M. A. Semenov-Tian-Shansky, A certain property of the Kirillov integral, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1973, Volume 37, 53–65

М.А.Семенов-Тян-Шанский

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ИНТЕГРАЛА КИРИЛЛОВА

0. В работе [6] А.А.Кириллов предложил следующую формулу для характеров неприводимых унитарных представлений вещественных групп Ли:

$$\operatorname{tr} T(e^{X}) = p(X)^{-1}\int_{\mathcal{O}} e^{i(F,X)}\beta\ ;\ X\in\mathfrak{g}.$$

Здесь $\mathcal{O}$ – орбита группы в дуальном пространстве к ее алгебре Ли, ρ – универсальная функция, зависящая от поведения отображения

$$Ad^{*}(e^{X}):\mathcal{O}\longrightarrow\mathcal{O} \qquad (*)$$

в окрестности его неподвижных точек, β – каноническая G -инвариантная форма старшей степени на $\mathcal{O}$.

В [7] эта формула была доказана для неприводимых представлений компактных полупростых групп. Ее справедливость для всех представлений некомпактных полупростых групп в настоящее время не доказана.

В предлагаемой работе изучена асимптотика по методу стационарной фазы интегралов

$$J(X)=\int_{\mathcal{O}} e^{\frac{i}{\hbar}(F,X)}\beta\ ,\quad X\in\mathfrak{g}$$

при $\hbar\to 0$ для орбит компактных полупростых групп Ли. Основной результат работы состоит в том, что интеграл $J(X)$ "локально гауссов": все члены асимптотического разложения $J(X)$, кроме I-го, равны нулю. Более того, $J(X)$ в точности совпадает с I-м членом асимптотического разложения. Т.к. стационарные точки подынтегральной функции совпадают с неподвижными точками отображения (*), этот результат устанавливает связь формулы Кириллова с формулами неподвижных точек (см. [I]).

План изложения таков: в п.I напоминаются основные определения и обозначения; в п.2 изучена структура множества критических точек функции $F\longrightarrow \exp\frac{i}{\hbar}(F,X)$ и доказана основная лемма 2.7. Результаты п.2 не зависят от предположения о компактности группы; они излагаются для класса орбит вещественных полупростых групп Ли, снабженных инвариантной комплексной структурой (эти орбиты соответствуют представлениям дискретных серий – см [5] . В п.3 вычислена асимптотика $J(X)$; полученное выражение (для регулярных эллиптических $X\in\mathfrak{g}$) можно формально распространить и на случай некомпактных групп. Однако вопрос о регуляризации интеграла $J(X)$ (расходящегося, если орбита $\mathcal{O}$ некомпактна) в работе не обсуждается. Совпадение асимптотики с точным значением доказано в п.4. на основе сравнения с формулой для характеров. Внутреннее доказательство этого факта автору в настоящее время неизвестно.

Автор благодарен Л.Д.Фаддееву и А.А.Кириллову за внимание к работе и ценные замечания.

I. Обозначения и напоминания.

G – вещественная полупростая группа Ли

K – ее максимальная компактная подгруппа

$\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$ – их алгебры Ли над $\mathbb{R}$

$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ – их комплексификации.

Предполагаем, что $\operatorname{rank} K = \operatorname{rank} G$. Фиксируем подалгебру Картана $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{k}_0$. $H \subset G$ – соответствующая подгруппа Картана.

Корневое разложение относительно $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{h}.$$

Корни $\alpha \in \Delta$ принимают чисто мнимые значения на $\mathfrak{h}_0$. Положим $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = i\,\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$; тогда $\Delta \subset \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$.

Будем отождествлять $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ с помощью формы Киллинга

$$(X, Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y).$$

Разложение Картана: $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Форма Киллинга положительно определена на $\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$ и отрицательно определена на $\mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$.

Фиксируем порядок в системе корней; Δ_+ – множество положительных корней. $C = \{X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}; (\alpha, X) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta_+\}$ – положительная камера Вейля. Корни разбиваются на компактные и некомпактные:

$$\alpha \text{ компактен, если } \mathfrak{g}^{\alpha} \subset \mathfrak{k}$$
$$\alpha \text{ некомпактен, если } \mathfrak{g}^{\alpha} \subset \mathfrak{p}.$$

Положим $\Delta_k = \{\alpha \in \Delta_+;\ \mathfrak{g}^{\alpha} \subset \mathfrak{k}\}$

$W(\mathfrak{k}, \mathfrak{h})$ – группа Вейля, порожденная отражениями в плоскостях

$$Q_{\alpha} = \{\mu \in \Delta_+;\ (\mu, \alpha) = 0\},\quad \alpha \in \Delta_k$$

$W(\mathfrak{k}, \mathfrak{h})$ сохраняет форму Киллинга на $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ и множества компактных и некомпактных корней.

В $\mathfrak{g} \ominus \mathfrak{h}$ можно выбрать базис $\{e_{\alpha}\}_{\alpha \in \Delta}$ (базис Вейля) так, что:

$$e_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha};\ (e_{\alpha}, e_{\beta}) = 0, \quad \text{если } \alpha + \beta \neq 0;\ (e_{\alpha}, e_{-\alpha}) = 1.$$

Пусть $x \to \bar{x}$ – сопряжение $\mathfrak{g}$ относительно ее вещественной формы $\mathfrak{g}_0$. Тогда $\bar{e}_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha} e_{-\alpha}$, где

$$\varepsilon_{\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \text{ некомпактен} \\ -1, & \text{если } \alpha \text{ компактен} \end{cases}$$

Дуальный базис в $\mathfrak{g}^* \ominus \mathfrak{h}^*$ будем обозначать $\{\omega^{\alpha}\}$

$\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ – множество регулярных элементов.

