С. К. Водопьянов, Непрерывность отображений класса Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$ с конечным искажением на группах Карно,
Сиб. матем. журн., 2023, том 64, номер 5, 912–934

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2023. Том 64, № 5

УДК 517.518.23+517.548.2

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ КЛАССА СОБОЛЕВА $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$ С КОНЕЧНЫМ ИСКАЖЕНИЕМ НА ГРУППАХ КАРНО

С. К. Водопьянов

Аннотация. Доказана непрерывность отображений на группах Карно, принадлежащих классу Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$ и имеющих конечное искажение. Кроме того, установлено, что отображения исследуемых классов $\mathscr{P}$-дифференцируемы почти всюду и обладают $\mathscr{N}$-свойством Лузина.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.503

Ключевые слова: отображение с конечным и ограниченным искажением, квазиконформный анализ, пространство Соболева, группа Карно.

Группой Карно [1–4] называется связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли $\mathscr{G}$ которой разлагается в прямую сумму $V_1\oplus\ldots\oplus V_m$ векторных пространств таких, что $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ для $1 \leq k \leq m-1$ и $[V_1, V_m] = \{0\}$, $\dim V_1 \geq 2$. Далее применяем обозначения $x \cdot y$ для произведения двух элементов x, y группы $\mathbb{G}$, и e для нейтрального элемента группы. Подпространство $V_1 \subset \mathscr{G}$ называется *горизонтальным*.

Работа посвящена исследованию условий на отображение классов Соболева групп Карно, при выполнении которых отображение становится непрерывным, если его изменить на множестве меры нуль. В исследование вовлечены также отображения с конечным искажением групп Карно, для которых свойство непрерывности доказывается впервые. Кроме того, установлено, что отображения исследуемых классов $\mathscr{P}$-дифференцируемы почти всюду и обладают $\mathscr{N}$-свойством Лузина.

1. Определение основных структур на группах Карно

1.1. Алгебра Ли группы Карно и экспоненциальное отображение. Пусть $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$ — *левоинвариантные векторные поля*, образующие базис пространства V_1. Поскольку они порождают $\mathscr{G}$, то для каждого i, $1 < i \leq m$, можно выбрать базис X_{ij}, $1 \leq j \leq n_i = \dim V_i$, в V_i, образованный коммутаторами базисных полей $X_{1k} \in V_1$ порядка $i-1$. Так как алгебра $\mathscr{G}$ нильпотентна, каждый элемент $x \in \mathbb{G}$ можно идентифицировать с точками пространства $\mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_m}$ посредством экспоненциального отображения:

$$x = \exp\Big(\sum_{\substack{1\leq i\leq m,\\ 1\leq j\leq n_i}} x_{ij}X_{ij}\Big).$$

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики Сибирского отделения Российской академии наук (проект № FWNF-2022-0006).

Диффеоморфизм $\exp : \mathscr{G} \to \mathbb{G}$ — это глобальная система координат: каждому элементу $x \in \mathbb{G}$ соответствует единственный набор чисел $\{x_{ij}\} \in \mathbb{R}^N$, $N = n_1 + \ldots + n_m$. Более того, удобно отождествить элементы $\mathscr{G}$ с точками пространства $\mathbb{R}^N$ так, чтобы экспоненциальное отображение $\exp : \mathscr{G} \to \mathbb{G}$ было тождественное [3]. Последнее означает, что элементы алгебры $\mathscr{G}$ и группы $\mathbb{G}$ — это одни и те же точки в $\mathbb{G}$, над которыми совершаются операции, зависящие от выбора структуры. Для такой системы координат единица e группы — это 0, а обратный x^{-1} к элементу $x \in \mathbb{G}$ — это $-x$.

Растяжения δ_t, определенные как $x \mapsto \delta_t x = (t^i x_{ij})_{1\le i\le m,\, 1\le j\le n_i}$, суть автоморфизмы как алгебры $\mathscr{G}$, так и группы $\mathbb{G}$ для каждого $t > 0$.

1.2. Примеры. *Евклидово пространство* $\mathbb{G}$ с его стандартной структурой является примером абелевой группы: векторные поля $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, не имеют нетривиальных коммутационных соотношений и составляют базис соответствующей алгебры Ли.

Группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ является примером неабелевой группы Карно. Алгебра Ли этой группы имеет размерность $2n + 1$. Векторные поля

$$X_i = \partial_{x_i} + 2y_i\partial_t, \quad Y_i = \partial_{y_i} - 2x_i\partial_t, \quad T = \partial_t, \quad i = 1, \ldots, n,$$

образуют базис алгебры Гейзенберга (здесь группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ отождествлена с пространством $\mathbb{R}^{2n+1} = \{(x, y, t) : x, y, \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$). Единственные нетривиальные коммутационные соотношения суть $[X_i, Y_i] = -4T$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, $V = V_1 \oplus V_2$, где $V_1 = \operatorname{span}\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n\}$ и $V_2 = \operatorname{span}\{T\}$ — одномерное векторное подпространство. Образ $\exp(V_2)$ — это центр группы $\mathbb{H}^n$. Групповая операция определяется формулой

$$(x, y, t) \cdot (x', y', t') = (x + x', y + y', t + t' + 2\langle y, x'\rangle - 2\langle x, y'\rangle).$$

Двухступенчатая группа Карно $\mathbb{G}$ имеет алгебру Ли левоинвариантных векторных полей $\mathscr{G} = V_1 \oplus V_2$ такую, что $[V_1, V_1] = V_2$ и $[V_1, V_2] = 0$.

Пусть $X_1, \ldots, X_N$ — базис в V_1, а $T_1, \ldots, T_M$ — базис в V_2 такие, что

$$T_s = [X_{s_1}, X_{s_2}], \quad s = 1, \ldots, M,$$

для некоторых $s_1, s_2 \in \{1, \ldots, N\}$. Горизонтальное касательное пространство $HT_g\mathbb{G}$ группы $\mathbb{G}$ над каждой точкой $g \in \mathbb{G}$ порождается векторами $X_1(g), \ldots, X_N(g)$. Мы рассматриваем $HT_g\mathbb{G}$ с внутренним произведением таким, чтобы совокупность $\{X_1(g), \ldots, X_N(g)\}$ была ортонормированным базисом над $g \in \mathbb{G}$. Таким образом, $\mathbb{G}$ обладает субримановой структурой. Посредством экпоненциального отображения

$$\exp(x_1X_1 + \cdots + x_NX_N + t_1T_1 + \cdots + t_MT_M) = g$$

отождествляем элементы $g \in \mathbb{G}$ с точками

$$(x, t) = (x_1, \ldots, x_N, t_1, \ldots, t_M) \in \mathbb{R}^{N+M}.$$

Из формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа следует, что закон умножения в этих координатах записывается в виде

$$(x, t)(x', t') = \left(x + x', t_1 + t_1' + \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}^1 x_i x_j', \ldots, t_M + t_M' + \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}^M x_i x_j'\right),$$

где постоянные c_{ij}^s определены условием $[X_i, X_j] = 2\sum\limits_{s=1}^{M} c_{ij}^s T_s$ и удовлетворяют соотношениям $c_{ij}^s = -c_{ji}^s$, $i, j = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, M$.

Группа Энгеля $\mathbb{E}$ — это четырехмерная трехступенчатая группа Карно $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^4, \cdot)$, алгебра Ли которой $\mathfrak{g}(\mathbb{E}) = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$, $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = \dim V_3 = 1$. Такая группа единственна с точностью до изоморфизма. Для удобства выберем систему координат (x, y, z, t), в которой групповая операция имеет вид

$$(x, y, z, t) \cdot (x', y', z', t') = \left(x + x', y + y', z + z' + xy', t + t' + xz' + \frac{x^2 y'}{2}\right).$$

При этом алгебра левоинвариантных векторных полей имеет градуированный базис

$$X = \partial_x, \quad Y = \partial_y + x\partial_z + \frac{1}{2}x^2\partial_t, \quad Z = [X, Y] = \partial_z + x\partial_t, \quad T = [X, Z] = \partial_t.$$

1.3. Метрические структуры на группах Карно. *Однородная норма* [2, 3] на группе $\mathbb{G}$ — это непрерывная функция $\rho : \mathbb{G} \to [0, \infty)$, обладающая свойствами:

(a) $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = e$;

(b) $\rho(x) = \rho(x^{-1})$ и $\rho(\delta_t(x)) = t\rho(x)$;

(c) существует постоянная $C > 0$ такая, что $\rho(x \cdot y) \leq c(\rho(x) + \rho(y))$ для всех $x, y \in \mathbb{G}$.

Естественно, что однородная норма определяется неоднозначно, однако любые две однородные нормы ρ_1 и ρ_2 *эквивалентны* [2] между собой: существуют числа $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ такие, что $\alpha \leq \rho_1(x)/\rho_2(x) \leq \beta$ независимо от $x \in \mathbb{G}\setminus\{e\}$.

