Н. М. Гулевич, О существовании неподвижных точек нерастягивающих отображений, удовлетворяющих условию Роте, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1982, том 122, 5–12

Н.М.Гулевич

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК НЕРАСТЯГИВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ РОТЕ.

I. Обозначения и определения.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ банахово пространство, $\mathcal{D}$ его подмножество. Отображение $f: \mathcal{D} \to X$ называется нерастягивающим, если $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$ для всех x и y из $\mathcal{D}$.

Пусть M и N подмножества пространства $(X, \|\cdot\|)$. Множество M называется чебышевским для множества N, если для любого элемента x из N найдется единственный элемент Px из M такой, что $\|x - Px\| = d(x, M)$, где $d(x,M)$ – расстояние от точки x до множества M. Если $x \in N \cap M$, то $Px = x$. Отображение $P: N \to M$, которое каждому x из N сопоставляет ближайший элемент Px из M, называется метрической проекцией множества N на множество M.

Отображение $g: X \to X$ называется продолжением нерастягивающего отображения $f: \mathcal{D} \to X$ только тогда, когда g также нерастягивающее.

Пусть X_1 подпространство пространства X и B подмножество X_1, тогда границу множества B в X_1 обозначим через $\partial_{X_1} B$. Если $X_1 = X$, то вместо $\partial_X B$ будем писать ∂B.

Обозначим через I – тождественное отображение.

2. Исследуемая ситуация.

Пусть $(H, (\cdot,\cdot))$ гильбертово пространство, $\mathcal{D}$ его подмножество и $f: \mathcal{D} \to H$ нерастягивающее отображение. Пусть A непустое ограниченное и замкнутое подмножество H такое, что его замкнутая выпуклая оболочка $\overline{co}\, A$ содержится в $\mathcal{D}$.

Ставится задача: найти условия, при которых отображение f имеет неподвижную точку в замкнутой выпуклой оболочке множества A.

Будет показано, что таким условием является условие Роте: $f(\partial A)$ содержится в A.

Дальше, главным образом будем иметь дело с гильбертовым пространством H.

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА I (основная теорема). Пусть $f: \mathcal{D} \to H$ нерастягивающее отображение и A непустое ограниченное и замкнутое подмножество пространства H такое, что $\overline{co}\, A$ содержится в $\mathcal{D}$.

Если $f(\partial A)$ содержится в A, то отображение f имеет неподвижную точку в $\overline{co}\,A$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f:\mathfrak{D}\longrightarrow H$ нерастягивающее отображение, $g:H\longrightarrow H$ его продолжение и $f(\partial\mathfrak{D})$ содержится в $\mathfrak{D}$.

Если существует такой элемент x из H, что множество $\{g^n(x): n\in Z^+\}$ ограничено и $\mathfrak{D}$ является чебышевским множеством для множества $\overline{co}(\{g^n(x): n\in Z^+\})$, то отображение f имеет неподвижную точку в $\mathfrak{D}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $h: H\longrightarrow H$ нерастягивающее отображение и пусть существует такое непустое ограниченное и замкнутое подмножество A пространства H, что $h(\partial A)$ содержится в A. Тогда отображение h имеет неподвижную точку.

4. Доказательства основных результатов.

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. Пусть $(X,\|\cdot\|)$ банахово пространство, $\mathfrak{D}$ его подмножество и $f:\mathfrak{D}\longrightarrow X$ нерастягивающее отображение. Пусть замкнутое множество A содержится в $\mathfrak{D}$. Тогда для того, чтобы $f(\partial A)$ содержалось в A необходимо, а если замыкание множества $\mathfrak{D}\setminus A$ содержит ∂A, то и достаточно, чтобы для всех элементов x из $\mathfrak{D}\setminus A$ выполнялось неравенство $d(f(x),A)\leqslant d(x,A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть $f(\partial A)\subset A$. Тогда для всякого элемента x из $\mathfrak{D}\setminus A$ выполнено неравенство $d(f(x),A)\leqslant d(f(x),f(\partial A))$. Далее $d(f(x),f(\partial A))=\inf\limits_{y\in\partial A}\|f(x)-f(y)\|$; но $\|f(x)-f(y)\|\leqslant\|x-y\|$ для всех x и y из $\mathfrak{D}$, поэтому $\inf\limits_{y\in\partial A}\|f(x)-f(y)\|\leqslant\inf\limits_{y\in\partial A}\|x-y\|$. Наконец, поскольку $x\notin A$, $\inf\limits_{y\in\partial A}\|x-y\|=\inf\limits_{y\in A}\|x-y\|$.