$\mathfrak{f}'_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}'_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{f}_{\mathbb{R}}$ состоит из всех элементов в $\mathfrak{f}_{\mathbb{R}}$ не лежащих в плоскостях Q_α, $\alpha \in \Delta_+$.

$X \in \mathfrak{g}_0$ называется эллиптическим, если $ad X$ полупрост и централизатор X в G компактен. Произвольный эллиптический элемент сопряжен элементу из $\mathfrak{f}_0$.

В работе рассматриваются G – орбиты в $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, проходящие через эллиптические элементы. Мы будем называть их просто орбитами. Множество эллиптических элементов характеризуется так:

<u>Предложение I.I</u>. Пусть $\lambda \in \mathfrak{f}_{\mathbb{R}}$ – эллиптический. Положим $\Phi_\lambda = \{\alpha \in \Delta_+ ; (\lambda, \alpha) = 0\}$. Тогда:

(I) $\Phi_\lambda \subset \Delta_k$

(2) $\exp i\lambda$ – образующая некоторого k -мерного тора $S_\lambda \subset H$. Здесь, $r - k = \operatorname{card} \Phi_\lambda$, $r = \operatorname{rank} G$.

(3) Стационарная подгруппа λ в G есть централизатор U_λ тора S_λ в G. $U_\lambda \subset G$ – редуктивная подгруппа; множество ее корней есть

$$\Delta_u = \{\alpha \in \Delta ; \pm\alpha \in \Phi_\lambda\}.$$

Комплексная алгебра Ли, соответствующая U_λ есть

$$\mathfrak{U} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_u} \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{f}$$

(см.Борель и Хирцебрух, [4]).

(4) Стационарная подгруппа λ в $W(\mathfrak{k}, \mathfrak{f})$ порождена отражениями в плоскостях Q_α, $\alpha \in \Phi_\lambda$; это есть, в точности, группа Вейля $W(U_\lambda)$ (см.Бурбаки, [3] , гл.5, § 3, предл.3.2).

Наложим следующие ограничения на порядок в системе корней $\mathfrak{g}$:

(i) Φ_λ – система положительных корней $\mathfrak{U}$

(ii) $\Delta_+ \setminus \Phi_\lambda$ замкнута относительно сложения (т.е. $[\alpha, \beta \in \Delta_+ \setminus \Phi]$ $\& [\alpha + \beta \in \Delta] \Rightarrow [\alpha + \beta \in \Delta_+ \setminus \Phi]$) . Эти условия будут подразумеваться во всей работе (см.по этому поводу [4]).

Обозначим $\mathcal{O}_\lambda$ орбиту с отмеченной $\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \cap \mathfrak{f}_{\mathbb{R}}$. Очевидно, $\mathcal{O}_\lambda \simeq G / U_\lambda$. Касательное расслоение к орбите $\mathcal{O}_\lambda$ ассоциировано с главным расслоением

$$U_\lambda \longrightarrow G \longrightarrow \mathcal{O}_\lambda$$

по представлению $u \longrightarrow Ad\, u /_{\mathfrak{g}_0 \ominus \mathfrak{U}_0}$ (см. [5]). Поэтому G – инвариантные тензорные поля на $\mathcal{O}_\lambda$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с $Ad\, U_\lambda$ – инвариантными тензорами на $\mathfrak{g}_0 \ominus \mathfrak{U}_0$

Определим на $T_0 = \mathfrak{g}_0 \ominus \mathfrak{U}_0$ комплексную структуру следующим образом: пусть

$$T^\pm = \bigoplus_{\pm\alpha \in \Delta_+ \setminus \Phi_\lambda} \mathfrak{g}^\alpha \ ; \ T_0^c = T^+ \oplus T^-$$

Введем оператор $J_c \in Aut_c T_0^c$

$$J_c x = \begin{cases} ix, & x \in T^+ \\ -ix, & x \in T^- \end{cases}.$$

Предложение I.2.

(I) J_c коммутирует с сопряжением $x \to \bar{x}$ относительно T_o и задает на T_o комплексную структуру J, такую, что

$$T^+ \to T_o : x \to x + \bar{x} -$$

комплексный изоморфизм.

(2) J коммутирует с $\mathrm{Ad}\, \mathcal{U}_\lambda|_{T_o}$ и определяет комплексную структуру в $T\mathcal{O}_\lambda$. (В действительности, при сделанных ограничениях на порядок в системе корней она индуцирована некоторой комплексной структурой на $\mathcal{O}_\lambda$; см. [4]).

Замечание. Использование комплексной структуры позволяет упростить вычисления; конечно, интеграл Кириллова от ее выбора не зависит.

Стандартной симплектической форме на $\mathcal{O}_\lambda$ (см. [7]) соответствует 2-форма на $\mathfrak{g}_o \ominus \mathcal{U}_o$:

$$\Omega = \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha \in \Delta_k \setminus \Phi_\lambda} (\lambda, \alpha) \omega^\alpha \wedge \bar{\omega}^\alpha - \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Delta_k} (\lambda, \alpha) \omega^\alpha \wedge \bar{\omega}^\alpha.$$

(Мы используем введенную выше комплексную структуру).

