекает непосредственно из определения (2.8) функции $\psi_\varepsilon^{(m)}$. Если же $\mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] = 0$, то справедливость пункта 1 вытекает непосредственно из определения (3.4) функции $\psi_\varepsilon^{(m)}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть μ_m – простое собственное значение задачи Дирихле для $-\Delta'$ в Ω . Тогда существуют $R > 0$ и $\varepsilon_0(R) > 0$ такие, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $|k| < R$ справедливы следующие утверждения.

1. Для любого $f \in L^2(\Pi; Q)$ функция $u_\varepsilon = \mathcal{R}_\varepsilon^{(m)}(k)f$ является решением краевой задачи

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{(m)}u_\varepsilon = -k^2u_\varepsilon + f \quad \text{при } x \in \Pi, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Pi. \quad (3.5)$$

2. Функция $\psi_\varepsilon^{(m)}$, определяемая равенством (2.8) при $k_\varepsilon^{(m)} \neq 0$, равенством (3.3) при $k_\varepsilon^{(m)} = 0$, $\mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] \neq 0$ и равенством (3.4) при $\mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] = 0$, является решением краевой задачи (2.1), где $\lambda_\varepsilon^{(m)}$ определяется в (2.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По аналогии с [9] при $f \in L^2(\Pi; Q)$ решение краевой задачи (3.5) будем искать в виде

$$u_\varepsilon = A^{(m)}(k)g_\varepsilon, \tag{3.6}$$

где $g_\varepsilon \in L^2(\Pi; Q)$ – пока неизвестная функция. Из определения оператора $A^{(m)}(k)$ следует, что функция, определяемая равенством (3.6), является решением краевой задачи

$$\mathcal{H}_0^{(m)}u_\varepsilon = -k^2u_\varepsilon + g_\varepsilon \quad \text{при } x \in \Pi, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Pi. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.6) в (3.5), с учетом (3.7) получаем, что (3.6) является решением (3.5), если

$$(I - \varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon A^{(m)}(k))g_\varepsilon = f. \tag{3.8}$$

Действуя оператором $S_\varepsilon^{(m)}(k)$ на обе части этого уравнения, получаем, что

$$\left(g_\varepsilon - \varepsilon \frac{\langle g_\varepsilon \phi_m \rangle}{2k} S_\varepsilon^{(m)}(k) \mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] \right) = S_\varepsilon^{(m)}(k)f. \tag{3.9}$$

Умножив обе части этого равенства на ϕ_m и проинтегрировав по Π , получаем равенство

$$\langle g_\varepsilon \phi_m \rangle \left(1 - \frac{\varepsilon}{2k} \langle \phi_m S_\varepsilon^{(m)}(k) \mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] \rangle \right) = \langle \phi_m S_\varepsilon^{(m)}(k)f \rangle.$$

Следовательно,

$$\langle g_\varepsilon \phi_m \rangle = 2k\varepsilon \frac{\langle \phi_m S_\varepsilon^{(m)}(k)f \rangle}{2k - \varepsilon \langle \phi_m S_\varepsilon^{(m)}(k) \mathcal{L}_\varepsilon[\phi_m] \rangle}. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.9), получаем, что

$$g_\varepsilon = P_\varepsilon^{(m)}(k)f. \tag{3.11}$$

Из (3.11), (3.6) и определения $\mathcal{R}_\varepsilon^{(m)}(k)$ следует справедливость утверждения 1. В свою очередь, справедливость утверждения 2 вытекает из утверждения 1 доказываемой теоремы и пункта 2 леммы 2. Теорема доказана.

Аналогично работе [9] доказывается, что никаких решений краевой задачи (2.1), кроме функций вида (2.8), (3.3) и (3.4), не может существовать. Но тогда справедливость теоремы 1 вытекает из пунктов 2 леммы 2 и теоремы 2 и утверждения леммы 3. Теорема 1 доказана.

