Л. И. Пугач, О гомологической размерности банаховых алгебр гладких функций, *УМН*, 1982, том 37, выпуск 4, 175–176

О ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Л. И. Пугач

В настоящей заметке вычисляется малая глобальная размерность (введенная А. Я. Хелемским в работе [1]) указанных в заглавии алгебр. Эта характеристика, тесно связанная с группами когомологий банаховых алгебр (а следовательно, и со свойствами их расширений, дифференцирований и возмущений), вычислена или оценена для многих традиционных классов коммутативных банаховых алгебр (к. б. а.): так, она равна единице для алгебры всех непрерывных функций на метризуемом бикомпакте и конечна для некоторых алгебр аналитических функций (см. [1], [2]). Однако не было известно, какова она для занимающих промежуточное по составу элементов положение банаховых алгебр непрерывно дифференцируемых функций.

Ниже приводится неравенство для норм некоторых элементов идеалов конечной гомологической размерности в коммутативных банаховых алгебрах, с помощью которого оценивается снизу (и оказывается бесконечной) малая глобальная размерность алгебр непрерывно дифференцируемых функций и алгебр последовательностей с весами. Таким образом, банаховы алгебры гладких функций «гомологически плохо устроены», в отличие от алгебр Фреше бесконечно дифференцируемых функций [3].

Напомним, что пространство максимальных идеалов M_A к. б. а. A естественно вкладывается в сопряженное пространство A^*. Поэтому для $t \in M_A$ и замкнутого подпространства $I \subset A$ определена норма $\| t \|_I$ сужения функционала t на подпространство I.

Теорема 1. *Пусть A — к. б. а. с единицей, I — замкнутый идеал в A, обладающий аппроксимативной единицей, M — содержащий его максимальный идеал. Если гомологическая размерность A-модуля I равна n, то существует $C > 0$ такое, что для любых $a_i \in I$, $s_i \in M_A$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$*

$$(*)\qquad |\det(a_i(s_j))| \leqslant$$
$$\leqslant C \| a_0 \| \ldots \| a_n \| \, \| s_0 \|_I \| s_1 \|_M \ldots \| s_{n-1} \|_M \| s_n \|_I (\| s_0 \|_M + \ldots + \| s_n \|_M).$$

Ограничимся наброском доказательства: из условия следует, что стандартная проективная резольвента (см. [1]) A-модуля I расщепима в n-м члене. Норма расщепляющего морфизма оценивается на элементах стандартного вида (альтернированных суммах элементарных тензоров), при этом используется мультипликативность функционалов s_i — так получается искомое неравенство. Покажем, какие результаты дает оно в применении к упомянутым алгебрам (отметим, что содержательные утверждения могут возникнуть лишь для идеалов с неограниченными аппроксимативными единицами). Малую глобальную размерность алгебры A обозначаем $\operatorname{ds} A$.

1. Пусть $A = C^1[0, 1]$ — алгебра непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ комплекснозначных функций с нормой $\| f \| = \max | f(t) | + \max | f'(t) |$ (максимум по $\in [0, 1]$). Обозначим через M максимальный идеал в A, соответствующий точке 0, через $I = M^2$ — его топологический квадрат. Как известно (см. [4], с. 230), M обладает аппроксимативной единицей и имеет коразмерность 2 в A. Нам потребуется

Предложение 1. *Для $x \in [0, 1]$ $x/2 \leqslant \| x \|_I \leqslant \| x \|_M \leqslant x$.*

Доказательство. Если $a \in M$, то $| a(x) | = | xa'(\eta) | \leqslant x \| a \|$, откуда следует правое неравенство. Для $\delta > 0$ рассмотрим функцию $a(t) = t^{1+\delta}$. Очевидно, $a \in I$ и $\| a \| = 2 + \delta$. Следовательно, $\| x \|_I \geqslant | a(x) | \, \| a \|^{-1} = x^{1+\delta} (2 + \delta)^{-1}$. Ввиду произвольности δ левое неравенство доказано. Среднее неравенство очевидно.