Вложение $\mathcal{O}_\lambda \subset \mathfrak{g}_\mathbb{R}$ позволяет описать касательное расслоение к орбите как подрасслоение $\mathcal{O} \times \mathfrak{g}_\mathbb{R}$.

Предложение I.3.

$$T\mathcal{O} = \{(F, Y) \in \mathcal{O} \times \mathfrak{g}_\mathbb{R};\ Y = [F, X];\ X \in \mathfrak{g}\}.$$

Доказательство: $\forall X \in \mathfrak{g}_o$ определяет векторное поле $\tilde{X} \in \Gamma(T\mathcal{O})$. Сосчитаем его действие на функции. Пусть $f \in C^\infty(\mathfrak{g}_\mathbb{R})$, $\tilde{f} = f|_\mathcal{O}$; тогда:

$$(\tilde{X}\tilde{f})(F) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} f(e^{-t\,\mathrm{ad}X} \cdot X) = \langle df, [F, X] \rangle.$$

При стандартном отождествлении

$$T\mathfrak{g}_\mathbb{R} \simeq \mathfrak{g}_\mathbb{R} \times \mathfrak{g}_\mathbb{R}$$

$\tilde{X}_F \in T_F\mathcal{O}$ переходит в $[F, X] \in \mathfrak{g}_\mathbb{R}$; отображение $\mathfrak{g}_o \to T_F\mathcal{O}$: $X \to [F, X]$ – эпиморфизм (что следует из подсчета размерностей).

2. Критические точки гамильтонианов на орбите.

Как известно, для произвольного $X \in \mathfrak{g}_\mathbb{R}$ гамильтониан h_x векторного поля $\widetilde{\frac{1}{i}X} \in \Gamma(T\mathcal{O})$ есть сужение на $\mathcal{O}$ линейной функции на $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$: $h_x(F) = (F, X)$. Пусть $Y_o \in \mathfrak{g}_o$, $\tilde{Y}_o \in \Gamma(T\mathcal{O})$ – порожденное им векторное поле; тогда: $(\tilde{Y}_o h_x)(F) = (X, [F, Y_o])$. Это частный случай формулы, полученной в I.3.

Предложение 2.I. Критические точки $h_x \in C^\infty(\mathcal{O})$ суть те $F \in \mathcal{O}$, для которых $[F,X]=0$.

Доказательство: Если $[F,X]=0$, то $\forall Y \in \mathfrak{g}_0$

$$(\tilde{Y}h_x)(F)=(X,[F,Y])=([F,X],Y)=0.$$

Т.к. векторы $\tilde{Y}_F$ порождают $T_F\mathcal{O}$, то $dh_x(F)=0$ Обратно:

$$[F,X]\neq 0 \Rightarrow \exists Y\in\mathfrak{g}_0 : (X,[F,Y])\neq 0 \Rightarrow dh_x(F)\neq 0.$$

Замечание. Для справедливости предложений I.3, 2.I полупростота, конечно, несущественна. Следующие утверждения уже полупростые.

Предложение 2.2. Пусть $X\in\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$. Критические точки h_x - это точки пересечения орбиты с $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

Доказательство: Как известно, централизатор $X\in\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$ в $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ совпадает с $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Имеем, согласно 2.I: F критическая $\Rightarrow$ $\Rightarrow [F,X]=0 \Rightarrow F\in\mathcal{O}\cap\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

Предложение 2.3. Орбита пересекает $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ трансверсально.

Доказательство. Согласно I.3 касательное пространство к орбите в точке $F\in\mathcal{O}\cap\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ состоит из векторов вида $[F,Y_0]$, $Y_0\in\mathfrak{g}_0$. Пространство, натянутое на эти векторы в $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, ортогонально $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

Множество $\mathcal{O}_\lambda\cap\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ описывается следующим образом:

Предложение 2.4. Группа $W(\mathfrak{k},\mathfrak{h})$ транзитивно действует на $\mathcal{O}_\lambda\cap\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ со стационарной подгруппой $W(\mathcal{U}_\lambda)$. Это - прямое следствие из I.4.

Предложение 2.5. Пусть $X\in\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$; тогда h_x - функция Морса на $\mathcal{O}$.

Доказательство: Мы явно вычислим гессиан h_x в критических точках. Пусть $\lambda\in\mathcal{O}\cap\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Согласно I.3 касательный вектор $\tilde{Y}_\lambda\in T_\lambda\mathcal{O}$ можно представить в виде $\tilde{Y}_\lambda=[\lambda,Y_0]$, где $Y_0\in\mathfrak{g}$. Без ограничения общности можно считать, что $Y_0\in\mathfrak{g}_0\ominus\mathcal{U}_0$; воспользуемся теперь комплексной структурой в $T\mathcal{O}$, согласно I.2 вектор Y_0 можно представить в виде

$$Y_0=Y+\bar{Y},\quad Y\in\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi_\lambda}\mathfrak{g}^\alpha.$$

Переходим к вычислению гессиана. Значение его на касательных векторах $\tilde{Z}_\lambda$, $\tilde{Y}_\lambda$ есть, по определению:

$$\mathcal{H}_\lambda(\tilde{Y}_\lambda,\tilde{Z}_\lambda)=(\tilde{Y}\circ\tilde{Z})h_x(\lambda).$$