Однородная норма определяет *однородную квазиметрику*: для двух точек $x, y \in \mathbb{G}$ положим $\rho(x, y) = \rho(x^{-1}y)$. Квазиметрика обладает следующими свойствами, вытекающими из свойств (a)–(c) однородной нормы:

(a_1) $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

(b_1) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ и $\rho(\delta_t x, \delta_t y) = t\rho(x, y)$;

(c_1) для всех $x, y, z \in \mathbb{G}$ выполняется обобщенное неравенство треугольника $\rho(x, y) \leq C(\rho(x, z) + \rho(z, y))$ с постоянной $C > 0$ из п. (c).

Из зквивалентности однородных норм ρ_1 и ρ_2 выводим эквивалентность метрик: $\alpha\rho_2(x, y) \leq \rho_1(x, y) \leq \beta\rho_2(x, y)$ для всех $x, y \in \mathbb{G}$.

Относительно метрики $\rho(x, y)$ задаются сферы $S_\rho(x, t) = \{y \in \mathbb{G} : \rho(x, y) = t\}$ и шары $B_\rho(x, t) = \{y \in \mathbb{G} : \rho(x, y) < t\}$, причем сферы замкнуты, а шары открыты в топологии группы $\mathbb{G}$.

Далее фиксируем однородную норму элемента $x = (x_1; \dots; x_i; \dots; x_m) \in \mathbb{R}^N$, $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in_i}) \in V_i$, определенную по правилу

$$\rho(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^{2m!/i}\right)^{1/2m!}, \tag{1}$$

где $|x_i|$ — евклидова норма на V_i.

Предполагаем, что в алгебре Ли $\mathscr{G}$ задано скалярное произведение, относительно которого базисные левоинвариантные векторные поля $\{X_{ij}\}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i$, ортонормированы.

Расстоянием Карно — Каратеодори $d(x, y)$ между двумя точками $x, y \in \mathbb{G}$ называется нижняя грань длин всех *горизонтальных кривых* с концевыми точками x, y, где длина касательного вектора измеряется выбранной римановой метрикой на группе $\mathbb{G}$, а горизонтальная кривая есть кусочно-гладкий путь, касательный вектор к которому принадлежит V_1. Можно показать, что $d(x,y)$ всегда есть конечная левоинвариантная метрика, относительно которой группа автоморфизмов δ_t является группой растяжений с коэффициентом t: $d(\delta_t x, \delta_t y) = td(x,y)$ [1, 2]. По определению полагаем $d(x) = d(0,x)$. Можно показать, что $d(x)$ — однородная норма, поэтому расстояния $d(x,y)$ и $\rho(x,y)$ эквивалентны. Сферы и шары радиуса $t \geq 0$ в метрике Карно — Каратеодори будем обозначать символами $S_c(0,t)$ и $B_c(0,t)$ соответственно.

Эквивалентность метрических функций $d(x,y)$ и $\rho(x,y)$ приводит к тому, что тождественное отображение между метрическими пространствами $(\mathbb{G}, d(\cdot,\cdot))$ и $(\mathbb{G}, \rho(\cdot,\cdot))$ квазиизометрично.

1.4. Меры на группах Карно. Фиксируем далее биинвариантную меру Хаара на $\mathbb{G}$ (которая получается в результате переноса меры Лебега с алгебры Ли $\mathscr{G}$ на группу $\mathbb{G}$ посредством экспоненциального отображения, т. е. мера Хаара измеримого множества $A \subset \mathbb{G}$ равна мере Лебега множества $\exp^{-1}(A)$ на алгебре $\mathscr{G}$ [2, предложение 1.2]). Нормируем меру Хаара таким образом, чтобы мера Лебега $m(B_c(0,1))$ шара $B_c(0,1)$ была равна 1. Заметим, что нормирующий множитель в определении меры Хаусдорфа $\mathscr{H}^N(A)$ измеримого множества A на пространстве $\mathbb{R}^N$ с евклидовой метрикой можно выбрать таким образом, чтобы мера Хаусдорфа $\mathscr{H}^N(A)$ была равна его лебеговой мере.

Отсюда имеем соотношение $\mathscr{H}^N(\delta_t A) = t^\nu \mathscr{H}^N(A)$ для измеримого множества $A \subset \mathbb{G}$, где число $\nu = \sum\limits_{i=1}^{m} i n_i$ называется *однородной размерностью* группы $\mathbb{G}$.