4. ДЕФОРМАЦИЯ ВОЛНОВОДА ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Пусть h – функция из $C^\infty(\partial\Pi)$ с ограниченным носителем, Π_ε – область, полученная из цилиндра Π малой деформацией, при которой $\partial\Pi$ переходит в $\partial\Pi_\varepsilon = \{y : y = x + \varepsilon h(x)\mathbf{n}, x \in \partial\Pi\}$, где \mathbf{n} – внешняя нормаль к Π . Рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{H}_0^{(m)} \psi_\varepsilon^{(m)} = \lambda_\varepsilon^{(m)} \psi_\varepsilon^{(m)} \quad \text{при } y \in \Pi_\varepsilon, \quad \psi_\varepsilon^{(m)} = 0 \quad \text{при } y \in \partial\Pi_\varepsilon. \quad (4.1)$$

Обозначим

$$\langle F \rangle_{\partial\Pi} := \int_{\partial\Pi} F ds.$$

Покажем, что если

$$\left\langle \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 h \right\rangle_{\partial\Pi} < 0, \quad (4.2)$$

то не существует малого собственного значения $\lambda_\varepsilon^{(m)}$, а если

$$\left\langle \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 h \right\rangle_{\partial\Pi} > 0, \quad (4.3)$$

то существует собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(1)}$ с асимптотикой

$$\lambda_\varepsilon^{(1)} = -\varepsilon^2 \frac{1}{4} \left\langle \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 h \right\rangle_{\partial\Pi}^2 + O(\varepsilon^3). \quad (4.4)$$

Пусть $\chi(t)$ – произвольная бесконечно дифференцируемая срезаящая функция, равная единице при $|t| < 1$ и нулю при $|t| > 2$. Положим $\chi_\delta(t) = \chi(t\delta^{-1})$. Не ограничивая общности, будем считать, что ось Ox_1 лежит в Π . Тогда при достаточно малых $\delta > 0$ замена переменных

$$y_1 = x_1, \quad y' = x' + \varepsilon \mathbf{n} h \chi_\delta(\tau), \quad (4.5)$$

где τ – расстояние от x' до $\partial\Omega$ по внешней нормали, осуществляет взаимно однозначное соответствие между Π и Π_ε . Из (4.5) следует, что при обратном отображении краевая задача (4.1) переходит в краевую задачу (2.1) с дифференциальным оператором второго порядка \mathcal{L}_ε , представимым в виде

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \mathcal{L}^{(0)}(x, D) + \varepsilon \mathcal{L}^{(1)}(x, D; \varepsilon), \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)}(x, D) &= -\widehat{\mathcal{L}}(x, D) - \widetilde{\mathcal{L}}(x, D), \\ \widehat{\mathcal{L}}(x, D) &= 2h'_{x_1} \chi_\delta \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial \tau} + h''_{x_1 x_1} \chi_\delta \frac{\partial}{\partial \tau}, \\ \widetilde{\mathcal{L}}(x, D) &= \widetilde{\mathcal{L}}_2(x, D) + \widetilde{\mathcal{L}}_1(x, D), \\ \widetilde{\mathcal{L}}_2(x, D) &= \sum_{i,j=2}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left((n_j h \chi_\delta)'_{x_i} + (n_i h \chi_\delta)'_{x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}, \\ \widetilde{\mathcal{L}}_1(x, D) &= - \sum_{i=2}^n \left(\sum_{j=2}^n (n_j h \chi_\delta)''_{x_j x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

а $\mathcal{L}^{(1)}(x, D; \varepsilon)$ – дифференциальный оператор второго порядка, коэффициенты которого финитны и равномерно по ε ограничены в норме $C^q(\bar{\Pi})$ для любого q .

Так как функция h финитна по x_1 , а функции χ_δ и ϕ_1 не зависят от x_1 , то

$$\langle \phi_m \tilde{\mathcal{L}} \phi_m \rangle = 0. \quad (4.7)$$

Дважды интегрируя по частям $\langle \phi_m \tilde{\mathcal{L}}_2 \phi_m \rangle$, получаем, что

