



Общероссийский математический портал

Е. С. Дубцов, Обратные меры Карлесона для пространств Харди в единичном шаре, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2023, том 527, 54–70

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.169

23 марта 2025 г., 06:53:09



Е. С. Дубцов

ОБРАТНЫЕ МЕРЫ КАРЛЕСОНА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть B_d обозначает открытый единичный шар из \mathbb{C}^d , $d \geq 1$, и $\sigma = \sigma_d$ обозначает нормированную меру Лебега на единичной сфере ∂B_d . Для единичного круга B_1 , меры σ_1 и единичной окружности ∂B_1 также будут использоваться символы \mathbb{D} , m и $\partial\mathbb{D}$ соответственно.

Пусть $\mathcal{H}ol(B_d)$ обозначает пространство голоморфных функций в шаре B_d . Для $0 < p < \infty$ пространство Харди $H^p = H^p(B_d)$ состоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(B_d)$ таких, что

$$\|f\|_{H^p}^p = \sup_{0 < r < 1} \int_{\partial B_d} |f(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) < \infty.$$

Как обычно, пространство Харди $H^p(B_d)$, $p > 0$, отождествляется с пространством $H^p(\partial B_d)$, которое состоит из соответствующих граничных значений. Дальнейшие детали о пространствах $H^p(B_d)$ и смежных объектах содержатся, например, в монографиях [8] и [10].

1.1. Меры Карлесона. Пусть $M_+(B_d)$ обозначает пространство конечных положительных борелевских мер, заданных на шаре B_d . Сначала предположим, что $d = 1$ и $\mu \in M_+(\mathbb{D})$. Классическая теорема Карлесона [3] утверждает, что $H^p(\mathbb{D})$ вкладывается в $L^p(\mathbb{D}, \mu)$, т.е. существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{D}, \mu)} \leq C \|f\|_{H^p} \quad \text{для всех } f \in H^p, \quad (1.1)$$

тогда и только тогда, когда мера μ удовлетворяет следующему условию Карлесона: существует константа $C > 0$ такая, что

$$\mu(S_I) \leq Cm(I) \quad \text{для всех дуг } I \subset \partial\mathbb{D}, \quad (1.2)$$

Ключевые слова: пространства Харди, обратные меры Карлесона, пространства де Бранжа–Ровняка.

Исследования выполнены за счет гранта Российского научного фонда No. 19-11-00058, <https://rscf.ru/project/19-11-00058/>.

где

$$S_I = \left\{ z \in \overline{\mathbb{D}} : 1 - m(I) \leq |z| \leq 1, \frac{z}{|z|} \in I \right\}.$$

В случае произвольной размерности $d \geq 1$ рассмотрим множества

$$Q = Q(\zeta, \delta) = \{ \xi \in \partial B_d : |1 - \langle \zeta, \xi \rangle| \leq \delta \}, \quad \zeta \in \partial B_d, \delta > 0.$$

Отметим, что Q является замкнутым шаром относительно неизотропной метрики

$$\rho(\zeta, \xi) = |1 - \langle \zeta, \xi \rangle|^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta, \xi \in \partial B_d.$$

Для $r > 0$ и $Q = Q(\zeta, \delta)$ по определению полагаем $rQ = Q(\zeta, r\delta)$.

В силу теоремы о мерах Карлесона для пространств Харди в шаре (см., например, [10, гл. 5]) оценка

$$\|f\|_{L^p(B_d, \mu)} \leq C \|f\|_{H^p}, \quad f \in H^p, \quad (1.3)$$

эквивалентна следующему условию на меру μ :

$$\mu(S_Q) \leq C \sigma(Q) \quad \text{для всех неизотропных шаров } Q \subset \partial B_d, \quad (1.4)$$

где

$$S_Q = \left\{ z \in B_d : 1 - \sigma(Q) \leq |z| \leq 1, \frac{z}{|z|} \in Q \right\}$$

— это стандартное окно Карлесона.

1.2. Обратные меры Карлесона. Отметим, что Д. Люкинг [7] исследовал меры Карлесона для пространств Бергмана в круге вместе с мерами, для которых выполнено соответствующее обратное неравенство. В случае нескольких комплексных переменных упомянем недавние смежные результаты А. Грина и Н. Вагнера [4] о доминирующих множествах для пространств Бергмана на весьма общих областях из \mathbb{C}^d .

В первой части настоящей работы исследуется обратное неравенство Карлесона

$$\|f\|_{H^p} \leq C \|f\|_{L^p(\overline{B}_d, \mu)}, \quad f \in C(\overline{B}_d) \cap H^p(B_d), \quad 1 < p < \infty, \quad (1.5)$$

для $\mu \in M_+(\overline{B}_d)$.

Отметим, что в сформулированной задаче предполагается, что мера μ задана на замкнутом шаре \overline{B}_d . На самом деле, для мер $\mu \in M_+(B_d)$ эта задача становится вырожденной и не имеет решений; см. сформулированную ниже теорему 1.