Имеем:

$$\mathcal{H}_\lambda(\tilde{Y}_\lambda,\tilde{Z}_\lambda)=(X,[[\lambda,Z_0],Y_0])=-([X,Y_0],[\lambda,Z_0])=-([X,Y+\bar{Y}],[\lambda,Z+\bar{Z}]).$$

Разложим Y , Z по базису Вейля; пусть

$$Y=\sum_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi} Y_\alpha e_\alpha \quad , \quad Z=\sum_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi} Z_\alpha e_\alpha .$$

Тогда

$$\mathcal{H}_\lambda(\tilde{Y}_\lambda,\tilde{Z}_\lambda)=-\sum_{\alpha,\beta\in\Delta_+\setminus\Phi}([X,Y_\alpha e_\alpha+Y_\alpha\bar{e}_\alpha],[\lambda,Z_\beta e_\beta+\bar{Z}_\beta\bar{e}_\beta])=$$

$$=-\sum_{\alpha,\beta\in\Delta_k\setminus\Phi}([X,Y_\alpha e_\alpha-\bar{Y}_\alpha e_{-\alpha}],[\lambda,Z_\beta e_\beta-\bar{Z}_\beta e_{-\beta}])-$$

$$-\sum_{\alpha,\beta\in\Delta_+\setminus\Delta_k}([X,Y_\alpha e_\alpha+\bar{Y}_\alpha e_{-\alpha}],[\lambda,Z_\beta e_\beta+\bar{Z}_\beta e_{-\beta}])-$$

$$-\sum_{\substack{\alpha\in\Delta_k\setminus\Phi\\ \beta\in\Delta_+\setminus\Delta_k}}([X,Y_\alpha e_\alpha-\bar{Y}_\alpha e_{-\alpha}],[\lambda,Z_\beta e_\beta+\bar{Z}_\beta e_{-\beta}])-$$

$$-\sum_{\substack{\alpha\in\Delta_+\setminus\Delta_k\\ \beta\in\Delta_k\setminus\Phi}}([X,Y_\alpha e_\alpha+\bar{Y}_\alpha e_{-\alpha}],[\lambda,Z_\beta e_\beta-\bar{Z}_\beta e_{-\beta}])=$$

$$=-\sum_{\alpha\in\Delta_k\setminus\Phi}(\lambda,\alpha)(X,\alpha)(Y_\alpha e_\alpha+\bar{Y}_\alpha e_{-\alpha},Z_\alpha e_\alpha+\bar{Z}_\alpha e_{-\alpha})-$$

$$-\sum_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Delta_k}(\lambda,\alpha)(X,\alpha)(Y_\alpha e_\alpha-\bar{Y}_\alpha e_{-\alpha},Z_\alpha e_\alpha-\bar{Z}_\alpha e_{-\alpha})=$$

$$=-2\,\mathrm{Re}\sum_{\alpha\in\Delta_k\setminus\Phi}(\lambda,\alpha)(X,\alpha)Y_\alpha\bar{Z}_\alpha+2\,\mathrm{Re}\sum_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Delta_k}(\lambda,\alpha)(X,\alpha)Y_\alpha\bar{Z}_\alpha .$$

Мы использовали формулы для сопряжения в $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{g}_0$ и ортогональность корневых векторов e_α .

Полученное выражение будет использовано при вычислении асимптотики интеграла Кириллова.

Нетрудно подсчитать индекс Морса критических точек h_x :

<u>Предложение 2.6</u>. Пусть $X\in C\subset \mathfrak{f}_{\mathbb{R}}$; индекс Морса функции $(-h_x)$ в точке λ

$$\mathrm{ind}(-h_x)=2\,\mathrm{card}\{\alpha\in\Delta_k\setminus\Phi_\lambda;(\lambda,\alpha)<0\}+2\,\mathrm{card}\{\alpha\in\Delta_+\setminus\Delta_k;(\lambda,\alpha)>0\}\equiv 2k(\lambda).$$

<u>Доказательство</u> прямо следует из 2.6:

$$X\in C\Rightarrow\forall\alpha\in\Delta_+:(\alpha,X)>0.$$

<u>Замечание</u>. Предложения 2.6, 2.7 позволяют легко получить описание клеточной структуры орбит (сделанное впервые другим методом в в работе А.Бореля [2]). При подготовке этой статьи к печати автору стала известна работа Паркера (Morse theory on homogeneous Kähler manifolds, Proc. AMS, <u>34</u>(1972) № 2), в которой исполь-

зован именно этот подход.

Лемма 2.7. (Симплектическая лемма Морса): Пусть (M,ω) - симплектическое многообразие, $G\times M\to M$ - компактная группа Ли преобразований M, сохраняющая ω. Если $\lambda\in M$ неподвижна относительно G, то существует окрестность λ и канонические координаты в ней, в которых гамильтонианы h_x, $X\in\mathcal{G}$ квадратичны.

Замечание. Т.к. утверждение леммы локальное, не нужно требовать, чтобы функции h_x были определены в целом.