$$\begin{aligned} \langle \phi_m \tilde{\mathcal{L}}_2 \phi_m \rangle &= - \sum_{i,j=2}^n (\langle (\phi_m)'_{x_i} (n_j h \chi_\delta)'_{x_i} (\phi_m)'_{x_j} \rangle + \langle (\phi_m)'_{x_i} (n_j h \chi_\delta)'_{x_j} (\phi_m)'_{x_j} \rangle) = \\ &= -2 \left\langle \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 h \right\rangle_{\partial \Pi} + 2 \sum_{i,j=2}^n \langle n_j h \chi_\delta ((\phi_m)'_{x_i} (\phi_m)'_{x_j})'_{x_i} \rangle. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Аналогично, интегрируя по частям $\langle \phi_m \tilde{\mathcal{L}}_1 \phi_m \rangle$ и учитывая, что $-\Delta' \phi_m = \mu_m \phi_m$, получаем равенство

$$\begin{aligned} \langle \phi_m \tilde{\mathcal{L}}_1 \phi_m \rangle &= \left\langle \sum_{i=2}^n \left(\sum_{j=2}^n (n_j h \chi_\delta)'_{x_i} \right) (\phi_m)'_{x_j} (\phi_m)'_{x_i} \right\rangle + \\ &+ \left\langle \sum_{i=2}^n \left(\sum_{j=2}^n (n_j h \chi_\delta)'_{x_i} \right) \phi_m (\phi_m)''_{x_i x_j} \right\rangle = \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 h \right\rangle_{\partial \Pi} - \sum_{i,j=2}^n \langle n_j h \chi_\delta ((\phi_m)'_{x_i} (\phi_m)'_{x_j})'_{x_i} \rangle - \\ &- \left\langle \sum_{i=2}^n \left(\sum_{j=2}^n (n_j h \chi_\delta) \right) (\phi_m)'_{x_i} (\phi_m)''_{x_i x_j} \right\rangle + \\ &+ \mu_m \left\langle \left(\sum_{j=2}^n n_j h \chi_\delta \right) (\phi_m)'_{x_j} \phi_m \right\rangle = \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 h \right\rangle_{\partial \Pi} - 2 \sum_{i,j=2}^n \langle n_j h \chi_\delta ((\phi_m)'_{x_i} (\phi_m)'_{x_j})'_{x_i} \rangle. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Суммируя (4.7)–(4.9), получаем, что

$$\langle \phi_m \mathcal{L}^{(0)} \phi_m \rangle_{\Pi} = \left\langle \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 h \right\rangle_{\partial \Pi}. \quad (4.10)$$

Из (2.6), (4.10) и (4.6) вытекает, что

$$k_\varepsilon^{(m)} = \varepsilon \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 h \right\rangle_{\partial \Pi} + O(\varepsilon^2). \quad (4.11)$$

В свою очередь, в силу (4.11), пунктов 1, 2 теоремы 1 и ее следствия получаем, что если имеет место неравенство (4.2), то не существует малого собственного значения $\lambda_\varepsilon^{(m)}$, а если справедливо (4.3), то существует собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(1)}$ с асимптотикой (4.4).

5. ДЕФОРМАЦИЯ ВОЛНОВОДА. КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

В этом разделе исследуется критический случай, при котором

$$\left\langle \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 h \right\rangle_{\partial \Pi} = 0.$$

Покажем, что при этом собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(1)}$ может как появляться, так и не появляться. Заметим, что при возмущении волновода, осуществляемом малым потенциалом (т.е. когда $\mathcal{L}_\varepsilon g = Vg$), в критическом случае (когда $\langle \phi_1 V \phi_1 \rangle = 0$) собственное значение обязательно появляется (см. [3]).

Рассмотрим деформацию трехмерного волновода, сечением которого является круг $\Omega = \{x' : |x'| < R\}$, причем функцию h будем считать зависящей только от переменной x_1 и такой, что

$$\langle h \rangle_{\mathbb{R}} := \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = 0. \quad (5.1)$$

Ясно, что тогда

$$\left\langle \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 h \right\rangle_{\partial \Pi} = \langle h \rangle_{\mathbb{R}} \int_{\partial \Omega} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right)^2 ds = 0,$$

и мы имеем критический случай.

