V. V. Fedorchuk, On open maps, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1982, Volume 37, Issue 4, 187–188

ОБ ОТКРЫТЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

В. В. Федорчук

1. Г. М. Непомнящий доказал (см. [2], теорема 1), что класс многозначных абсолютных ретрактов (MAR-бикомпактов) адекватен (см. [8]) классу 1-мягких отображений. Скажем, что бикомпакт X является *континуумзначным абсолютным ретрактом* (CAR-бикомпактом), если для любого вложения X в тихоновской куб I^τ существует континуумзначная ретракция I^τ на X, т. е. такое отображение $r\colon I^\tau \to \exp^c X$, что $r(x) = x$ для всех $x \in X$. Имеет место

Теорема 1. *Для бикомпакта X эквивалентны условия:*

1) $X \in$ CAR:

2) $X \in$ MAR;

3) $X \in$ AE-1 [1]).

Следствие 1. *Класс* AE-1-*бикомпактов адекватен классу* 1-*мягких отображений.*

Доказательство теоремы 1. Импликация 1) ⇒ 2) очевидна, импликация 2) ⇒ 3) составляет содержание следствия 1 из [2]. Пусть теперь $X \in$ AE-1 и $X \subset_{\to} I^\tau$ — произвольное вложение. По теореме 2 (см. ниже) существуют одномерный бикомпакт Z и открытое монотонное отображение $f\colon Z \to I^\tau$ на I^τ. Положим $Z_0 = f^{-1}X$ и $f_0 = f \mid Z_0$. Поскольку $X \in$ AE-1, существует такое отображение $g\colon Z \to X$, что $g \mid Z_0 = f_0$. Тогда отображение $r = \exp^c g \cdot f^{-1}\colon I^\tau \to \exp^c X$ и будет искомой ретракцией.

Теорема 2. *Всякий бикомпакт является открытым монотонным образом бикомпакта размерности* $\dim \leqslant 1$.

Доказательство основано на теореме Р. Андерсона [9] о том, что гильбертов кирпич является открытым монотонным образом одномерного компакта. Далее применяется метод Б. А. Пасынкова, с помощью которого он из примера Л. В. Келдыш [1] нульмерного открытого отображения одномерного компакта на квадрат получил открытое нульмерное отображение одномерного бикомпакта на произвольный не нульмерный бикомпакт [3].

2. Этот пункт посвящен изменению свойств открытых отображений после применения к ним функтора континуальной экспоненты $\exp^c$ и примыкает к работе [6]. Следующее утверждение является параметрической версией теоремы Войдыславского [15] о гиперпространствах пеановских континуумов.

Теорема 3. *Для отображения f пеановских континуумов следующие условия эквивалентны:*

1) f 1-*мягко, а* $\exp^c f$ *открыто*;

2) $\exp^c f$ 1-*мягко*;

3) $\exp^c f$ *мягко*.

Стоит заметить, что условие открытости $\exp^c f$, автоматически выполненное в теореме Войдыславского (отображение постоянно!), в общем случае выполнено довольно редко, о чем говорит

Пример 1. Для проектирования $p_1\colon S^1 \times I \to S^1$ отображение $\exp^c p_1$ не является открытым.

Отсюда, в частности, следует, что не открыто отображение $\exp^c p$, где $p\colon Q \times Q \to Q$ — проектирование. А отсюда с применением спектральной теоремы Е. В. Щепина о гомеоморфизме [8] и теоремы Хэйдона об адекватности 0-мягких отображений и пространств Дугунджи (AE-0-бикомпактов) [11] вытекает

Теорема 4. *Бикомпакт* $\exp^c I^{\omega_1}$ *не является пространством Дугунджи.*

В связи с этим возникают два вопроса.

Вопрос 1. Будет ли $\exp^c I^{\omega_1}$ диадическим бикомпактом?

Вопрос 2. Будет ли $\exp^c I^{\omega_1}$ непрерывным образом тихоновского куба?