Пусть, с другой стороны, x_0 произвольный элемент из ∂A. Тогда существует последовательность $\{x_n: n\in Z^+\}$ элементов множества $\mathfrak{D}\setminus A$, сходящаяся к x_0. Так как $d(f(x_n),A)\leqslant d(x_n,A)$ и $d(x_n,x_0)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, элемент $f(x_0)\in A$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Пусть $B=\overline{co}\,A$. Известно, что всякое выпуклое и замкнутое подмножество гильбертова пространства H является чебышевским для H. Рассмотрим метрическую проекцию $P:H\longrightarrow B$. Отображение P является нерастягивающим (смотрите, например, [8]). Тогда отображение $Pf:\mathfrak{D}\longrightarrow B$ является нерастягивающим, как суперпозиция двух нерастягивающих отображений. Кроме того $Pf(B)$ содержится в B. Следовательно, по теореме Браудера-Геде-Кирка [2, 5, 9] отображение Pf имеет неподвижную точку x_0 в B. Покажем, что x_0 является неподвижной точкой отображения f.

Если $f(x_0)\in B$, то $Pf(x_0)=P(f(x_0))=f(x_0)$. Следовательно, $f(x_0)=x_0$.

Докажем теперь, что случай $f(x_0)\notin B$ не может иметь места.

Пусть $x_0\in A$. Так как $x_0=P(f(x_0))$ и $f(x_0)\notin B, x_0\in\partial B$. Следовательно $x_0\in\partial A$; но тогда $f(x_0)\in A$ и тем более $f(x_0)\in B$. Получили противоречие.

Пусть теперь $x_0\notin A$. Так как $f(x_0)\notin B$, $x_0\in\partial B$. Проведем через точку x_0 гиперплоскость $\mathcal{L}$ так, чтобы вектор $x_0-f(x_0)$ был ортогонален $\mathcal{L}$. Гиперплоскость $\mathcal{L}$ разбивает пространство H на два полупространства. Обозначим через H_1, то замкнутое полупространство, которое содержит множество B и не содержит $f(x_0)$. Очевидно, B целиком лежит в H_1, так как иначе x_0 не была бы ближайшей точкой из B к элементу $f(x_0)$.

Пусть $B(x_0,r)$ – открытый шар с центром в точке x_0 и радиусом $r=d(x_0,A)$. Тогда справедливо включение $A\subset H_1\setminus B(x_0,r)$. Следовательно $d(f(x_0),A)\geq d(f(x_0),H_1\setminus B(x_0,r))$. Так как вектор $x_0-f(x_0)$ ортогонален гиперплоскости $\mathcal{L}$, $d^2(f(x_0),H_1\setminus B(x_0,r))=$ $=\|x_0-f(x_0)\|^2+r^2=\|x_0-f(x_0)\|^2+d^2(x_0,A)$. Таким образом $d^2(f(x_0),A)\geq\|x_0-f(x_0)\|^2+d^2(x_0,A)$. Но с другой стороны, по лемме, для $x_0\notin A$ выполняется неравенство $d(f(x_0),A)\leq$ $\leq d(x_0,A)$. В итоге получили, что $d^2(x_0,A)\geq\|x_0-f(x_0)\|^2+d^2(x_0,A)$. Последнее неравенство возможно только при условии, что $f(x_0)=x_0$. Но это противоречит тому, что $f(x_0)\notin B$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $A=\{g^n(x): n\in Z^+\}$. Тогда $g(A)$ содержится в A. Так как отображение g непрерывно, $g(\bar{A})\subset\bar{A}$. Здесь $\bar{A}$ – замыкание множества A. К отображению g и ограниченному множеству $\bar{A}$ применима теорема I. Следовательно g имеет в $\overline{co}(\bar{A})$ неподвижную точку x_0. Очевидно, что $\overline{co}(\bar{A})=\overline{co}\,A$. Пусть $P:\overline{co}\,A\longrightarrow\mathcal{D}$ метрическая проекция. Докажем, что точка Px_0 является неподвижной для отображения f. Так как g нерастягивающее отображение, $\|x_0-Px_0\|\geq$ $\geq\|g(x_0)-g(Px_0)\|$. Но $g(x_0)=x_0$, а $g(Px_0)=f(Px_0)$, ибо $Px_0\in\mathcal{D}$. Поэтому $\|g(x_0)-g(Px_0)\|=\|x_0-f(Px_0)\|$. Если $x_0\in\mathcal{D}$, то $f(x_0)=g(x_0)=x_0$. Если $x_0\notin\mathcal{D}$, то $Px_0\in\partial\mathcal{D}$. Множество

$\partial\mathfrak{D}$ не пусто, так как $\mathfrak{D}$ является чебышевским для множества $\overline{co}(\{g^n(x): n\in Z^+\})$. По условию теоремы $f(\partial\mathfrak{D})\subset\mathfrak{D}$, поэтому $f(Px_0)\in\mathfrak{D}$. Кроме того $\|x_0-Px_0\|\geq\|x_0-f(Px_0)\|$. В силу единственности ближайшего элемента, $f(Px_0)=Px_0$. Теорема доказана.