В рассматриваемом частном случае вместо замены (4.5) естественно использовать более простую замену

$$y_1 = x_1, \quad y' = x'(1 + \varepsilon h(x_1)). \quad (5.2)$$

Тогда краевая задача (4.1) переходит в краевую задачу (2.1) с дифференциальным оператором второго порядка \mathcal{L}_ε , представимым в виде

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \mathcal{L}^{(0)}(x, D) + \varepsilon \mathcal{L}^{(1)}(x, D) + \varepsilon^2 \mathcal{L}^{(2)}(x, D; \varepsilon), \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)}(x, D) &= - \left(2h\Delta' + h''r \frac{\partial}{\partial r} + 2rh' \frac{\partial^2}{\partial r \partial x_1} \right), \\ \mathcal{L}^{(1)}(x, D) &= 3h^2 \Delta' + (h')^2 \left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \right) + r(h^2)' \frac{\partial^2}{\partial r \partial x_1} + \frac{1}{2} r(h^2)'' \frac{\partial}{\partial r}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$r = |x'|$, а $\mathcal{L}^{(2)}(x, D; \varepsilon)$ – дифференциальный оператор второго порядка, коэффициенты которого финитны и равномерно по ε ограничены в норме $C^q(\bar{\Pi})$ для любого q . Причем поскольку ϕ_1 не зависит от x_1 , то в силу (5.4) и (5.1)

$$\langle \phi_1 \mathcal{L}^{(0)} \phi_1 \rangle = 0. \quad (5.5)$$

Подставляя (5.3) и (5.5) в (2.6) и учитывая определение (2.3) оператора $T_\varepsilon^{(1)}(k)$, получаем, что

$$k_\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^2 \frac{1}{2} (\langle \phi_1 \mathcal{L}^{(1)} \phi_1 \rangle + \langle \phi_1 \mathcal{L}^{(0)} \tilde{A}^{(1)}(0) \mathcal{L}^{(0)} \phi_1 \rangle) + O(\varepsilon^3), \quad (5.6)$$

где

$$\tilde{A}^{(1)}(k)g := A^{(1)}(k)g - \frac{1}{2k}\langle g\phi_1\rangle\phi_1.$$

Так как $\Delta'\phi_1 = (\partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r)\phi_1 = -k_1^2\phi_1$, $k_1 = \sqrt{\mu_1}$, ϕ_1 не зависит от x_1 , а h – финитная функция, зависящая только от x_1 , то в силу (5.4)

$$\langle \phi_1 \mathcal{L}^{(1)} \phi_1 \rangle = -k_1^2(3\langle h^2 \rangle_{\mathbb{R}} + \langle (h')^2 \rangle_{\mathbb{R}} \langle r^2 \phi_1^2 \rangle_{\Omega}), \quad (5.7)$$

где

$$\langle g \rangle_{\Omega} := \int_{\Omega} g dx'.$$

Далее, в силу этих же соображений также имеем

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 \mathcal{L}^{(0)} \tilde{A}^{(1)}(0) \mathcal{L}^{(0)} \phi_1 \rangle &= -4k_1^2 \langle h\phi_1 \Delta'(\tilde{A}^{(1)}(0)(h\phi_1)) \rangle - \\ &- 2k_1^2 \left\langle h''r\phi_1 \frac{\partial}{\partial r}(\tilde{A}^{(1)}(0)(h\phi_1)) \right\rangle - 4k_1^2 \left\langle h'r\phi_1 \frac{\partial^2}{\partial r \partial x_1}(\tilde{A}^{(1)}(0)(h\phi_1)) \right\rangle + \\ &+ 2 \left\langle h\phi_1 \Delta' \left(\tilde{A}^{(1)}(0) \left(h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) \right) \right\rangle + \left\langle h''r\phi_1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\tilde{A}^{(1)}(0) \left(h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) \right) \right\rangle + \\ &+ 2 \left\langle h'r\phi_1 \frac{\partial^2}{\partial r \partial x_1} \left(\tilde{A}^{(1)}(0) \left(h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Интегрируя слагаемые в правой части (5.8) по частям (третье и шестое в области Π , а остальные в области Ω), получаем равенство