Заметим, что теорему о мерах Карлесона для $H^p(B_d)$ также можно формулировать при предположении $\mu \in M_+(\overline{B_d})$. Действительно, в этом случае условие (1.3) имеет смысл для функций f из множества $C(\overline{B_d}) \cap H^p(B_d)$, которое является плотным в $H^p(B_d)$. Из условия (1.4) следует, что сужение $\mu|_{\partial B_d}$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега σ и производная Радона–Никодима $d\mu|_{\partial B_d}/d\sigma$ ограничена.

Для $d = 1$ и меры $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$, удовлетворяющей условию (1.2), П. Лефевр, Д. Ли и др. [6] доказали, что свойство (1.5) эквивалентно условию

$$\mu(S_I) \geq C m(I) \quad \text{для всех дуг } I \subset \partial \mathbb{D}.$$

Далее, в работе [5] этот результат доказан для всех $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$, а также получены иные эквивалентные свойства.

Основной результат настоящей работы об обратных мерах Карлесона для пространств Харди $H^p(B_d)$ при $d \geq 1$ — это теорема 1, сформулированная в следующем разделе.

1.3. Обратные меры Карлесона для пространств Харди в шаре. Пусть $1 < p < \infty$. Для $w \in B_d$ рассмотрим ядра Коши

$$k_w(z) = \frac{1}{(1 - \langle z, w \rangle)^d}, \quad z \in B_d,$$

и соответствующие нормированные функции

$$K_w = \frac{k_w}{\|k_w\|_{H^p}}.$$

Предложение 1.4.10 из [8] гарантирует, что

$$\|k_w\|_p = (1 - |w|^2)^{-\frac{d}{q}}, \quad \text{где } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Для $d = 1$ следующий результат получен в работе [5].

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$ и $\mu \in M_+(\overline{B_d})$, $d \geq 1$. Тогда перечисленные ниже утверждения эквивалентны.

(i) Существует константа $C > 0$ такая, что

$$\int_{\overline{B_d}} |f|^p d\mu \geq C \|f\|_{H^p}^p \quad \text{для всех } f \in C(\overline{B_d}) \cap H^p.$$

(ii) Существует константа $C > 0$ такая, что

$$\int_{\overline{B_d}} |K_w|^p d\mu \geq C \quad \text{для всех } w \in B_d.$$

(iii) Существует константа $C > 0$ такая, что

$$\mu(Q) \geq C\sigma(Q) \quad \text{для всех неизотропных шаров } Q \subset \partial B_d.$$

Выше упоминалось, что задача об обратных мерах Карлесона для $H^p(B_d)$, $1 < p < \infty$, не имеет решений для мер μ , заданных на открытом единичном шаре B_d . Действительно, этот факт немедленно следует из свойства (iii) в теореме 1. Дальнейшие комментарии и доказательство теоремы 1 приведены в разделе 2.

1.4. Обратные меры Карлесона для пространств де Бранжа–Ровняка. Второй тип пространств, исследуемых в данной работе, — это пространства де Бранжа–Ровняка в шаре.

Пусть $b : B_d \rightarrow \mathbb{D}$ является голоморфной функцией. Непосредственная проверка показывает, что функция

$$\mathcal{K}^b(z, w) = \frac{1 - b(z)\overline{b(w)}}{(1 - \langle z, w \rangle)^d}, \quad z, w \in B_d,$$

имеет свойства воспроизводящего ядра. Обладающее воспроизводящим ядром $\mathcal{K}^b(z, w)$ гильбертово пространство $\mathcal{H}(b) \subset H^2$ называется пространством де Бранжа–Ровняка. Дальнейшие сведения об этих пространствах в круге приведены, например, в монографии [9].

С одной стороны, если $\|b\|_\infty < 1$, то пространство $\mathcal{H}(b)$ совпадает с H^2 , с точностью до эквивалентной нормы. С другой стороны, пространство $\mathcal{H}(b)$ имеет явный вид для внутренней функции b . Напомним, что голоморфная функция $I : B_d \rightarrow \mathbb{D}$ называется *внутренней*, если $|I(\zeta)| = 1$ для σ_d -почти всех $\zeta \in \partial B_d$. Здесь и далее $I(\zeta)$ обозначает, как обычно, предел $\lim_{r \rightarrow 1^-} I(r\zeta)$. Известно, что соответствующий предел существует σ_d -почти везде. Прямые вычисления воспроизводящего ядра для пространства $H^2 \ominus IH^2$ показывают, что $\mathcal{H}(b) = H^2 \ominus IH^2$. Если I — внутренняя функция в круге \mathbb{D} , то $H^2(\mathbb{D}) \ominus IH^2(\mathbb{D})$ — классическое модельное пространство.

Ряд результатов об обратных мерах Карлесона для пространств $\mathcal{H}(b)$ в круге получен в статье [2]. Для некоторых функций b в этой работе получены описания рассматриваемых мер и, в частности, показано, что обратное неравенство Карлесона достаточно проверять на соответствующих воспроизводящих ядрах. Для произвольных пространств $\mathcal{H}(b)$ в круге известно, что такой тезис о воспроизводящих ядрах не имеет места (см. [5]).

