Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Беттхер, Б. Зильберман, Тёплицевы операторы с символами из $C+H^\infty$ в пространствах l^p, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 157, 124–128

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.83
21 января 2025 г., 12:02:55

А.Бёттхер, Б.Зильберманн

ТЁПЛИЦЕВЫ ОПЕРАТОРЫ С СИМВОЛАМИ ИЗ $C+H^\infty$ В ПРОСТРАНСТВАХ ℓ^p.

Хорошо известный результат Д.Сарасона состоит в том, что $C+H^\infty$ является замкнутой подалгеброй алгебры L^∞ ; Р.Дуглас доказал, что оператор Тёплица с символом из $C+H^\infty$ нётеров в пространстве ℓ^2 тогда и только тогда, когда его символ обратим в $C+H^\infty$. В настоящей заметке мы покажем, что оба результата имеют аналог для пространств ℓ^p .

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Пусть ℓ^p ($1<p<\infty$) – банахово пространство всех последовательностей $\varphi=\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ таких, что $\|\varphi\|_p=\left(\sum_{n=0}^\infty|\varphi_n|^p\right)^{1/p}<\infty$. Если a – функция из L^∞ на единичной окружности $\mathbb{T}$ с последовательностью коэффициентов Фурье $\{a_n\}_{n=-\infty}^\infty$, то матрица $(a_{j-k})_{j,k=0}^\infty$ определяет ограниченный оператор в ℓ^2 , называемый оператором Тёплица с символом a и обозначаемый через $T(a)$. Пусть M_p – множество всех функций a из L^∞ таких, что $T(a)\varphi\in\ell^p$ и $\|T(a)\varphi\|_p\leqslant$ $\leqslant c\|\varphi\|_p$ для всех $\varphi\in\ell^2\cap\ell^p$ (здесь c – некоторая постоянная, не зависящая от φ). Если $a\in M_p$, то $T(a)$ естественным образом продолжается до ограниченного оператора в ℓ^p . Множество M_p , снабженное поточечными операциями и нормой $\|a\|_{M_p}=\|T(a)\|_{\mathcal{L}(\ell^p)}$, является банаховой алгеброй.

Пусть C_p – замыкание в M_p множества всех тригонометрических многочленов. Обозначим $H_p^\infty\overset{def}{=}M_p\cap H^\infty$ и $C_p+H_p^\infty\overset{def}{=}$ $=\{f+h: f\in C_p,\ h\in H^\infty\}$. Отметим, что H_p^∞ содержит разрывные функции (см. [I]), так что $C_p+H_p^\infty$ строго больше C_p .

ТЕОРЕМА I. Множество $C_p+H_p^\infty$ является замкнутой подалгеброй алгебры M_p .

Доказательству предпошлем две леммы.

ЛЕММА I (Л.А.Залькмэн, У.Рудин; см. [2]). Пусть X – банахово пространство и пусть E и F замкнутые подпространства в X . Если существует последовательность $\{S_n\}$ линейных ограниченных операторов в X , удовлетворяющая следующим условиям:

(i) $\sup_n\|S_n\|_{\mathcal{L}(X)}<\infty$

(ii) $S_n(X)\subset E$ и $S_n(F)\subset F$ для всех n ,

(iii) $\| S_n a - a \|_X \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$ для всех $a \in E$,

то $E + F$ будет замкнутым подпространством пространства X.

ЛЕММА 2 (Н.К.Никольский [3]). Пусть $\sigma_n a$ обозначает n-ую сумму Фейера функции a. Тогда для любой функции a из M_p справедлива оценка

$$\| \sigma_n a \|_{M_p} \leqslant \| a \|_{M_p} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Применяем лемму I, в которой положим $X = M_p$, $E = C_p$, $F = H_p^\infty$ и $S_n = \sigma_n$ (см. лемму 2).

По существу нам нужно проверить лишь справедливость условия (iii) в лемме I, поскольку выполнение условия (ii) очевидно, а условие (i) гарантирует лемма 2.