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 \mathcal{L}^{(0)} \tilde{A}^{(1)}(0) \mathcal{L}^{(0)} \phi_1 \rangle &= 4k_1^4 \langle h\phi_1 \tilde{A}^{(1)}(0)(h\phi_1) \rangle - \\ &- 4k_1^2 \langle h''\phi_1 \tilde{A}^{(1)}(0)(h\phi_1) \rangle - 2k_1^2 \left\langle h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \tilde{A}^{(1)}(0)(h\phi_1) \right\rangle - \\ &- 2k_1^2 \left\langle h\phi_1 \tilde{A}^{(1)}(0) \left(h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) \right\rangle + 2 \left\langle h''\phi_1 \tilde{A}^{(1)}(0) \left(h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) \right\rangle + \\ &+ \left\langle h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \tilde{A}^{(1)}(0) \left(h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Интегрируя по частям $\langle \phi_1 \partial(r\phi_1)/\partial r \rangle_{\Omega}$, получаем, что

$$\left\langle \phi_1 \frac{\partial}{\partial r}(r\phi_1) \right\rangle_{\Omega} = - \left\langle \frac{\partial}{\partial r}(r\phi_1)\phi_1 \right\rangle_{\Omega} = 0.$$

Следовательно,

$$\left\langle \phi_1 r \frac{\partial}{\partial r} \phi_1 \right\rangle_{\Omega} = \left\langle \phi_1 \frac{\partial}{\partial r}(r\phi_1) \right\rangle_{\Omega} - \langle \phi_1^2 \rangle_{\Omega} = -1. \quad (5.10)$$

Учитывая равенства (5.10) и определение $\tilde{A}^{(1)}(k)$, легко получить следующие равенства:

$$\begin{aligned} \langle h\phi_1 \tilde{A}^{(1)}(0)(h\phi_1) \rangle &= \langle h^2_{-1} \rangle_{\mathbb{R}}, \\ -\langle h''\phi_1 \tilde{A}^{(1)}(0)(h\phi_1) \rangle &= \left\langle h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \tilde{A}^{(1)}(0)(h\phi_1) \right\rangle = \\ &= \left\langle h\phi_1 \tilde{A}^{(1)}(0) \left(h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) \right\rangle = \langle h^2 \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (5.11) \\ \left\langle h''\phi_1 \tilde{A}^{(1)}(0) \left(h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) \right\rangle &= -\langle (h')^2 \rangle_{\mathbb{R}}, \\ \left\langle h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \tilde{A}^{(1)}(0) \left(h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) \right\rangle &= \langle (h')^2 \rangle_{\mathbb{R}} + C \left(h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} h_{-1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{x_1} h(t) dt, \quad C \left(h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) = \sum_{j=2}^{\infty} \langle h''h_j^{(1)} \rangle_{\mathbb{R}} \left\langle \phi_j r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right\rangle_{\Omega}^2, \\ h_j^{(1)}(x_1) &= \frac{1}{2K_j^{(1)}(0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-K_j^{(1)}(0)|x_1-t|} h''(t) dt. \end{aligned}$$

Из (5.6), (5.7), (5.9) и (5.11) следует, что в рассматриваемом случае (5.2), (5.1) имеем

$$k_{\varepsilon}^{(1)} = \varepsilon^2 \varkappa^{(1)} + O(\varepsilon^3), \quad (5.12)$$

где

$$\begin{aligned} \varkappa^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(-k_1^2 \langle 3\langle h^2 \rangle_{\mathbb{R}} + \langle (h')^2 \rangle_{\mathbb{R}} \langle r^2 \phi_1^2 \rangle_{\Omega} \rangle + 4k_1^4 \langle h^2_{-1} \rangle_{\mathbb{R}} - \right. \\ &\quad \left. - \langle (h')^2 \rangle_{\mathbb{R}} + C \left(h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) \right). \quad (5.13) \end{aligned}$$

Из определения C и равенства Парсеваля вытекает, что

$$0 < C \left(h''r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) \leq \langle (h')^2 \rangle_{\mathbb{R}} \sum_{j=2}^{\infty} \left\langle \phi_j r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right\rangle_{\Omega}^2. \quad (5.14)$$

Обозначим соответственно через K_1 , Φ_1 и ω частоту k_1 , собственную функцию ϕ_1 и область Ω при $R = 1$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} k_j &= R^{-1}K_j, \quad \langle r^2 \phi_1^2 \rangle_{\Omega} = R^2 \langle r^2 \Phi_1^2 \rangle_{\omega}, \\ \left\langle \left(r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right)^2 \right\rangle_{\Omega} &= \left\langle \left(r \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 \right\rangle_{\omega}. \quad (5.15) \end{aligned}$$