Эта лемма - простое следствие полученной недавно А.Вейнштейном ([8]) "эквивариантной теоремы Дарбу": Пусть (V,ω) - линейное пространство, снабженное симплектической формой с переменными коэффициентами, $\rho:G\to GL(V)$ - линейное представление G, такое, что $\rho(g)^*\omega=\omega$. Существует G - эквивариантный диффеоморфизм φ окрестности нуля в V на себя, такой, что $(d\varphi)(0)=id$, $\varphi^*\omega=\omega_0$ - форма с постоянными коэффициентами (равная значению ω в нуле).

Доказательство леммы: По теореме Э.Картана действие G в окрестности λ эквивалентно линейному. Мы можем считать, согласно теореме Дарбу, что симплектическая форма приведена к каноническому виду в некоторой окрестности λ. Тогда гамильтонианы с необходимостью квадратичны.

Замечание. Для орбит ссылку на теорему Э.Картана можно заменить явной линеаризацией действия стационарной подгруппы U_λ в окрестности неподвижной точки (и даже в клетке максимальной размерности, не содержащей других неподвижных точек). Явное построение канонических переменных, о которых идет речь в лемме, более сложная (и нерешенная) задача.

Лемма 2.7 показывает, что интеграл

$$J(X)=\int_{\mathcal{O}}\exp\frac{i}{\hbar}(F,X)\beta\ ,\quad \beta=\frac{1}{n!}\overset{n}{\wedge}\Omega$$

локально гауссов.

Предложение 2.8. Пусть $\mathcal{O}$ компактна; Все члены асимптотического разложения $J(X)$ при $\hbar\to 0$, кроме I-го, равны нулю.

Доказательство: Возьмем подходящее разбиение единицы на $\mathcal{O}$:

$$1=\sum_{\lambda\in\mathcal{O}\cap\mathfrak{f}_{\mathbb{R}}}\chi_\lambda+\chi_0;\quad \chi_\lambda,\ \chi_0\in C^\infty(\mathcal{O})$$

$$\chi_\lambda=\begin{cases}1 & \text{в окрестности } \lambda\\ 0 & \text{в окрестности } \mathcal{O}\cap\mathfrak{f}_{\mathbb{R}}\setminus\{\lambda\}\end{cases}$$

$$\chi_0\equiv 0 \quad \text{в окрестности } \mathcal{O}\cap\mathfrak{f}_{\mathbb{R}}$$

Интеграл $\int e^{\frac{i}{\hbar}(F,X)}\chi_\lambda\beta$ - гауссов; $\int e^{\frac{i}{\hbar}(F,X)}\chi_0\beta$ быстро убывает при $\hbar\to 0$.

Мы увидим, что в действительности имеет место точное равенство

$$J(X) = \text{s.p.}\int_{\mathcal{O}} e^{\frac{i}{\hbar}(F,X)}.$$

Это позволяет предполагать, что для орбит лемма 2.7 допускает некую глобализацию.

3. Асимптотика интегралов Кириллова

Мы явно вычислим единственный неисчезающий член асимптотики $J(X)$. Проделанные выкладки можно формально распространить и на случай некомпактных орбит, когда интеграл Кириллова расходится. Как уже указывалось, мы не будем обсуждать здесь вопросы, связанные с регуляризацией $J(X)$.

Выпишем вновь выражение для формы Ω на орбите $\mathcal{O}_\Lambda$

$$\Omega = \frac{i}{2\pi}\sum_{\alpha\in\Delta_k\setminus\Phi}(\Lambda,\alpha)\,\omega^\alpha\wedge\bar\omega^\alpha - \frac{i}{2\pi}\sum_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Delta_k}(\Lambda,\alpha)\,\omega^\alpha\wedge\bar\omega^\alpha$$

Ω представляется в виде мнимой части невырожденной симметричной формы на $\mathfrak{g}\ominus\mathfrak{U}_0$. Индекс Ω есть, по определению, отрицательный индекс инерции этой формы. Очевидно:

$$\operatorname{ind}\Omega = 2\operatorname{card}\{\alpha\in\Delta_k\setminus\Phi_\Lambda;(\Lambda,\alpha)<0\} + 2\operatorname{card}\{\alpha\in\Delta_+\setminus\Delta_k;(\Lambda,\alpha)>0\} = 2k(\Lambda).$$

Форма Ω определяет на $\mathcal{O}$ ненулевую форму старшей степени $\beta = \frac{1}{n!}\overset{n}{\wedge}\Omega$; мы фиксируем ориентацию $\mathcal{O}$ условием $\int_{\mathcal{O}}\beta>0$; это задает ориентацию в касательных пространствах к точкам орбиты. С другой стороны на $\mathcal{O}$ существует ориентирующая форма, индуцированная комплексной структурой на орбите:

$$\mu = \prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi}\frac{i}{2}\,\omega^\alpha\wedge\bar\omega^\alpha.$$

Очевидно, $\beta = (-1)^{k(\Lambda)}\cdot\pi^{-n}\prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi_\Lambda}|(\Lambda,\alpha)|$. Форма μ задает в касательных пространствах к орбите меру Лебега с ориентацией $(-1)^{k(\Lambda)}$.

Определим теперь вклад в асимптотику $J(X)$ от одной критической точки $\lambda\in\mathcal{O}_\Lambda\cap\mathfrak{f}_{\mathbb{R}}$. Дело сводится к вычислению интеграла Френеля, распространенного на касательное пространство $T_\lambda\mathcal{O}$, по мере, индуцированной в этом пространстве формой β .