Аналогично известной в пространстве $\mathbb{R}^n$ мере Хаусдорфа рассмотрим меру Хаусдорфа на метрическом пространстве $(\mathbb{G}, d)$. Для $k \geq 0$, $\delta \in (0, \infty]$ и множества $A \subset \mathbb{G}$ зададим величину

$$\mathscr{H}^k_\delta(A) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf\Big\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\operatorname{diam} A_i)^k : \operatorname{diam} A_i < \delta, A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \Big\},$$

где ω_k — некоторый нормирующий множитель, $\operatorname{diam} A_i = \sup\{d(x,y) : x, y \in A_i\}$, а инфимум берется по всем счетным покрытиям $\{A_i\}$ множества A. Если A не может быть покрыто счетным набором множеств указанного размера, полагаем $\mathscr{H}^k_\delta(A) = \infty$. Предел $\mathscr{H}^k(A) = \lim\limits_{\delta \to 0} \mathscr{H}^k_\delta(A)$ существует и называется *k-мерной мерой Хаусдорфа* множества A на $(\mathbb{G}, d)$.

Выберем нормирующий множитель ω_ν в определении меры Хаусдорфа так, чтобы $\mathscr{H}^\nu(B_c(0,1)) = 1$, где $B_c(0,1)$ — шар в метрике Карно — Каратеодори. Тогда $\mathscr{H}^\nu(B_c(0,r)) = r^\nu$. Более того, если $E \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, то $\mathscr{H}^\nu(\delta_t E) = t^\nu \mathscr{H}^\nu(E)$. Отметим, что однородная размерность ν группы $\mathbb{G}$ равна размерности Хаусдорфа пространства $(\mathbb{G}, d)$.

Из-за подходяще выбранных нормирующих множителей ν-мерная мера Хаусдорфа $\mathscr{H}^\nu(A)$ измеримого множества $A \subset \mathbb{G}$ равна его мере Лебега $\mathscr{H}^N(A)$.

1.5. Горизонтальные слоения на группах Карно. Фиксируем $1 \leq j \leq n_1$ и рассмотрим семейство кривых Γ_j, образующих гладкое слоение открытого множества $A \subset \mathbb{G}$. Роль слоя $\gamma \in \Gamma_j$ играют интегральные кривые горизонтального векторного поля $X_{1j} \in V_1$. Если соответствующий этому полю поток обозначить символом g_s, то слой имеет вид $\gamma(s) = g_s(p) = p \exp sX_{1j}$, где p принадлежит поверхности P, трансверсальной к векторному полю X_{1j}, а параметр s — числовой прямой $\mathbb{R}$. Предполагается, что слоение Γ_j множества A снабжено мерой $d\gamma_j$, удовлетворяющей соотношениям

$$\alpha r^{\nu-1} \le \int\limits_{\gamma\in\Gamma_j,\,\gamma_j\cap B_c(x,r)\neq\varnothing} d\gamma_j \le \beta r^{\nu-1} \tag{2}$$

для достаточно малых шаров $B_c(x,r) \subset \mathbb{G}$ с постоянными α и β, не зависящими от $B_c(x,r)$. Для слоения, определяемого векторным полем $X_{1j} \in V_1$, мера $d\gamma_j$ может быть получена как внутреннее произведение $i(X_{1j})$ векторного поля X_{1j} с биинвариантной формой объема dx (см. [5])[1].

Горизонтальные слоения на группах Карно — удобное понятие при определении абсолютно непрерывных функций (или отображений) на группах Карно: аналогом известного в евклидовом пространстве выражения «отображение абсолютно непрерывно на почти всех линиях, параллельных координатным осям» на группах Карно будет выражение «отображение абсолютно непрерывно на $d\gamma_j$-почти всех линиях горизонтального слоения Γ_j, $1 \le j \le n_1$».

1.6. Дифференцируемость на группах Карно. Пусть заданы две группы Карно $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ и D — область в $\mathbb{G}$. Отображение $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$ называется $\mathscr{P}$-*дифференцируемым* [1] в точке $x \in D$, если существует гомоморфизм $L : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ групп Карно такой, что $L(\exp V_1) \subset \exp \widetilde{V}_1$ и «разностное отношение»

$$\widetilde{\delta}_t^{-1}(\varphi(x)^{-1}\varphi(x\delta_t u)) \quad \text{сходится к} \quad L(u) \tag{3}$$

при $t \to 0+$ равномерно по $u \in B_c(0,1)$. Здесь $\widetilde{\delta}_t$ — однопараметрическая группа растяжений на $\widetilde{\mathbb{G}}$, $\widetilde{V}_1$ — горизонтальное подпространство алгебры Ли $\widetilde{\mathscr{G}}$ группы $\widetilde{\mathbb{G}}$.