В заключительном разделе 3 настоящей работы аналог свойства (ii) из теоремы 1 используется при доказательстве свойств обратных мер Карлесона для пространств де Бранжа–Ровняка $\mathcal{H}(b)$ в единичном шаре. Результаты в этом направлении получены для не внутренних функций b и содержатся в теореме 2 и следствии 1, см. раздел 3.

Обозначения. Как обычно, $C > 0$ обозначает константу, значение которой может изменяться от строки к строке.

§2. ОБРАТНЫЕ МЕРЫ КАРЛЕСОНА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ

В данном разделе доказана теорема 1 и приведено еще одно описание исследуемых мер в терминах стандартных окон Карлесона S_Q , см. предложение 1 ниже.

2.1. Вспомогательные результаты. Для $0 < h \leq 1$ и неизотропного шара Q зададим h -окно Карлесона $S_{Q,h}$ с помощью равенства

$$S_{Q,h} = \left\{ z \in B_d : 1 - h \leq |z| \leq 1, \frac{z}{|z|} \in Q \right\}. \quad (2.1)$$

Пусть $\nu = \nu_d$ обозначает меру Лебега на пространстве \mathbb{C}^d .

Лемма 1. Пусть $Q \subset \partial B_d$ является неизотропным шаром. Для $0 < h \leq 1$ положим

$$\Phi_h(z) = \frac{1}{h} \int_{S_{Q,h}} \frac{(1 - |w|^2)^{pd-d}}{|1 - \langle z, w \rangle|^{pd}} d\nu(w), \quad z \in \bar{B}_d. \quad (2.2)$$

Тогда

- (a) $\Phi_h(z) \leq C$ для всех $z \in \bar{B}_d$ и $0 < h \leq 1$;
- (b) $\lim_{h \rightarrow 0} \Phi_h(z) = 0$ для всех $z \in \bar{B}_d \setminus Q$.

Доказательство. (а) Очевидно, что

$$\Phi_h(z) \leq \frac{1}{h} \int_{1-h \leq |w| \leq 1} \frac{(1 - |w|^2)^{pd-d}}{|1 - \langle z, w \rangle|^{pd}} d\nu(w), \quad z \in B_d.$$

Далее, интегрируя в полярных координатах, имеем

$$\begin{aligned} \Phi_h(z) &\leq C(d) \frac{1}{h} \int_{1-h}^1 (1 - r^2)^{pd-d} \int_{\partial B_d} \frac{d\sigma(\xi)}{|1 - r\langle z, \xi \rangle|^{pd}} dr \\ &\leq C(d) \frac{1}{h} \int_{1-h}^1 (1 - r^2)^{pd-d} (1 - r|z|)^{d-pd} dr \\ &\leq C(d) \frac{1}{h} \int_{1-h}^1 dr \leq C(d) \end{aligned}$$

в силу предложения 1.4.10 из монографии [8].

(б) Пусть $z \notin Q$. Тогда существует число $\delta = \delta(z) > 0$ такое, что $|1 - \langle z, w \rangle| \geq \delta$ для всех $w \in S_{Q,h}$, $0 < h \leq 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 \leq \Phi_h(z) &\leq \frac{1}{h} \int_{S_{Q,h}} \frac{(1 - |w|^2)^{pd-d}}{\delta^{pd}} d\nu(w) \\ &\leq C \frac{1}{h} \frac{\sigma(Q) h^{pd-d+1}}{\delta^{pd}} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Доказательство леммы завершено. \square

2.2. Доказательство теоремы 1. (i) \Rightarrow (ii) Эта импликация является тривиальной, так как $\|K_w\|_{H^p} = 1$, $w \in B_d$.

(ii) \Rightarrow (iii) Зафиксируем неизотропный шар $Q \subset \partial B_d$. Интегрируя оценку из условия (ii) по множеству

$$\tilde{S}_{Q,h} = \left\{ z \in B_d : 1 - h \leq |z| < 1, \frac{z}{|z|} \in Q \right\}, \quad 0 < h \leq 1,$$

относительно меры ν , имеем

$$\begin{aligned} C_{ii}|Q|h &\leq \int_{\tilde{S}_{Q,h}} \int_{\bar{B}_d} |K_w|^p d\mu d\nu(w) \\ &= \int_{\bar{B}_d} \int_{\tilde{S}_{Q,h}} \frac{(1-|w|^2)^{\frac{pd}{q}}}{|1-\langle z, w \rangle|^{pd}} d\nu(w) d\mu(z). \end{aligned}$$

Последнее выражение не изменяется при замене во внутреннем интеграле множества $\tilde{S}_{Q,h}$ на $S_{Q,h}$. Таким образом, полученная оценка имеет следующий вид в терминах функции Φ_h , заданной равенством (2.2):

$$\int_{\bar{B}_d} \Phi_h(z) d\mu(z) \geq C_{ii}\sigma(Q). \quad (2.3)$$

С одной стороны, свойства (a) и (b) из леммы 1 гарантируют, что

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{\bar{B}_d \setminus Q} \Phi_h(z) d\mu(z) = 0. \quad (2.4)$$

С другой стороны, в силу свойства (b) из леммы 1 имеем

$$\int_Q \Phi_h(z) d\mu(z) \leq C\mu(Q) \quad \text{для всех } h > 0. \quad (2.5)$$

Применяя свойства (2.3)–(2.5), получаем

$$C\mu(Q) \geq C_{ii}\sigma(Q),$$

что и требовалось доказать.