Теорема 3 непосредственно вытекает из теоремы I.

5. Следствия.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть h нерастягивающее отображение гильбертова пространства H в себя и пусть существует элемент x из H такой, что множество $\{h^n(x): n\in Z^+\}$ ограничено. Тогда отображение h имеет неподвижную точку в $\overline{co}(\{h^n(x): n\in Z^+\})$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть: A непустое ограниченное и замкнутое подмножество гильбертова пространства H; $f:\mathfrak{D}\to H$ нерастягивающее отображение; $\overline{co}\,A$ содержится в $\mathfrak{D}$ и $f(\partial A)$ содержится в A.

Если A является чебышевским множеством для $\overline{co}\,A$, то отображение f имеет неподвижную точку в множестве A.

В процессе доказательства теоремы 2 следствия I и 2, по существу, были доказаны.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть: $f:\mathfrak{D}\to H$ нерастягивающее отображение; H_1 подпространство пространства H; A невыпуклое ограниченное и замкнутое подмножество H_1, причем $\overline{co}\,A$ содержится в $\mathfrak{D}$.

Если $f(\partial_{H_1}A)$ содержится в A и выполнено одно из условий: I) $0\in H_1^\perp\cap(I-f)(A)$, 2) $H_1^\perp\cap(I-f)(A)=\varnothing$, то отображение f имеет неподвижную точку в $\overline{co}\,A$.

Здесь $H_1^\perp$ ортогональное дополнение в H подпространства H_1; $\varnothing$ – пустое множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0\in H_1^\perp\cap(I-f)(A)$, тогда $0\in(I-f)(A)=\{y=x-f(x): x\in A\}$.

Пусть теперь $H_1^\perp\cap(I-f)(A)=\varnothing$. Рассмотрим метрическую проекцию $P: H\to H_1$; в данном случае P ортогональный проектор на подпространство H_1. Тогда $Pf(\partial_{H_1}A)\subset A$ и $Pf(\mathfrak{D}\cap H_1)\subset H_1$. Следовательно, по теореме I существует точка $x_0\in\overline{co}\,A$ такая, что $Pf(x_0)=x_0$.

Если $f(x_0)\in H_1$, то $f(x_0)=P(f(x_0))=x_0$. Докажем от противного, что элемент $f(x_0)$ всегда принадлежит подпространству H_1. Итак, пусть $f(x_0)\notin H_1$. Если $x_0\in A$, то $x_0-f(x_0)\in(I-f)(A)$. Кроме того, $x_0-f(x_0)=P(f(x_0))-f(x_0)$, т.е. $x_0 - f(x_0) \in H_1^{\perp}$. Таким образом, $x_0 - f(x_0) \in H_1^{\perp} \cap (I - f)(A)$. Получили противоречие.

Пусть теперь $x_0 \notin A$. Так как для всякого элемента y из A $\|f(x_0) - y\|^2 = \|x_0 - f(x_0)\|^2 + \|x_0 - y\|^2$, $d^2(f(x_0), A) = \|x_0 - f(x_0)\|^2 + d^2(x_0, A)$. Из условия $f(\partial_{H_1} A) \subset A$ нетрудно вывести (смотри лемму), что $d(f(x_0), A) \leq d(x_0, A)$. Следовательно, $d^2(x_0, A) \geq \|x_0 - f(x_0)\|^2 + d^2(x_0, A)$. Последнее неравенство справедливо только, если $f(x_0) = x_0$, но это противоречит тому, что $f(x_0) \notin H_1$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть: B ограниченное выпуклое и замкнутое подмножество пространства H; $f : B \longrightarrow H$ нерастягивающее отображение; $ext\, B$ – множество крайних точек множества B.

Если $f(ext\, B) \subset ext\, B$, то отображение f имеет неподвижную точку в B.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f(\overline{ext\, B}) \subset \overline{ext\, B}$, по теореме I f имеет неподвижную точку в $\overline{co}(\overline{ext\, B}) = \overline{co}(ext\, B)$, но $\overline{co}(ext\, B) = B$. Справедливость последнего равенства следует из результата Линденштраусса (см., например, [7, стр.178]). Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть: A непустое ограниченное и замкнутое подмножество пространства H; $\{f_\alpha : \alpha \in \mathfrak{R}\}$ семейство нерастягивающих отображений, $f_\alpha : \overline{co}\, A \rightarrow H$; $P : H \rightarrow \overline{co}\, A$ метрическая проекция.