Из (5.15) и (5.13) вытекает, что

$$\varkappa^{(1)} \geq \frac{1}{2} \left(-\frac{K_1^2}{R^2} \langle 3\langle h^2 \rangle_{\mathbb{R}} + R^2 \langle (h')^2 \rangle_{\mathbb{R}} \langle r^2 \Phi_1^2 \rangle_{\Omega} \rangle - \langle (h')^2 \rangle_{\mathbb{R}} + 4\frac{K_1^4}{R^4} \langle h^2_{-1} \rangle_{\mathbb{R}} \right), \quad (5.16)$$

и, следовательно, $\varkappa^{(1)} > 0$ при достаточно малых R . В силу (5.12), пункта 2 теоремы 1 и ее следствия получаем, что при достаточно малых R существует собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(1)}$ с асимптотикой

$$\lambda_\varepsilon^{(1)} = -\varepsilon^4 (\varkappa^{(1)})^2 + O(\varepsilon^5).$$

Далее, интегрированием по частям с использованием равенства $\Delta \Phi_1 = -K_1^2 \Phi_1$ легко получить, что

$$\left\langle \left(r \frac{\partial}{\partial r} \Phi_1 \right)^2 \right\rangle_\omega - K_1^2 \langle r^2 \Phi_1^2 \rangle_\omega = 2. \quad (5.17)$$

Из (5.14), (5.15), (5.17), (5.10) и равенства Парсеваля–Стеклова следует, что

$$C \left(h'' r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) - K_1^2 \langle r^2 \Phi_1^2 \rangle_\omega \langle (h')^2 \rangle_{\mathbb{R}} \leq 2 \langle (h')^2 \rangle. \quad (5.18)$$

В свою очередь, из (5.13), (5.18) и (5.15) вытекает неравенство

$$\varkappa^{(1)} \leq \frac{K_1^2}{2R^2} \left(-3 \langle h^2 \rangle_{\mathbb{R}} + \frac{4K_1^2}{R^2} \langle h_{-1}^2 \rangle_{\mathbb{R}} \right). \quad (5.19)$$

Отсюда следует, что $\varkappa^{(1)} < 0$ при достаточно больших R . В силу пункта 1 теоремы 1 получаем, что при достаточно больших R не существует малого собственного значения.

Как уже отмечалось в разделе 1, при $n = 2$ аналогичные результаты были получены в работах [6], [7].

6. ДЕФОРМАЦИЯ ВОЛНОВОДА. НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРА

Пусть h и h_1 – функции из $C^\infty(\partial\Pi)$ с ограниченным носителем, Π_ε – область, полученная из трехмерного цилиндра $\Pi = (-\infty, \infty) \times \{r < R\}$ малой деформацией

$$y_1 = x_1, \quad y' = x'(1 + \varepsilon H(x_1, \varepsilon)), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad r < R,$$

где $H(x_1, \varepsilon) = h(x_1) + \varepsilon h(x_1)$ в случае, когда $\langle h \rangle_{\mathbb{R}} = 0$. Покажем, что в этом случае условие (4.3), которое эквивалентно условию $\langle h_1 \rangle_{\mathbb{R}} > 0$, не является достаточным для существования малого собственного значения краевой задачи (4.1), а при условии (4.2), которое эквивалентно условию $\langle h_1 \rangle_{\mathbb{R}} < 0$, может существовать малое собственное значение этой краевой задачи.