(iii) \Rightarrow (i) Рассмотрим разложение Лебега

$$\mu|_{\partial B_d} = g\sigma + \mu|_{\partial B_d}^s,$$

где $\mu|_{\partial B_d}^s \perp \sigma$ и $g \in L^1(\sigma)$ обозначает соответствующую производную Радона–Никодима. Теоремы 5.3.1 и 5.3.2 из монографии [8] гарантируют, что

$$g(\zeta) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\mu|_{\partial B_d}(Q(\zeta, \delta))}{\sigma(Q(\zeta, \delta))}$$

для σ -почти всех $\zeta \in \partial B_d$. Поэтому из условия (iii) следует, что $g \geq C > 0$ σ -почти везде. Таким образом,

$$\int_{\overline{B}_d} |f|^p d\mu \geq \int_{\partial B_d} |f|^p d\mu \geq C \int_{\partial B_d} |f|^p d\sigma = C \|f\|_{H^p}^p$$

для всех $f \in H^p \cap C(\overline{B}_d)$. Доказательство теоремы 1 завершено.

2.3. Комментарии и замечания.

Замечание 1. Эквивалентность свойств (i) и (ii) в теореме 1 означает, что для доказательства обратного неравенства Карлесона достаточно проверить это неравенство на воспроизводящих ядрах k_w , $w \in B_d$. Иными словами, тезис о воспроизводящих ядрах выполнен для задачи об обратных мерах Карлесона для H^p , $1 < p < \infty$.

Замечание 2. С одной стороны, условие (iii) гарантирует, что заданная на сфере ∂B_d мера Лебега σ абсолютно непрерывна относительно сужения $\mu|_{\partial B_d}$. С другой стороны, как показано при доказательстве теоремы 1, производная Радона–Никодима $d\mu|_{\partial B_d}^a/d\sigma$ отделена от нуля положительной константой. Здесь $\mu|_{\partial B_d}^a$ обозначает абсолютно непрерывную (относительно σ) часть меры $\mu|_{\partial B_d}$.

Следующее утверждение показывает, что условие (iii) из теоремы 1 эквивалентно своему аналогу в терминах множеств S_Q , используемых при описании классических мер Карлесона.

Предложение 1. *Эквивалентные свойства из теоремы 1 равносильны следующему условию: существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\mu(S_Q) \geq C\sigma(Q) \quad \text{для всех неизотропных шаров } Q \subset \partial B_d. \quad (2.6)$$

Доказательство. Очевидно, что свойство (iii) из теоремы 1 влечет (2.6). Для доказательства обратной импликации предположим, что выполнено свойство (2.6). Зафиксируем $\delta > 0$ и неизотропный шар $Q = Q(\zeta, \delta) \subset \partial B_d$ для некоторой точки $\zeta \in \partial B_d$. Для $0 < h < \delta$, выберем максимальное семейство попарно непересекающихся неизотропных шаров $Q_j = Q_j(\zeta_j, h) \subset 2Q$, $j = 1, \dots, J$. Отметим, что $Q \subset \cup_{1 \leq j \leq J} 2Q_j$. Так как h -окно $S_{Q_j, h}$ совпадает с множеством S_{Q_j}

для $j = 1, \dots, J$, то условие (iii) гарантирует, что

$$\begin{aligned} \mu(S_{2Q,h}) &\geq \mu \sum_{j=1}^J S_{Q_j,h} = \sum_{j=1}^J \mu(S_{Q_j,h}) \\ &\stackrel{(iii)}{\geq} C \sum_{j=1}^J \sigma(Q_j) = C(d) \sum_{j=1}^J \sigma(2Q_j) \\ &\geq C(d)\sigma(Q) = C(d)\sigma(2Q). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Если $Q \subset G \subset \bar{B}_d$ и множество G относительно открыто в \bar{B}_d , то $G \supset S_{Q,h}$ для достаточно малого параметра $h > 0$. Поэтому в силу формулы (2.7) для Q вместо $2Q$ и внешней регулярности рассматриваемой меры $\mu \in M_+(\bar{B}_d)$ имеем

$$\begin{aligned} \mu(Q) &= \inf\{\mu(G) : Q \subset G, \text{ множество } G \text{ открыто в } \bar{B}_d\} \\ &\geq \inf_{h>0} \mu(S_{Q,h}) \geq C(d)\sigma(Q), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

§3. ОБРАТНЫЕ МЕРЫ КАРЛЕСОНА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ДЕ БРАНЖА–РОВНЯКА

В свойстве (1.5), определяющем обратную меру Карлесона μ для $H^p(B_d)$, норма $\|f\|_{L^p(\bar{B}_d,\mu)}$ вычисляется только для $f \in H^p(B_d) \cap C(\bar{B}_d)$. Для пространств $\mathcal{H}(b)$ будет использован иной подход, основанный на следующем понятии.