Обозначим z_α комплексные координаты в $T_\lambda\mathcal{O}\simeq\mathfrak{g}_0\ominus\mathfrak{U}_0$ по отношению к базису $\{e_\alpha+\bar e_\alpha\}$, $\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi_\lambda$ (см.I.2). Тогда интересующая нас мера есть

$$\pi^{-n}\prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi}|(\lambda,\alpha)|\cdot\prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi}\frac{i}{2}\,dz_\alpha\wedge d\bar z_\alpha.$$

Из 2.5 следует выражение для квадратичной формы в экспоненте:

$$\mathcal{H}_\lambda(z,\bar z) = -2\sum_{\alpha\in\Delta_k\setminus\Phi}(\lambda,\alpha)(X,\alpha)z_\alpha\bar z_\alpha + 2\sum_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Delta_k}(\alpha,\lambda)(X,\alpha)z_\alpha\bar z_\alpha.$$

Таким образом, вклад в асимптотику от точки λ есть

$$J_\lambda(X) = \pi^{-n} e^{\frac{i}{\hbar}(\lambda,X)} \prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi} |(\lambda,\alpha)| \cdot \frac{(2\pi\hbar)^n}{|\det_{\mathbb{R}}\mathcal{H}_\lambda|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}(-\mathcal{H}_\lambda)\right\}.$$

Имеем:

$$\det_{\mathbb{R}}\mathcal{H}_\lambda = |\det_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_\lambda|^2 = 2^{2n}\prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi}|(\lambda,\alpha)||(X,\alpha)|.$$

Далее $\exp\left\{-\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}(-\mathcal{H}_\lambda)\right\} = (-i)^n\cdot(-1)^{\frac{1}{2}\operatorname{ind}_\lambda(-h_X)} =$

$$= (-i)^n(-1)^{k(\lambda)}\cdot\prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi}\varepsilon(\alpha,X),$$

где
$$\varepsilon(\alpha,\ ) = \begin{cases} 1, (\alpha,\ )>0 \\ -1, (\alpha,\ )<0 \end{cases}.$$

Окончательно:

$$J_\lambda(X) = (-1)^{k(\lambda)}\frac{e^{\frac{i}{\hbar}(F,X)}}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi}\frac{i}{\hbar}(\alpha,X)}.$$

Очевидно, это выражение не зависит от выбора порядка в системе корней.

<u>Предложение 3.I</u>. Пусть $\Lambda, X \in \mathfrak{f}'_{\mathbb{R}}$; тогда

$$\int_{\mathcal{O}_\Lambda} e^{\frac{i}{\hbar}(F,X)}\beta = (-1)^{k(\Lambda)}\sum_{w\in W(\mathfrak{k},\mathfrak{f})}\det w\cdot\frac{e^{\frac{i}{\hbar}(w\cdot\Lambda,X)}}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_+}\frac{i}{\hbar}(\alpha,X)} +$$

+ быстро убывающие при $\hbar\to 0$ члены.

<u>Доказательство</u>: Пусть $\lambda = w\cdot\Lambda$; $w\in W(\mathfrak{k},\mathfrak{f})$ переводит корни $\alpha\in\Delta_+$ в корни $\varepsilon_\beta\cdot\beta$, $\beta\in\Delta_+$, $\varepsilon_\beta=\pm 1$. Положим:

$$s(w) = \operatorname{card}\{\beta\in\Delta_+ ;\ \varepsilon_\beta = -1\}.$$

Как известно, $\det w = (-1)^{s(w)}$.

Используя то обстоятельство, что w переводит множества компактных и некомпактных корней в себя, легко показать, что

$$k(w\cdot\Lambda) \equiv k(\Lambda) + s(w) \pmod 2.$$

В общем случае получаем:

<u>Предложение 3.2</u>. Пусть $\mathcal{O}_\Lambda$ – орбита, проходящая через $\Lambda\in\mathfrak{f}_{\mathbb{R}}$, $\Lambda\perp\Phi_\Lambda\subset\Delta_k$, $X\in\mathfrak{f}'_{\mathbb{R}}$. Тогда:

$$\int_{\mathcal{O}_\Lambda} e^{\frac{i}{\hbar}(F,X)}\beta \simeq (-1)^{k(\Lambda)}\sum_{w\in W(\mathfrak{k},\mathfrak{f})/W(\mathfrak{u}_\lambda)}\frac{e^{\frac{i}{\hbar}(w\cdot\Lambda,X)}}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi}\frac{i}{\hbar}(w\cdot\alpha,X)}.$$

Корректность этой формулы, т.е. независимость $\Pi(w\cdot\alpha, X)$ от выбора представителя из класса смежности по $W(\mathcal{U}_\Lambda)$, следует из того, что (при сделанных ограничениях на порядок в системе корней) множество $\Delta_+ \setminus \Phi\, W(\mathcal{U}_\Lambda)$ - инвариантно.

4. Сравнение с формулой характеров

Пусть G - компактная полупростая, $P \subset \mathfrak{f}_{\mathbb{R}}$ - полугруппа старших весов, $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha$, T_λ - представление со старшим весом λ.