Итак, пусть $a \in C_p$ и $\varepsilon > 0$. Выберем тригонометрический многочлен f такой, что $\| a - f \|_{M_p} < \varepsilon/3$. Тогда, по лемме 2,

$$\| \sigma_n a - a \|_{M_p} \leqslant \| \sigma_n (a - f) \|_{M_p} + \| \sigma_n f - f \|_{M_p} + \| f - a \|_{M_p} \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon/3 + \| \sigma_n f - f \|_{M_p} ,$$

и легко видеть, что $\| \sigma_n f - f \|_{M_p} \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. Таким образом, условие (iii) леммы I тоже выполнено. Следовательно, $C_p + H_p^\infty$ – замкнутое подмножество пространства M_p, а теперь уже нетрудно показать, что $C_p + H_p^\infty$ является алгеброй.●

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Если $a \in M_p$, то оператор Ганкеля $H(a)$, определенный матрицей $(a_{j+k+1})_{j,k=0}^\infty$, является ограниченным в ℓ^p. Для функции $a \in L^\infty$ определяем $\tilde{a} \in L^\infty$ правилом $\tilde{a}(t) = a(1/t)$ $(t \in \mathbb{T})$. Можно показать, что $\tilde{a} \in M_p$ если $a \in M_p$. Следующие тождества хорошо известны: если $a, b \in M_p$, то

$$T(ab) = T(a)T(b) + H(a)H(\tilde{b}) , \tag{I}$$

$$H(ab) = T(a)H(b) + H(a)T(\tilde{b}) . \tag{2}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a \in C_p + H_p^\infty$. Тогда для нётеровости оператора $T(a)$ в ℓ^p необходимо и достаточно, чтобы функция a была обратимой в $C_p + H_p^\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОСТАТОЧНОСТИ В ТЕОРЕМЕ 2. Предполагаем, что a и a^{-1} принадлежат $C_p + H_p^\infty$. По формуле (I) имеем

$$T(a)T(a^{-1}) = I - H(a)H(\tilde{a}^{-1}), \quad T(a^{-1})T(a) = I - H(a^{-1})H(\tilde{a}).$$

Легко показать, что $H(\tilde{a}^{-1})$ и $H(\tilde{a})$ – компактные операторы в ℓ^p. Следовательно, $T(a^{-1})$ – регуляризатор оператора $T(a)$. ●

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательству необходимости в теореме 2 мы предпошлем одно рассуждение. Обозначим через $\mathcal{Y}_p$ множество всех функций a из M_p, для которых $H(\tilde{a})$ – компактный оператор в ℓ^p. Используя тождество (2), можно легко убедиться в том, что $\mathcal{Y}_p$ – замкнутая подалгебра алгебры M_p. Мы утверждаем, что оператор $T(a)$ с символом из $\mathcal{Y}_p$ будет нётеровым в ℓ^p в том и только том случае, когда функция a обратима в $\mathcal{Y}_p$. Действительно, в случае обратимости функции a в $\mathcal{Y}_p$ нётеровость оператора $T(a)$ можно доказать так, как это было сделано выше. С другой стороны, предполагая, что $T(a)$ нётеров в ℓ^p, проверим, что $a^{-1} \in \mathcal{Y}_p$. Пусть R – некоторый правый регуляризатор, т.е. $R \in \mathcal{L}(\ell^p)$ и $T(a)R = I + K$, где K – компактный оператор. Прежде всего отметим, что $a^{-1} \in M_p$. Используя соотношение (2), получаем

$$0 = H(\tilde{a}^{-1}\tilde{a}) = T(\tilde{a}^{-1})H(\tilde{a}) + H(\tilde{a}^{-1})T(a).$$

Умножив это равенство справа на R, имеем

$$0 = T(\tilde{a}^{-1})H(\tilde{a})R + H(\tilde{a}^{-1}) + H(\tilde{a}^{-1})K,$$

откуда следует, что оператор $H(\tilde{a}^{-1})$ является компактным, т.е. $a^{-1} \in \mathcal{Y}_p$. Итак, если бы мы знали, что $C_p + H_p^\infty = \mathcal{Y}_p$ (по теореме Хартмана это справедливо для $p = 2$), то только что приведенное рассуждение доказывало бы "необходимость" в теореме 2. Поскольку нам известно лишь включение $C_p + H_p^\infty \subset \mathcal{Y}_p$, придется применить другие методы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим через $\mathcal{R}$ сужение на единичную окружность множества всех рациональных функций, не имеющих полюсов на $\mathbb{T}$. Отметим, что $\mathcal{R} \subset C_p$. Пусть $\mathcal{R} + H_p^\infty \overset{def}{=\!=}$

$=\{g+h : g\in \mathcal{R},\ h\in H_p^\infty\}$. Ясно, что $C_p + H_p^\infty$ совпадает с замыканием множества $\mathcal{R} + H_p^\infty$ в M_p.