Определение 1. Пусть $\mu \in M_+(\bar{B}_d)$. Функция $f \in \mathcal{H}ol(B_d)$ называется μ -допустимой, если f имеет радиальные пределы μ -почти везде на сфере ∂B_d . Для голоморфной функции $b : B_d \rightarrow \mathbb{D}$ множество всех μ -допустимых функций из пространства $\mathcal{H}(b)$ обозначается символом $\mathcal{H}_\mu(b)$.

Предположим теперь, что $f \in \mathcal{H}_\mu(b)$. На носителе меры $\mu|_{\partial B_d}$ функция f задается с помощью радиальных пределов. В результате величина $\|f\|_{L^2(\bar{B}_d,\mu)}$ принимает значение в бесконечном интервале $[0, +\infty]$.

Определение 2. Пусть функция $b : B_d \rightarrow \mathbb{D}$ является голоморфной. Мера $\mu \in M_+(\bar{B}_d)$ называется обратной мерой Карлесона для пространства $\mathcal{H}(b)$, если

$$\|f\|_{\mathcal{H}(b)} \leq C \|f\|_{L^2(\bar{B}_d,\mu)}$$

для всех $f \in \mathcal{H}_\mu(b)$.

Основной результат данного раздела — следующая теорема о свойствах обратных мер Карлесона. Для $d = 1$ этот результат был доказан в работе [2].

Теорема 2. Пусть $\mu \in M_+(\overline{B}_d)$ и $b : B_d \rightarrow \mathbb{D}$ — μ -допустимая голоморфная функция. Положим

$$g = \frac{d\mu|_{\partial B_d}}{d\sigma}.$$

Предположим, что μ является обратной мерой Карлесона для пространства $\mathcal{H}(b)$. Тогда

$$1 - |b(\zeta)|^2 \leq C(1 - |b(\zeta)|^2)^2 g(\zeta) \quad (3.1)$$

для σ_d -почти всех точек $\zeta \in \partial B_d$ и универсальной константы $C > 0$.

С одной стороны, при $|b(\zeta)| = 1$ условие (3.1) не накладывает никаких ограничений на точку ζ . В частности, это условие полностью вырождается для внутренней функции b . С другой стороны, условие (3.1) естественным образом упрощается при $|b(\zeta)| < 1$ и дает следующую явную информацию.

Следствие 1. Пусть $\mu \in M_+(\overline{B}_d)$ и $b : B_d \rightarrow \mathbb{D}$ — μ -допустимая голоморфная функция, которая не является внутренней. Предположим, что μ — обратная мера Карлесона для пространства $\mathcal{H}(b)$. Тогда

$$\frac{d\mu|_{\partial B_d}}{d\sigma} \neq \mathbf{0}$$

и

$$\int_{\{\zeta \in \partial B_d : |b(\zeta)| < 1\}} \frac{1}{1 - |b|} d\sigma < \infty. \quad (3.2)$$

Доказательство. Во-первых, в силу теоремы 2 имеет место неравенство (3.1), которое гарантирует, что $g \neq \mathbf{0}$, так как функция b не является внутренней. Во-вторых, из свойства (3.1) следует, что

$$\frac{1}{1 - |b(\xi)|} \leq Cg(\xi)$$

для σ -почти всех $\xi \in \{\zeta \in \partial B_d : |b(\zeta)| < 1\}$. Так как $g \in L^1(\partial B_d, \sigma)$, то получаем искомое свойство (3.2). \square

Отметим, что свойство (3.2) накладывает ограничение на функции b такие, что множество обратных мер Карлесона для пространства $\mathcal{H}(b)$ не является пустым.

Следствие 2. *Существует голоморфная функция $b : B_d \rightarrow \mathbb{D}$, обладающая следующим свойством: если $\mu \in M_+(\overline{B}_d)$ и b является μ -допустимой, то μ не является обратной мерой Карлесона для пространства $\mathcal{H}(b)$.*

Доказательство. Выберем положительную функцию $\psi \in C(\partial B_d)$ такую, что $\psi(\zeta_0) = 1$, $0 < \psi(\zeta) < 1$ для $\zeta \in \partial B_d \setminus \{\zeta_0\}$ и

$$\int_{\partial B_d} \frac{1}{1 - \psi} d\sigma = \infty.$$

В силу следствия 2 из работы [1] существует голоморфная функция $b : B_d \rightarrow \mathbb{D}$ такая, что $|b| = \psi$ σ -почти везде на сфере ∂B_d . Таким образом, если $\mu \in M_+(\overline{B}_d)$ и функция b является μ -допустимой, то условие (3.2) не выполнено. Поэтому μ не является обратной мерой Карлесона для $\mathcal{H}(b)$ в силу следствия 1. \square