В [7] доказано равенство:

$$\operatorname{tr} T_\lambda(e^{iX}) = p(X)^{-1}\int_{\mathcal{O}_{\lambda+\rho}} e^{i(F,X)}\beta\,; \quad X \in \mathfrak{f}_{\mathbb{R}}$$

$$p(X) = \prod_{\alpha\in\Delta_+} \frac{\sin^{(\alpha,X)/2}}{(\alpha,X)/2}.$$

Отсюда будет выведена

Теорема. Интеграл Кириллова по орбитам компактных полупростых групп совпадает со своей асимптотикой (3.I, 3.2).

Доказательство: Все невырожденные старшие веса (т.е. веса из $P \cap \mathfrak{f}'_{\mathbb{R}}$) можно представить в виде $\lambda+\rho$, $\lambda \in P$. Поэтому для всех целочисленных орбит общего положения теорема вытекает из сравнения формулы Кириллова с известной формулой Вейля:

$$\operatorname{tr} T_\lambda(e^{iX}) = \sum_{w\in W} \det w \, \frac{e^{i(w\cdot(\lambda+\rho),X)}}{\prod_{\alpha\in\Delta_+} 2i\,\sin(\alpha,X)/2}.$$

Если теорема верна для $\mathcal{O}_\lambda$, $\lambda \in C$, то она верна и для $\mathcal{O}_{c\cdot\lambda}\ \forall c \in \mathbb{R}$. Действительно:

$$\int_{\mathcal{O}_{c\lambda}} e^{i(F,X)}\beta = c^n \int_{\mathcal{O}_\lambda} e^{i(F,cX)}\beta.$$

Любая орбита компактной группы пересекает камеру C. Покажем, что $\{c\lambda;\, \lambda\in P\cap\mathfrak{f}'_{\mathbb{R}},\, c\in\mathbb{R}_+\}$ плотно в C. Произвольный $\lambda \in P\cap\mathfrak{f}'_{\mathbb{R}}$ представим в виде суммы простых корней с целыми положительными коэффициентами. Поэтому интересующее нас множество есть множество точек прямых в C с рациональными угловыми коэффициентами по отношению к базису из простых корней. Итак, теорема верна для всех орбит общего положения.

Перейдем к общему случаю. Идея доказательства состоит в том, чтобы аппроксимировать вырожденную орбиту, орбитами общего положения.

Мы видели (см.I.I), что $\mathcal{O}_\lambda \simeq G/\mathcal{U}_\lambda$; т.к. $H \subset \mathcal{U}_\lambda$, то существует естественное расслоение: $p: G/H \to G/\mathcal{U}_\lambda$ со слоем $\mathcal{U}_\lambda/H$. На языке орбит это расслоение можно описать так: пусть $\Lambda \in \mathfrak{f}'_{\mathbb{R}}$, тогда $\Lambda = \lambda + \lambda_u$, где λ_u принадлежит линейной оболочке Φ_λ , $\lambda \perp \Phi_\lambda$. При действии $\mathrm{Ad}\,\mathcal{U}_\lambda$ λ остается инвариантным, λ_u описывает орбиту группы $\mathcal{U}_\lambda$, изоморфную $\mathcal{U}_\lambda/H$ (Мы можем считать, не ограничивая общности, что $\lambda_u \in \mathcal{U}_\mathbb{R} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{R}$ – регулярный элемент в $\mathcal{U}_\mathbb{R}$. Центр $\mathcal{U}_\lambda$ содержится в H , поэтому $\mathcal{U}_\lambda/H$ изоморфна орбите полупростой группы $\mathcal{U}_\lambda/\mathrm{cent}\,\mathcal{U}_\lambda$.

Выпишем выражения для форм Лиувилля на $\mathcal{U}_\lambda/H$, $G/\mathcal{U}_\lambda$, G/H :

$$\beta_u = \prod_{\alpha\in\Phi} \frac{i}{2\pi}(\lambda_u,\alpha)\,\omega^\alpha\wedge\omega^\alpha$$

$$\beta_\lambda = \prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi} \frac{i}{2\pi}(\lambda,\alpha)\,\omega^\alpha\wedge\bar{\omega}^\alpha$$

$$\beta = \prod_{\alpha\in\Delta_+} \frac{i}{2\pi}(\lambda_u+\lambda,\alpha)\,\omega^\alpha\wedge\bar{\omega}^\alpha.$$

Отсюда:

$$\beta = \prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi} \frac{(\lambda_u+\lambda,\alpha)}{(\lambda,\alpha)}\,\beta_u\wedge\beta_\lambda.$$

Если $\lambda_u \to 0$, то слой расслоения $G/H \to G/\mathcal{U}_\lambda$ сжимается (в картановской метрике в $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$). Наша цель – изучить, как ведет себя при этом интеграл Кириллова. Выражение, полученное выше для β , позволяет провести сначала интегрирование по слою. Пусть $F\in\mathcal{O}_\Lambda$, $F'=p(F)$. Если $F'=\mathrm{Ad}g^{-1}\cdot\lambda$, то $\mathrm{Ad}g\,(F-F')=\mathrm{Ad}u^{-1}\cdot\lambda_u$ для некоторого $u\in\mathcal{U}_\lambda$. Поэтому: $F=F'+\mathrm{Ad}g\,u^{-1}\lambda_u$. Пусть $X\in\mathfrak{f}'_\mathbb{R}$.