Если $f_\alpha(\partial A)$ содержится в A для всякого α из $\mathfrak{R}$ и $f_\alpha P f_\beta(x) = f_\beta P f_\alpha(x)$ для всех α, β из $\mathfrak{R}$ и всех x из $\overline{co}\, A$, то семейство $\{f_\alpha : \alpha \in \mathfrak{R}\}$ имеет общую неподвижную точку в $\overline{co}\, A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим нерастягивающие отображения $g_\alpha = P f_\alpha : \overline{co}\, A \rightarrow \overline{co}\, A$. Семейство $\{g_\alpha : \alpha \in \mathfrak{R}\}$ коммутирующее; действительно $g_\alpha g_\beta(x) = P f_\alpha P f_\beta(x) = P f_\beta P f_\alpha(x) = g_\beta g_\alpha(x)$ для всех x из $\overline{co}\, A$. Следовательно по теореме Браудера [2, теорема 2] семейство $\{g_\alpha : \alpha \in \mathfrak{R}\}$ имеет общую неподвижную точку в $\overline{co}\, A$, т.е. существует элемент $x_0 \in \overline{co}\, A$ такой, что $g_\alpha(x_0) = x_0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{R}$. Но для каждого $\alpha \in \mathfrak{R}$ всякая неподвижная точка отображения $P f_\alpha : \overline{co}\, A \rightarrow \overline{co}\, A$ является неподвижной точкой отображения $f_\alpha : \overline{co}\, A \longrightarrow H$, если $f_\alpha(\partial A) \subset A$. Смотрите по этому поводу доказательство теоремы I. Таким образом, точка x_0 является общей неподвижной точкой семейства $\{f_\alpha : \alpha \in \mathfrak{R}\}$. Следствие доказано.

6. Замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Теорема I дополняет основной результат работы [6]. В случае $A=\mathcal{B}=\{x\in H:\|x\|\leq R\}$ теорема I известна давно [I, теорема 2].

Если множество A, которое фигурирует в теореме I, вдобавок является еще и звездным, то отображение f имеет неподвижную точку в самом множестве A (см. [II, теорема 6]).

Условие Роте $f(\partial A)\subset A$ в теореме I нельзя ослабить, заменив на условие $f(\partial A)\subset \overline{co}\,A$.

ПРИМЕР I. Пусть e вектор из H, $\|e\|=1$. Через точку $\frac{1}{2}e$ проведем гиперплоскость $\mathcal{L}$ так, чтобы вектор e был ортогонален $\mathcal{L}$. Гиперплоскость $\mathcal{L}$ разбивает H на два полупространства H_1 и H_2. В качестве множества A выберем ту замкнутую часть сферы $S=\{x\in H:\|x\|=\frac{\pi}{2}\}$, которая лежит в том же замкнутом полупространстве $\overline{H_1}$, что и точка e. То есть $A=S\cap \overline{H_1}$. Пусть $f(x)=\sin\|x\|\cdot e$, $f:H\to H$. Тогда $f(A)\subset \overline{co}\,A$, и, очевидно, нерастягивающее отображение f не имеет неподвижных точек в $\overline{co}\,A$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 2 усиливает основной результат работы [4]. В этой же работе приводятся любопытные примеры множеств, которые являются чебышевскими для своих выпуклых замкнутых оболочек.

Существование требуемого в теореме 2 продолжения g гарантируется теоремой Киршбрауна-Валентайна [I2, теорема 5].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Следствие I справедливо не только для гильбертовых пространств, но и для любых равномерно выпуклых банаховых пространств (см. [3, теорема I Браудера-Петришина]), но в ослабленном варианте: существование неподвижных точек гарантируется не в $\overline{co}(\{h^n(x):n\in Z^+\})$, а в более широком множестве.