В [1] доказано, что всякое определенное на открытом множестве D липшицево отображение $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$ *$\mathscr{P}$-дифференцируемо* $\mathscr{H}^\nu$-п. вс. в D.

Специализируя сходимость в (3) в других топологиях, приходим к различным понятиям дифференцируемости. Так, сходимость в (3) по мере на шаре $B_c(0,1)$ приводит к понятию *аппроксимативной* дифференцируемости (см. [6]), а сходимость в топологии пространства Соболева — к дифференцируемости в топологии пространства Соболева (см. [7]).

2. Классы Соболева на группах Карно

Пусть D — область в $\mathbb{G}$. Локально суммируемая функция $f : D \to \mathbb{R}$ принадлежит классу Соболева $L_p^1(D)$, $p \in [1,\infty]$, если обобщенные производные $X_{1j}f$, $j = 1,\dots,n$, вдоль векторных полей X_{1j} принадлежат $L_p(D)$. Пространство $L_p^1(D)$, $p \in [1,\infty]$, рассматривается с *полунормой*

$$\bigl\| f \mid L_p^1(D) \bigr\| = \Bigl(\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}} f|^p(x)\,dx \Bigr)^{\frac{1}{p}},$$

где вектор $\nabla_{\mathscr{L}} f(x) = (X_{11}f(x),\dots,X_{1n_1}f(x)) \in V_1$ называется *субградиентом* функции f. Если дополнительно к предыдущим свойствам исходная функция

[1] Если dx — форма объема на $\mathbb{G}$ (степени N), то $i(X_{1j})$ — форма степени $N-1$, которая на гладких векторных полях $Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}$, определенных на $\mathbb{G}$, принимает значение $i(X_{1j})(Y_1,Y_2,\dots,Y_{N-1}) = dx(X_{1j},Y_1,Y_2,\dots,Y_{N-1})$.

$f : D \to \mathbb{R}$ суммируема, то совокупность таких функций с конечной нормой

$$\|f \mid W_p^1(D)\| = \Big(\int\limits_D |f|^p(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}} f|^p(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

образует пространство Соболева $W_p^1(D)$, $p \in [1,\infty]$.

Пусть заданы две группы Карно $\mathbb{G}$ и $\mathbb{G}'$, а D — область в $\mathbb{G}$. Отображение $\varphi : D \to \mathbb{G}'$ называется *абсолютно непрерывным на линиях* ($\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$), если для любой области U, $\overline{U} \subset D$, и слоения Γ_j области U, определяемого левоинвариантным векторным полем X_{1j}, $j = 1,\dots,n_1$, отображение φ абсолютно непрерывно на $\gamma \cap U$ относительно $\mathscr{H}^1$-меры Хаусдорфа для $d\gamma_j$-почти всех кривых $\gamma \in \Gamma_j$. Для такого отображения $\mathscr{H}^\nu$-почти всюду в D существуют [1, предложение 4.1] производные $X_{1j}\varphi$ вдоль векторных полей X_{1j}, $j = 1,\dots,n_1$, такие, что $X_{1j}\varphi(x) \in V_1(x)$.

Матрица $D_h\varphi(x) = (X_{1i}\varphi_{1j}(x))$, $i = 1,\dots,n_1$, $j = 1,\dots,n_1'$, определенная п. вс. в D, определяет линейный оператор $D_h\varphi(x) : V_1 \to V_1'$, $\dim V_1' = n_1'$, из горизонтального пространства V_1 в горизонтальное пространство V_1' группы $\mathbb{G}'$, называемый *горизонтальным дифференциалом* отображения φ в точке x; $|D_h\varphi(x)|$ обозначает норму этого оператора.

Алгебраически-аналитическая специфика группы Карно проявляется в том, что горизонтальный дифференциал $D_h\varphi(x) : V_1 \to V_1'$ порождает [6, теорема 1.2] гомоморфизм $D\varphi(x) : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ групп Карно, называемый $\mathscr{P}$-дифференциалом (см. разд. 1.1.6), при этом их нормы оцениваются одна через другую:

$$|D_h\varphi(x)| \le |D\varphi(x)| \le C|D_h\varphi(x)|,$$

где C зависит только от алгебраической структуры группы $\mathbb{G}$. Известно [6, теорема 1.2], что для почти всех $x \in D$ гомоморфизм $D\varphi(x)$ является *аппроксимативным дифференциалом* отображения $\varphi : D \to \mathbb{G}'$, если $\varphi \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$.