Далее, следствие 1 дает отрицательную информацию о последовательностях семплинга для $\mathcal{H}(b)$. Напомним, что последовательность $\{w_j\}_{j=1}^\infty \subset B_d$ называется последовательностью семплинга для $\mathcal{H}(b)$, если существуют константы $C_2 \geq C_1 > 0$ такие, что

$$C_1 \|f\|_{\mathcal{H}(b)}^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|f(w_j)|^2}{\|\mathcal{K}_{w_j}\|_{\mathcal{H}(b)}^2} \leq C_2 \|f\|_{\mathcal{H}(b)}^2$$

для всех $f \in \mathcal{H}(b)$. Для $d = 1$ следующее утверждение доказано в работе [2].

Следствие 3. *Пусть голоморфная функция $b : B_d \rightarrow \mathbb{D}$ не является внутренней. Тогда не существует последовательности семплинга для пространства $\mathcal{H}(b)$.*

Доказательство. Предположим, что $\{w_j\}_{j=1}^\infty \subset B_d$ является последовательностью семплинга для $\mathcal{H}(b)$. Тогда

$$\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_{w_j}}{\|\mathcal{K}_{w_j}\|_{\mathcal{H}(b)}^2}$$

является обратной мерой Карлесона для $\mathcal{H}(b)$. Это противоречит следствию 1, так как $d\mu|_{\partial B_d}/d\sigma = \mathbf{0}$. \square

Теперь обратимся к доказательству теоремы 2.

3.1. Вспомогательные результаты. Напомним, что для голоморфной функции $F : B_d \rightarrow \mathbb{D}$ граничная функция $F(\xi)$ определена для σ -почти всех $\xi \in \partial B_d$ в смысле радиальных пределов. Следующее утверждение уточняет лемму 1 при $p = 2$.

Лемма 2. Пусть $Q \subset \partial B_d$ — неизотропный шар и $F : B_d \rightarrow \mathbb{D}$ — голоморфная функция. Тогда предел

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_Q |F(r\xi)| \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z, r\xi \rangle|^{2d}} d\sigma(\xi)$$

- (a) равен нулю для $z \in \overline{B_d} \setminus Q$,
- (b) равен $|F(z)|$ для σ -почти всех z из внутренней области множества Q .

Доказательство. (a) Так как F — ограниченная функция, то достаточно применить часть (b) леммы 1 для $p = 2$.

(b) Пусть $\zeta \in \partial B_d$. Отметим, что

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\partial B_d \setminus \tilde{Q}(\zeta, \tau)} \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle \zeta, r\xi \rangle|^{2d}} d\sigma(\xi) = 0,$$

где $\tilde{Q}(\zeta, \tau) \subset \partial B_d$ — это неизотропный шар. Поэтому для доказательства свойства (b) достаточно проверить, что

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\partial B_d} |F(r\xi)| \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle \zeta, r\xi \rangle|^{2d}} d\sigma(\xi) = |F(\zeta)| \tag{3.3}$$

для σ -почти всех точек $\zeta \in \partial B_d$.

Для доказательства свойства (3.3) теперь предположим, что $\zeta \in \partial B_d$ является точкой Лебега для функции $F(\xi)$, т.е.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int_{\tilde{Q}(\zeta, \tau)} |F(\xi) - F(\zeta)| d\sigma(\xi) = 0. \tag{3.4}$$

Рассмотрим интеграл Пуассона

$$u(w) = \int_{\partial B_d} |F(\xi) - F(\zeta)| \frac{(1-|w|^2)^d}{|1-\langle w, \xi \rangle|^{2d}} d\sigma(\xi), \quad w \in B_d.$$

Отметим, что $\lim_{r \rightarrow 1^-} u(r\zeta) = 0$ в силу равенства (3.4) и теоремы 5.4.8 из [8].

Функция $|F(w) - F(\zeta)|$, $w \in B_d$, является плюрисубгармонической, следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{r \rightarrow 1^-} \int_{\partial B_d} |F(r\xi) - F(\zeta)| \frac{(1-r^2)^d}{|1 - \langle \zeta, r\xi \rangle|^{2d}} d\sigma(\xi) \\ &\leq \limsup_{r \rightarrow 1^-} \int_{\partial B_d} u(r\xi) \frac{(1-r^2)^d}{|1 - \langle r\zeta, \xi \rangle|^{2d}} d\sigma(\xi) = \limsup_{r \rightarrow 1^-} u(r^2\zeta) = 0. \end{aligned}$$

Имеем $\|F(r\xi) - F(\zeta)\| \leq |F(r\xi) - F(\zeta)|$, поэтому полученная оценка гарантирует искомое свойство (3.3) в рассматриваемой точке $\zeta \in \partial B_d$. Для завершения рассуждения остается напомнить, что свойство (3.4) имеет место для σ -почти всех $\zeta \in \partial B_d$. \square