ПРИМЕР 2. Пусть $h:R^2\to R^2$ поворот евклидовой плоскости R^2 вокруг начала координат на угол $\frac{2}{3}\pi$. Возьмем точку $x\in R^2\setminus\{0\}$, пусть $\|x-h(x)\|=a$. Тогда по следствию I отображение h имеет неподвижную точку в треугольнике с вершинами в точках x, $h(x)$, $h^2(x)$; а теоремой Браудера-Петришина гарантируется ее существование в фигуре, которая получится из этого треугольника, если к нему добавить три круговых сегмента радиуса a и хордой длины a так, чтобы хорды являлись сторонами данного треугольника.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть B непустое ограниченное и замкнутое подмножество гильбертова пространства H и B не содержится в подпространстве H_1. В этом случае следствие 3 справедливо, если в его формулировке всюду вместо A поставить множество $B \cap H_1$. Применив, если надо, сдвиг, можно считать, что $0 \in B$. Тогда множество $B \cap H_1$ не будет пустым.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Множество $\mathrm{ext}\, B$ является подмножеством границы ∂B. Следствие 4 представляет интерес лишь тогда, когда $\mathrm{ext}\, B$ не совпадает с ∂B, и в этом случае нельзя ослабить условие $f(\mathrm{ext}\, B) \subset \mathrm{ext}\, B$, заменив его на условие $f(\mathrm{ext}\, B) \subset B$.

ПРИМЕР 3. Пусть $B = \overline{B(0,\frac{\pi}{2}) \cap \overline{H}_1}$, где $B(0,\frac{\pi}{2}) = \{x \in H : \|x\| < \frac{\pi}{2}\}$, а H_1 – полупространство, построенное в примере I. Пусть множество A и нерастягивающее отображение f те же самые, что и в примере I. Тогда $\mathrm{ext}\, B = A$, $B = \overline{\mathrm{co}}\, A$ и $f(\mathrm{ext}\, B) \subset \subset B$. Однако отображение f не имеет неподвижных точек в множестве B.

Нетрудно видоизменить пример 3 так, чтобы выполнялось условие $f(\mathrm{ext}\, B) \subset \partial B$ и отображение f не имело неподвижных точек в B.

7. Проблемы.

ПРОБЛЕМА I. Будет ли выполняться заключение теоремы I, если вместо гильбертова пространства H рассмотреть равномерно выпуклое банахово пространство.

ПРОБЛЕМА 2. Будет ли справедливо заключение теоремы I, если вместо H рассмотреть банахово пространство, в котором справедлива теорема Браудера–Геде–Кирка [2, 5, 9].

Имеются близкие результаты в этом направлении (см., например, [I0, теорема 28]).

ПРОБЛЕМА 3. Обобщить теорему I и другие результаты на случай многозначных отображений.

Литература

I. B r o w d e r F.E. Existence of periodic solutions for nonlinear equations of evolution. - Proc.Nat.Acad.Sci.USA, I965, 53, N 5, p.II00-II03.

2. B r o w d e r F.E. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space. - Proc.Nat.Acad.Sci.USA, I965, 54, N 4, p.I04I-I044.

3. B r o w d e r F.E., P e t r y s h y n W.V. The Solution by

iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces. - Bull.Amer.Math.Soc., 1966, 72, N 3, p.571-575.
4. G o e b e l K., S c h ö n e b e r g R. Moons, bridges, birds ... and nonexpansive mappings in Hilbert space. - Bull. Austral.Math.Soc., 1977, 17, N 3, p.463-466.
5. G ö h d e D. Zum Prinzip der Kontraktiven Abbildung. - Math. Nachr., 1965, N 3-4, 30, p.251-258.
6. Г у л е в и ч Н.М., П о в о л о ц к и й А.И. О неподвижных точках операторов в гильбертовом пространстве. - В сб."Теория функций и функциональный анализ". Л., 1975, с.42-45.
7. Д и с т е л ь Д. Геометрия банаховых пространств. К., "Вища школа". 1980, 216 с.
8. З а б р е й к о П.П., К а ч у р о в с к и й Р.Н., К р а с н о с е л ь с к и й М.А. Об одном принципе неподвижной точки для операторов в гильбертовом пространстве. - Функц.анализ и его прилож., 1967, 1, вып.2, с.93-94.
9. K i r k W.A. A fixed point theorem for mappings which do not increase distance. - Amer.Math.Monthly, 1965, 72, N 9, p.1004-1006.
10. M ü l l e r G., R e i n e r m a n n J. A theorem on strong convergence in Banach space with applications to fixed points of nonexpansive and pseudocontractive mappings. - В сб. "Конструктивная теория функций. 77", София, 1980, с.417-425.
11. R e i n e r m a n n J., S t a l l b o h m V. Fixed point theorems for compact and nonexpansive mappings on star shaped domains. - Math.Balkan., 1974, 4, p.511-516.
12. V a l e n t i n e F.A. A Lipschitz condition preserving extension for a vector function. - Amer.J.Math., 1945, 67, N 1, p.83-93.

Gulevič N.M. On the existence of fixed points of nonexpansive mappings satisfying the Rothe condition.

The author proves some theorems on the existence of fixed points of nonexpansive mappings satisfying the Rothe condition.