ТЕОРЕМА 3. Множество $\mathcal{R} + H_p^\infty$ является алгеброй с поточечными операциями. Если $a\in \mathcal{R} + H_p^\infty$, то оператор $T(a)$ нётеров в ℓ^p тогда и только тогда, когда функция a обратима в L^∞ и a^{-1} принадлежит $\mathcal{R} + H_p^\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (2) и теоремы Кронекера (согласно которой $H(\tilde{a})$ имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда $a\in \mathcal{R} + H_p^\infty$) легко получить, что $\mathcal{R} + H_p^\infty$ – алгебра. Критерий нётеровости можно доказать, сочетая теорему Кронекера с рассуждением, приведенным в замечании выше (следует только выбрать такой регуляризатор R, для которого K имеет конечный ранг). ●

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМОСТИ В ТЕОРЕМЕ 2. Пусть $T(a)$ нётеров в ℓ^p. Тогда функция a обратима в M_p. Выберем функции b_n из $\mathcal{R} + H_p^\infty$ такие, что $\|a-b_n\|_{M_p} \longrightarrow 0$ при $n\to\infty$. Тогда $\|T(a)-T(b_n)\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \longrightarrow 0$ при $n\to\infty$, откуда вытекает нётеровость операторов $T(b_n)$ в ℓ^p для всех достаточно больших n. По теореме 3 $b_n^{-1}\in \mathcal{R} + H_p^\infty$, а так как $\|a^{-1}-b_n^{-1}\|_{M_p} \longrightarrow 0$ при $n\to\infty$, приходим к выводу, что a^{-1} принадлежит замыканию $\mathcal{R} + H_p^\infty$ в M_p, т.е. принадлежит $C_p + H_p^\infty$. ●

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ. (а) Если $a\in C_p + H_p^\infty$ и оператор $T(a)$ нётеров в ℓ^p, то функция a принадлежит $C_r + H_r^\infty$ и $T(a)$ является нётеровым в ℓ^r для всех r между p и q $(1/p + 1/q = 1)$. Это показывает, что индекс оператора $T(a)$ одинаков во всех пространствах ℓ^r, для r, лежащих между p и q. В частности, можно использовать результаты Р.Дугласа для $n=2$, чтобы выразить индекс оператора $T(a)$ в ℓ^p в терминах гармонического продолжения.

(в) Пусть $\operatorname{alg} T(C_p + H_p^\infty)$ – наименьшая замкнутая подалгебра алгебры $\mathcal{L}(\ell^p)$, содержащая множество $\{T(a):$ $a\in C_p + H_p^\infty\}$ и пусть $\mathcal{C}_\infty(\ell^p)$ – множество всех компактных операторов в ℓ^p. Можно доказать, что $\mathcal{C}_\infty(\ell^p)$ является идеалом алгебры $\operatorname{alg} T(C_p + H_p^\infty)$ и что факторалгебра $\operatorname{alg} T(C_p + H_p^\infty)/\mathcal{C}_\infty(\ell^p)$ изометрически изоморфна алгебре $C_p + H_p^\infty$.

(с) Все результаты этой заметки переносятся на блочные тёплицевы операторы естественным образом.

Авторы выражают благодарность В.И.Васюнину за помощь при оформлении статьи.

Литература

I. Виноградов С.А. Мультипликаторы степенных рядов с последовательностью коэффициентов из ℓ^p. – В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. IУ. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1974, т.39, с.30–39.
2. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. М., 1984.
3. Никольский Н.К. О пространствах и алгебрах тёплицевых матриц, действующих в ℓ^p. – Сиб.матем.ж., 1966, т.УП, № I, с.146–158.

A.Böttcher, B.Silberman. Toeplitz operators with $C+H^\infty$ symbols on ℓ^p.

Summary

We show that the algebra of all multipliers on $\ell^p (1<p<\infty)$ contains a closed subalgebra, $C_p + H_p^\infty$, which coincides with the familiar algebra $C+H^\infty$ in the case $p=2$. We also prove that a Toeplitz operator with $C_p+H_p^\infty$ symbol is Fredholm on ℓ^p if and only if its symbol is invertible in $C_p+H_p^\infty$.