3.2. Доказательство теоремы 2. Функция \mathcal{K}_w^b , $w \in B_d$, является μ -допустимой, так как b — это μ -допустимая функция по условию теоремы. Следовательно, по определению обратной меры Карлесона имеем

$$\|\mathcal{K}_w^b\|_{\mathcal{H}(b)}^2 \leq C \|\mathcal{K}_w^b\|_{L^2(\mu)}^2$$

для всех $w \in B_d$. Переписывая это неравенство в явных терминах, получаем

$$\frac{1 - |b(w)|^2}{(1 - |w|^2)^d} \leq C \int_{\overline{B}_d} \left| \frac{1 - b(z)\overline{b(w)}}{(1 - \langle z, w \rangle)^d} \right|^2 d\mu(z). \quad (3.5)$$

Рассмотрим разложение Лебега

$$\mu|_{\partial B_d} = g\sigma_d + \eta,$$

где $\eta \perp \mu|_{\partial B_d}$ и g обозначает производную Радона-Никодема $\frac{d\mu|_{\partial B_d}}{d\sigma_d}$. Положим

$$\rho := \mu|_{B_d} = \mu - g\sigma - \eta.$$

В этих терминах оценка (3.5) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 C(1 - |b(w)|^2) &\leq \int_{B_d} \frac{(1 - |w|^2)^d}{|1 - \langle z, w \rangle|^{2d}} |1 - b(z)\overline{b(w)}|^2 d\rho(z) \\
 &+ \int_{\partial B_d} \frac{(1 - |w|^2)^d}{|1 - \langle z, w \rangle|^{2d}} |1 - b(z)\overline{b(w)}|^2 d\eta(z) \\
 &+ \int_{\partial B_d} \frac{(1 - |w|^2)^d}{|1 - \langle z, w \rangle|^{2d}} |1 - b(z)\overline{b(w)}|^2 g(z) d\sigma_d(z) \\
 &:= J_1 + J_2 + J_3.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Теперь выберем точку $\zeta \in \partial B_d$ и рассмотрим неизотропный шар $Q = (\zeta, \tau) \subset \partial B_d$, $\tau > 0$. Напомним, что h -окно Карлесона $S_{Q,h}$ для $0 < h \leq 1$ задается с помощью равенства

$$S_{Q,h} = \left\{ z \in B_d : 1 - h \leq |z| \leq 1, \frac{z}{|z|} \in Q \right\}.$$

Проинтегрируем обе части неравенства (3.6) по множеству $S_{Q,h}$ относительно объёмной меры Лебега ν , разделим на h и исследуем поведение полученных выражений при $h \rightarrow 0+$.

Во-первых, для указанного интеграла от левой части неравенства (3.6) после интегрирования в полярных координатах имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{C}{h} \int_{S_{Q,h}} (1 - |b(w)|^2) d\nu(w) &= \frac{C(d)}{h} \int_{1-h}^1 \int_Q (1 - |b(r\xi)|^2) d\sigma(\xi) r^{2d-1} dr \\
 &\rightarrow C(d) \int_Q (1 - |b(\xi)|^2) d\sigma(\xi)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

при $h \rightarrow 0$.

Во-вторых, применяя теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned}
 &\frac{C(d)}{h} \int_{S_{Q,h}} J_1(w) d\nu(w) \\
 &= \int_{B_d} \frac{1}{h} \int_{1-h}^1 \int_Q \frac{(1 - r^2)^d}{|1 - \langle z, r\xi \rangle|^{2d}} |1 - b(z)\overline{b(r\xi)}|^2 d\sigma(\xi) r^{2d-1} dr d\rho(z).
 \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \int_Q \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z, r\xi \rangle|^{2d}} |1-b(z)\overline{b(r\xi)}|^2 d\sigma(\xi) \\ & \leq C \int_Q \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z, r\xi \rangle|^{2d}} d\sigma(\xi) \leq C \end{aligned} \quad (3.8)$$

для всех $z \in \overline{B_d}$, а также

$$\frac{1}{h} \int_{1-h}^1 \int_Q \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z, r\xi \rangle|^{2d}} d\sigma(\xi) r^{2d-1} dr \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{для всех } z \in B_d$$

в силу части (а) леммы 2, использованной для $F \equiv 1$. Таким образом,

$$\frac{1}{h} \int_{S_{Q,h}} J_1(w) d\nu(w) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (3.9)$$

Далее,

$$\frac{1}{h} \int_{1-h}^1 \int_Q \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z, r\xi \rangle|^{2d}} d\sigma(\xi) r^{2d-1} dr \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{для всех } z \in \partial B_d \setminus Q$$

в силу части (а) леммы 2, использованной для $F \equiv 1$. Поэтому, применяя теорему Фубини и свойство (3.8), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{C(d)}{h} \int_{S_{Q,h}} J_2(w) d\nu(w) \\ & = \int_{\partial B_d} \frac{1}{h} \int_{1-h}^1 \int_Q \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z, r\xi \rangle|^{2d}} |1-b(z)\overline{b(r\xi)}|^2 d\sigma(\xi) r^{2d-1} dr d\eta(z) \quad (3.10) \\ & \leq \int_Q d\eta + \varepsilon(h), \end{aligned}$$