Повторяя вычисления предыдущего раздела, легко получить равенство

$$k_\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^2 (\varkappa^{(1)} + \varkappa^{(2)}) + O(\varepsilon^3), \quad (6.1)$$

где $\varkappa^{(2)}$ определяется в (5.13),

$$\varkappa^{(2)} = \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right)^2 \right\rangle_\Omega \langle h_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2R^2} \left\langle \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^2 \right\rangle_\omega \langle h_1 \rangle_{\mathbb{R}}. \quad (6.2)$$

Из (6.1), (5.16), (6.2) и теоремы 1 следует, что независимо от знака $\langle h_1 \rangle$ (а следовательно, от выполнения условия (4.3)) при достаточно малых R существует малое собственное значение. Пусть теперь $\langle h_1 \rangle > 0$, но

$$\langle h_1 \rangle_{\mathbb{R}} < 3\langle h^2 \rangle_{\mathbb{R}}. \quad (6.3)$$

Очевидно, что такая функция h_1 существует. Тогда из (6.1)–(6.3), (5.19), очевидного равенства $\langle (\partial\Phi_1/\partial r)^2 \rangle_{\omega} = K_1^2$ и теоремы 1 следует, что при достаточно больших R не существует малого собственного значения, несмотря на то что выполнено условие (4.2).

7. ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathcal{L}_{\varepsilon}[g] = Vg$, где $V \in C^{\infty}(\bar{\Pi})$ – функция с конечным носителем. Тогда в силу теоремы 1 и ее следствия, если $\operatorname{Re}\langle \phi_m V \phi_m \rangle < 0$, то $\operatorname{Re} k_{\varepsilon}^{(m)} < 0$, и, следовательно, у $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{(m)}$ нет собственного значения, сходящегося к нулю, а если $\operatorname{Re}\langle \phi_1 V \phi_1 \rangle > 0$, то существует малое собственное значение $\lambda_{\varepsilon}^{(1)}$, имеющее асимптотику

$$\lambda_{\varepsilon}^{(1)} = -\varepsilon^2 \frac{\langle \phi_1 V \phi_1 \rangle^2}{4} + O(\varepsilon^3). \quad (7.1)$$

Для вещественнозначных функций V эта асимптотика получена в [3]. Таким образом, формула (7.1) является обобщением на случай комплекснозначных потенциалов. Заметим только, что для вещественнозначных V неравенство $\langle \phi_1 V \phi_1 \rangle \geq 0$ является необходимым и достаточным условием существования собственного значения оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{(1)}$ (что и было доказано в [3]). Однако если V – комплекснозначная функция, то условие $\langle \phi_1 V \phi_1 \rangle = 0$ не является достаточным для существования собственного значения. Действительно, пусть $V = v + iav$, где $v \in C_0^{\infty}(\Pi)$ – вещественнозначная функция такая, что $\langle \phi_1 v \phi_1 \rangle = 0$, а a – пока произвольная постоянная. Очевидно, что в этом случае $\langle \phi_1 V \phi_1 \rangle = 0$. Используя равенство (2.6), легко показать, что

$$k_{\varepsilon}^{(1)} = \varepsilon^2 \varkappa^{(1)} + O(\varepsilon^3), \quad \varkappa^{(1)} = \varkappa(v)(1-a) + ia\tilde{\varkappa}(v), \quad (7.2)$$

где $2\varkappa(v) = \langle \phi_1 v \tilde{A}^{(1)}(0)v \phi_1 \rangle > 0$. Но тогда при $a > 1$ из (7.2) вытекает, что $\operatorname{Re} k_{\varepsilon}^{(1)} < 0$. Следовательно, в силу теоремы 1 не существует малого собственного значения для $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{(1)}$.

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathcal{L}_{\varepsilon}[g] = V_{\varepsilon}g$, где $V_{\varepsilon} = V + \varepsilon V_1$, а V, V_1 – вещественнозначные функции с конечными носителями. Из (2.6), теоремы 1 и ее следствия вытекает, что условия $\langle \phi_1 V \phi_1 \rangle < 0$ и $\langle \phi_1 V \phi_1 \rangle > 0$ являются достаточными для соответственно отсутствия и существования собственных значений $\lambda_{\varepsilon}^{(1)}$, причем в последнем случае асимптотика имеет вид (7.1). Для случая $\langle \phi_1 V \phi_1 \rangle = 0$ из (2.6) получаем, что

$$k_{\varepsilon}^{(1)} = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \langle \phi_1 V_1 \phi_1 \rangle + \varkappa(V) \right) + O(\varepsilon^3). \quad (7.3)$$