---

[1]) AE-1 — класс абсолютных экстензоров для нормальных пространств размерности $\dim \leqslant 1$.

Отметим, что для функтора exp вопрос 1 имеет положительный ответ [4], а вопрос 2— отрицательный [7].

Теорема 3 может быть применена для получения следующей параметрической версии теоремы Веста — Кёртиса — Шори [10], [14] о гиперпространстве подконтинуумов пеановского континуума.

Теорема 5. *Если X — невырожденный пеановский континуум без свободных дуг, а p_1: $I \times X \to I$ — проектирование, то отображение* $\exp^c p_1$ *является тривиальным расслоением со слоем гильбертов кирпич Q.*

В доказательстве теоремы 5 ключевую роль играет полученная Вестом и Торунчиком [13] параметрическая версия теоремы Торунчика, характеризующей Q-многообразия посредством Z-отображений [12].

Вопрос 3. Останется ли верной теорема 5, если заменить проектирование p_1 на 1-мягкое (даже мягкое) отображение f: $Y \to I$, все слои которого суть невырожденные пеановские континуумы без свободных дуг?

3. Здесь мы рассматриваем функтор вероятностных мер P (подробности о нем см. в [5]). Имеет место также доказываемая с помощью упомянутой выше теоремы Веста — Торунчика

Теорема 6. *Если X и Y — произвольные компакты, причем X бесконечен, а p_1: $Y \times X \to Y$ — проектирование, то отображение $P(p_1)$ является тривиальным расслоением со слоем гильбертов кирпич Q.*

Вопрос 4. Останется ли верной теорема 6, если заменить проектирование p_1 на произвольное открытое отображение f: $X \to Y$, все слои которого бесконечны?

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Келдыш. Нульмерные открытые отображения.— Изв. АН, сер. матем., 1959, **23**, с. 165—184.

[2] Г. М. Непомнящий. О спектральном разложении многозначных абсолютных ретрактов.— УМН, 1981, **36** : 3, с. 221—222.

[3] Б. А. Пасынков. Нульмерные открытые отображения, повышающие размерность.— УМН, 1963, **18**:5, с. 183—190.

[4] С. Сирота, О спектральном представлении пространств замкнутых подмножеств бикомпактов.— ДАН, 1968, **181**:5, с. 1069—1072.

[5] В. В. Федорчук. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q-многообразия.— УМН, 1981, **36**:3, с. 177—195.

[6] В. В. Федорчук. Экспоненты пеановских континуумов—послойный вариант.— ДАН, 1982, **262**:1, с. 41—44.

[7] Л. Б. Шапиро. О пространствах замкнутых подмножеств бикомпактов.— ДАН, 1976, **231**:2, с. 295—298.

[8] Е. В. Щепин. Топология предельных пространств несчетных обратных спектров.— УМН, 1976, **31**:5, с. 191—226.

[9] R. D. Anderson. Monotone interior dimension-raising mappings.— Duke Math. J., 1952, **19**, p. 359—366.

[10] D. W. Curtis, R. M. Schori. Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes.— Fund. Math., 1978, **101**, p. 19—38.

[11] R. Haydon. On problem of Pelczynski: Milutin spaces and AE dim 0.— Studia Math., 1974, **52**:1, p. 23—31.

[12] H. Torunczyk. On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q-manifolds.— Fund. Math., 1980, **106**:1, p. 31—40.

[13] H. Torunczyk, J. E. West. Fibrations vs. bundles in Hilbert cube manifolds.— 1980 (preprint).

[14] J. E. West. The subcontinua of a dendron form a Hilbert cube factor.— Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **36**, p. 603—608.

[15] M. Wojdyslawski. Retractes absolus et hyperspaces des continus.— Fund. Math., 1939, **32**, p. 184—192.

Московский государственный университет

Поступило в Правление общества 11 ноября 1981 г.