где $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Наконец, после применения теоремы Фубини имеем

$$\begin{aligned} & \frac{C(d)}{h} \int_{S_{Q,h}} J_3(w) d\nu(w) \\ &= \int_{\partial B_d} \frac{1}{h} \int_{1-h}^1 \int_Q \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z, r\xi \rangle|^{2d}} |1-b(r\xi)\overline{b(z)}|^2 d\sigma(\xi) r^{2d-1} dr g(z) d\sigma(z). \end{aligned}$$

Применяя лемму 2 для $F(w) = (1-b(w)\overline{b(\zeta)})^2$, получаем

$$C \geq \int_Q \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z, r\xi \rangle|^{2d}} |1-b(r\xi)\overline{b(z)}|^2 d\sigma(\xi) \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} (1-|b(z)|^2)^2 \chi_Q(z)$$

для σ -почти всех $z \in \partial B_d$. Таким образом,

$$\frac{1}{h} \int_{S(Q,h)} J_3(w) d\nu(w) \rightarrow \int_Q (1-|b|^2)^2 g d\sigma \quad (3.11)$$

при $h \rightarrow 0$.

Напомним, что $Q = Q(\zeta, \tau)$. Итак, объединяя свойства (3.7) и (3.9)–(3.11), получаем

$$\int_{Q(\zeta,\tau)} (1-|b|^2) d\sigma \leq C \int_{Q(\zeta,\tau)} (1-|b|^2)^2 g d\sigma + C \int_{Q(\zeta,\tau)} d\eta$$

для всех $\zeta \in \partial B_d$.

Теперь разделим обе части последней оценки на $\sigma(Q(\zeta, \tau))$ и устремим τ к нулю. Так как η — сингулярная мера, то теорема 5.3.2 из монографии [8] гарантирует, что

$$\frac{1}{\sigma(Q(\zeta, \tau))} \int_{Q(\zeta,\tau)} d\eta \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$$

для σ -почти всех $\zeta \in \partial B_d$. Таким образом, искомое неравенство (3.1) имеет место для σ -почти всех $\zeta \in \partial B_d$ в силу теоремы о дифференцировании мер на сфере ∂B_d (см. [8, теорема 5.3.1]). Доказательство теоремы 2 завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Б. Александров, *Существование внутренних функций в шаре*. — Матем. сб. **118(160)**, No. 2(6) (1982), 147–163.
2. A. Blandignères, E. Fracain, F. Gaunard, A. Hartmann, W. T. Ross, *Direct and reverse Carleson measures for $\mathcal{H}(b)$ spaces*. — Indiana Univ. Math. J. **64**, No. 4 (2015), 1027–1057.
3. L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions*. — Amer. J. Math. **80** (1958), 921–930.
4. A. W. Green, N. A. Wagner, *Dominating sets in Bergman spaces on strongly pseudoconvex domains*, Constr. Approx. (2023), <https://doi.org/10.1007/s00365-023-09639-z>.
5. A. Hartmann, X. Massaneda, A. Nicolau, J. Ortega-Cerdà, *Reverse Carleson measures in Hardy spaces*. — Collect. Math. **65**, No. 3 (2014), 357–365.
6. P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, *Some revisited results about composition operators on Hardy spaces*. — Rev. Mat. Iberoam. **28**, No. 1 (2012), 57–76.
7. D. H. Luecking, *Forward and reverse Carleson inequalities for functions in Bergman spaces and their derivatives*. — Amer. J. Math. **107**, No. 1 (1985), 85–111.
8. W. Rudin, *Function theory in the unit ball of \mathbb{C}^n* , Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 241, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.
9. D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*, University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences, Vol. 10, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994, A Wiley-Interscience Publication.
10. K. Zhu, *Spaces of holomorphic functions in the unit ball*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 226, Springer-Verlag, New York, 2005.

Dubtsov E. S. Reverse Carleson measures for Hardy spaces in the unit ball.

Let $H^p = H^p(B_d)$ denote the Hardy space in the open unit ball B_d of \mathbb{C}^d , $d \geq 1$. We characterize the reverse Carleson measures for H^p , $1 < p < \infty$, that is, we describe all finite positive Borel measures μ defined on the closed ball \overline{B}_d and such that

$$\|f\|_{H^p} \leq c \|f\|_{L^p(\overline{B}_d, \mu)}$$

for all $f \in H^p(B_d) \cap C(\overline{B}_d)$ and a universal constant $c > 0$. Given a noninner holomorphic function $b : B_d \rightarrow B_1$, we obtain properties of the reverse Carleson measures for the de Branges–Rovnyak space $\mathcal{H}(b)$.

С.-Петербургский
государственный университет,
и С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dubtsov@pdmi.ras.ru

Поступило 23 сентября 2023 г.