Тогда из (7.3), теоремы 1 и ее следствия вытекает, что если $\langle \phi_1 V_1 \phi_1 \rangle \leq 0$, то существует собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(1)}$, имеющее асимптотику

$$\lambda_\varepsilon^{(1)} = -\varepsilon^4 \left(\frac{1}{2} \langle \phi_1 V_1 \phi_1 \rangle + \varkappa(V) \right)^2 + O(\varepsilon^5). \quad (7.4)$$

Таким образом, условие $\langle \phi_1 V_\varepsilon \phi_1 \rangle \geq 0$ является достаточным для существования собственного значения, которое имеет асимптотику (7.1) при $\langle \phi_1 V \phi_1 \rangle > 0$ и асимптотику (7.4), если $\langle \phi_1 V \phi_1 \rangle = 0$. Однако, в отличие от случая вещественного $V_\varepsilon = V$, рассмотренного в [3], условие $\langle \phi_1 V_\varepsilon \phi_1 \rangle < 0$ не является достаточным для отсутствия собственного значения. Действительно, пусть $\langle \phi_1 V \phi_1 \rangle = 0$, $V_1 = av$, $\langle \phi_1 v \phi_1 \rangle < 0$, a – пока произвольное положительное число. Тогда $\langle \phi_1 V_\varepsilon \phi_1 \rangle = \varepsilon a \langle \phi_1 v \phi_1 \rangle < 0$, но в силу (7.3)

$$k_\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^2 \left(\frac{a}{2} \langle \phi_1 v \phi_1 \rangle + \varkappa(V) \right) + O(\varepsilon^3).$$

Очевидно, что $\operatorname{Re} k_\varepsilon^{(1)} > 0$ при достаточно малых a . Но тогда в силу теоремы 1 и ее следствия существует малое собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(1)}$, имеющее асимптотику (7.4).

ПРИМЕР 3. Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon[g] = \chi(Q)\langle \rho g \rangle$, где $\rho \in C_0^\infty(Q)$, а $\chi(Q)$ – характеристическая функция Q (т.е. функция, равная единице при $x \in Q$ и нулю для остальных x). Тогда в силу (2.6), теоремы 1 и ее следствия, если $\langle \rho \phi_1 \rangle = 0$ или $\operatorname{Re}\langle \rho \rangle < 0$, то собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(1)}$ отсутствует. Если $\operatorname{Re}\langle \phi_1 \rho \phi_1 \rangle > 0$, то собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(1)}$ существует и имеет асимптотику

$$\lambda_\varepsilon = -\varepsilon^2 \frac{1}{4} (\langle \chi(Q) \phi_1 \rangle \langle \rho \phi_1 \rangle)^2 + O(\varepsilon^3).$$

Благодарности. Автор выражает признательность Д. И. Борисову за полезные замечания и рецензенту, обратившему внимание на работы [1]. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-01008), программы “Университеты России” (грант УР 04.01.484) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ (грант № 1446.2003.1).

Список литературы

- [1] В. П. Маслов. ДАН СССР. 1958. Т. 123. № 4. С. 631; В. П. Маслов, Е. М. Воробьев. ДАН СССР. 1968. Т. 179. № 3. С. 558.
- [2] P. Exner, P. Šeba. J. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 2574; P. Exner. J. Math. Phys. 1993. V. 34. P. 23.
- [3] P. Duclos, P. Exner. Rev. Math. Phys. 1995. V. 7. P. 73.
- [4] W. Bulla, F. Gesztesy, W. Renger, B. Simon. Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 127. P. 1487.
- [5] Р. Р. Гадьльшин. О собственном значении задачи Дирихле в локально возмущенном цилиндре. В сб.: Ученые записки. Сборник научных трудов. Вып. 3. Ред. З. П. Каримов. Изд-во Башкирского государственного педагогического университета: Уфа, 2001. С. 38.
- [6] P. Exner, S. A. Vugalter. Lett. Math. Phys. 1997. V. 39. P. 59.
- [7] D. Borisov, P. Exner, R. Gadyl'shin, D. Krejcirik. Ann. Henry Poincaré. 2001. V. 2. P. 553.
- [8] В. В. Грушин. Матем. заметки. 2004. Т. 75. С. 360.
- [9] Р. Р. Гадьльшин. ТМФ. 2002. Т. 132. С. 97.

Поступила в редакцию 16.И.2005 г.