Следствие. *Для $0 \leqslant x < y \leqslant 1$ существует функция $R_{x, y} \in I$, равная нулю на отрезке $[0, x]$ и единице в точке y, причем $\| R_{x, y} \| \leqslant 3(y - x)^{-1}$.*

Действительно, из предложения 1 следует существование функции $b \in I$ такой, что $\| b \| = 1$, $| b(y - x) | > (y - x)/2 - \varepsilon > (y - x)/3$. Положим $R_{x, y}(t) = 0$ на отрезке $[0, x]$ и $R_{x, y}(t) = b(t - x)/b(y - x)$ для $t \in [x, 1]$.

Теорема 2. $\operatorname{ds} C^1[0, 1] = \infty$.

Доказательство. В противном случае для некоторого $n \in \mathbb{N}$ гомологическая размерность конечномерного A-модуля A/I равна n, а тогда сам I имеет гомологическую размерность $n-1$ ([1], лемма 2.4). Зафиксируем $\sigma \in (0, 1/n)$ и положим для $1 \leqslant k \leqslant n$ $x_k = k\sigma$, $a_k = R^{(k-1)\sigma, k\sigma}$. Применим неравенство (*) к точкам $x_k \in [0, 1]$ и функциям $a_k \in I$. Заметим, что матрица $(a_i(s_j))$ треугольная с единицами на диагонали. Ввиду предложения 1 и следствия из него неравенство примет вид $1 \leqslant C(3/\sigma)^n n! \sigma^n(\sigma + 2\sigma + \ldots + n\sigma)$, откуда $1 \leqslant D\sigma$ для некоторой константы D. Но это противоречит произвольности σ.

Замечания. А) В применении к алгебре $C^k[0, 1]$ $(k > 1)$ наш метод дает лишь оценку $\operatorname{ds} C^k[0, 1] > \sqrt{2k}$ ввиду отсутствия аналога предложения 1 и следствия. Б) Результаты сохраняются для алгебр $C^k(U)$, где U — замкнутая область в $\mathbb{R}^n$.

2. Пусть дана последовательность чисел $\alpha_n \geqslant 1$. Рассмотрим банахову алгебру $B = \{c = (c_n),\ c_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_n c_n \to 0\ (n \to \infty)$ с нормой $\| c \| = \sup\{\alpha_n \mid c_n \mid,\ n \in \mathbb{N}\}$. Через A обозначим результат присоединения единицы к B.

Предложение 2. *Если* $\sup\{\alpha_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \infty$, *то* $\operatorname{ds} A = \infty$.

Доказательство. В противном случае A-модуль B имеет гомологическую размерность $m-1$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда для $I = M = B$ выполнены все предположения теоремы 1. Применим неравенство (*) к точкам $t_i \in M_B$ и их индикаторам $e_i \in B$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Получим

$$1 \leqslant C \| e_1 \| \ldots \| e_m \| \, \| t_1 \| \ldots \| t_m \| (\| t_1 \| + \ldots + \| t_m \|).$$

Но, как легко видеть, в алгебре B $\| e_t \| \, \| t \| = 1$ для $t \in M_B$. Следовательно, $1 \leqslant C(\| t_1 \| + \ldots + \| t_m \|)$. Но это противоречит тому, что $\inf\{\| t \|,\ t \in M_B\} = \inf\{\alpha_n^{-1}, n \in \mathbb{N}\} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хелемский О гомологической размерности нормированных модулей над банаховыми алгебрами.— Матем. сб. 1970, 81 : 3, с. 430—444.
[2] А. Я. Хелемский. О гомологической размерности банаховых алгебр аналитических функций.— Матем. сб. 1970, 83 : 2, с. 222—233.
[3] J. L. Taylor. Homology and cohomology for topological algebras.— Adv. in Math., 1972, 9, p. 137—182.
[4] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. Коммутативные нормированные кольца.— М.: Физматгиз, 1960.

Московский государственный университет

Поступило в Правление общества 25 февраля 1981 г.