Положим:

$$h'_X(F) = (F',X)$$

$$h''_X(F) = (\mathrm{Ad}u^{-1}\lambda_u,\ \mathrm{Ad}g^{-1}X).$$

Тогда:

$$h_X(F) = h'_X(F) + h''_X(F).$$

Имеем:

$$J(X) = \int_{\mathcal{O}_\Lambda} e^{ih_X(F)}\beta = \prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi}\frac{(\lambda+\lambda_u,\alpha)}{(\lambda,\alpha)}\int e^{ih'_X(F)}\beta_\lambda\int e^{ih''_X(F)}\beta_u.$$

Внутренний интеграл берется по слою над F' , изоморфному $\mathcal{U}_\lambda/H$. Очевидно, это – тоже интеграл Кирилловского типа. Следовательно:

$$J_u(X) = \int e^{ih''_X(F)}\beta_u = \sum_{w\in W(\mathcal{U}_\lambda)} \det w\cdot\frac{e^{i(w\cdot\lambda_u,\,\mathrm{Ad}g^{-1}X)}}{\prod_{\alpha\in\Phi} i(\alpha,\mathrm{Ad}g^{-1}X)}.$$

Положим: $\lambda_u = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{\alpha\in\Phi}\alpha = \varepsilon\rho_u$, $\varepsilon\to 0$. По формуле Г.Вейля:

$$\sum_{w\in W}\det w\, e^{i(\rho,X)} = \prod_{\alpha\in\Phi} 2i\sin\frac{(\alpha,X)}{2}.$$

Отсюда: $J_u(X) = \varepsilon^s + O(\varepsilon^s)$; $2s = \dim\,\mathcal{U}_\lambda/H$. Таким образом, старший член при $\varepsilon\to 0$ вовсе не зависит от X . Мы получаем:

$$J(X)=\varepsilon^{s}\int e^{i(F',X)}\beta_\lambda+o(\varepsilon^{s}).$$

Действительно, $\prod\limits_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi}\frac{(\lambda+\lambda_u,\alpha)}{(\lambda,\alpha)}=1+o(\varepsilon)$. С другой стороны, интеграл по орбите $\mathcal{O}_\Lambda$ можно вычислить непосредственно. Имеем:

$$J(X)=\sum_{w\in W}\det w\,\frac{e^{i(w\cdot(\lambda+\lambda_u),X)}}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_+}i(\alpha,X)}.$$

Произведем в этой формуле перегруппировку членов:

$$J(X)=\sum_{w\in W/W(\mathcal{U}_\lambda)}\frac{e^{i(w\cdot\lambda,X)}}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi}i(w\cdot\alpha,X)}\sum_{w'\in W(\mathcal{U}_\lambda)}\frac{e^{i(w'\cdot\lambda_u,X)}}{\prod\limits_{\alpha\in\Phi}i(w'\cdot\alpha,X)}.$$

К внутренней сумме вновь применим формулу Вейля. Сравнивая 2 выражения для $J(X)$, получаем:

$$\int_{\mathcal{O}_\lambda}e^{i(F',X)}\beta_\lambda=\sum_{w\in W/W(\mathcal{U}_\lambda)}\frac{e^{i(w\cdot\lambda,X)}}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_+\setminus\Phi}i(w\cdot\alpha,X)},$$

что совпадает с 3.2.

Обсудим в заключении случай некомпактных групп. Как показал Хариш-Чандра, с произвольным $\lambda\in\mathfrak{f}'_{\mathbb{R}}$ можно связать унитарное неприводимое представление G (представление дискретной серии), характер которого на множестве регулярных эллиптических элементов задается формулой:

$$tr\,T_\lambda(e^{iX})=(-1)^{k(\lambda+\rho)}\sum_{w\in W(\mathfrak{k},\mathfrak{f})}\det w\cdot\frac{e^{i(w\cdot(\lambda+\rho),X)}}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_+}2i\sin\frac{(\alpha,X)}{2}}.$$

Согласно (недоказанному) предположению Кириллова:

$$tr\,T_\lambda(e^{iX})=p(X)^{-1}\int_{\mathcal{O}_{\lambda+\rho}}e^{i(F,X)}\beta$$

$$p(X)=\prod_{\alpha\in\Delta_+}\frac{\sin(\alpha,X)/2}{(\alpha,X)/2}.$$

Сравним формулу Хариш-Чандра с формальной асимптотикой $J(X)$, полученной в п.3. Их совпадение позволяет предполагать, что теорема остается справедливой и для некомпактных полупростых групп.

Литература

I Atiyah M.F., Bott R., A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes.II. Ann.of Math., 88 (1968), 451.

2 Borel A., Kahlerian coset spaces of semisimple Lie Groups, Proc.Nat.Acad.Sci. USA, 40 (1954), 1147.

3 Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М., Мир, 1972.

4 Borel A., Hirzebruch F., Homogeneous Spaces and Characteristic Classes, I. American J.of Math., 80(1958), № 2.

5 Гриффитс Ф, Шмид В. Локально однородные комплексные многообразия, УМН 26 (1971) № 5.

6 Кириллов А.А. Метод орбит в теории представлений групп Ли. Функциональный анализ, 2 (1968) № 2.

7 Кириллов А.А. Характеры унитарных представлений групп Ли. Функциональный анализ 2 (1968) № 2.

8 Weinstein A., Symplectic manyfolds and their Lagrangean submanifolds, Advances in Mathematics, 6 (1971), 329.