Отображение $\varphi : D \to \mathbb{G}'$ принадлежит классу Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $p \in [1,\infty)$, если $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$ и для каждой компактно вложенной области $U \Subset D$ (т. е. замыкание $\overline{U}$ компактно и содержится в D) норма

$$\|\varphi \mid W_p^1(U)\| = \|\rho(\varphi(\cdot)) \mid L_p(U)\| + \Big(\int\limits_U |D_h\varphi(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

конечная. Описания отображений классов Соболева, эквивалентные вышеприведенному, см. в [6, предложение 4.1; 7, предложение 1].

3. Замена переменной для отображений классов Соболева на группах Карно

3.1. Замена переменной в интеграле Лебега для интегрируемых функций. Далее рассматриваем совпадающие группы $\mathbb{G}$ и $\mathbb{G}'$ и отображение $\varphi : D \to \mathbb{G}$, $D \subset \mathbb{G}$, принадлежащее классу Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $p \in [1,\infty)$.

Определитель $\det D\varphi(x)$ матрицы гомоморфизма $D\varphi(x)$ называется так же, как и в $\mathbb{R}^n$, *якобианом* отображения φ в точке x. Его геометрический смысл состоит в том, что для гомеоморфизма $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{G}$, класса Соболева верны следующие равенства:

$$D \ni x = \lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^N(\varphi(B_c(x,r)))}{\mathscr{H}^N(B_c(x,r))} = |\det D\varphi(x)| \tag{4}$$

для $\mathscr{H}^\nu$-почти всех $x \in D$. Равенства (4) можно получить с помощью приводимой ниже формулы замены переменной (6) и теоремы Лебега о дифференцировании интеграла на группе Карно (см., например, [2, предложение 1.20]).

Определение 1. Для отображения $\varphi : D \to \mathbb{G}$ на группе Карно класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$ определим борелевское множество $Z = \{x \in D : \det D\varphi(x) = 0\}$ *нулей якобиана* и множество сингулярности

$$\Sigma \subset D \tag{5}$$

меры нуль, в точках которого аппроксимативный дифференциал $D\varphi(x)$ *не определен.* Множество Σ можно считать борелевским и таким, что $Z \cap \Sigma = \varnothing$.

Зададим еще множества $Z' = \varphi(\Sigma)$ и $\Sigma' = \varphi(Z)$.

Приведем классическую формулу замены переменной в интеграле Лебега (см., например, [8, теоремы 3.1.8, 3.2.3] или [6, теорема 5.3]), используемую ниже.

Предложение 1. *Предположим, что отображение $\varphi : D \to \mathbb{G}$, $D \subset \mathbb{G}$, принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ (или имеет аппроксимативные частные производные вдоль горизонтальных векторных полей X_{1j}, $j = 1, \dots, n_1$, п. вс. в D). Тогда вне борелевского множества $\Sigma \subset D$ (см. (5)) нулевой меры отображение $\varphi : D \setminus \Sigma \to \mathbb{G}$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина и для любой неотрицательной измеримой интегрируемой функции $u : D \to \mathbb{R}$ (или измеримой функции $u : D \to \mathbb{R}$ такой, что $u(\cdot)\det D\varphi(\cdot) \in L_1(D)$) верна формула*

$$\int\limits_D u(x)|\det D\varphi(x)|\, d\mathscr{H}^\nu(x) = \int\limits_{\mathbb{G}} \sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\cap(D\setminus\Sigma)} u(x)\, d\mathscr{H}^\nu(y). \tag{6}$$

3.2. Замена переменной в интеграле Лебега с топологическими инвариантами. Обычно формула замены переменной доказывается для непрерывных преобразований области, имеющих достаточные дифференциальные свойства.

В этом пункте для отображений класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$ докажем формулу замены переменной в интеграле Лебега, используя обычную топологическую терминологию. Будем использовать понятия кратности отображения в точке и индекса зацепления.

Определение 2. *Компактной областью* в $\mathbb{G}$ назовем ограниченное замкнутое множество Ω со связной внутренностью, замыкание внутренности которого совпадает с ним самим. *Цикл* — это образ $\partial\Omega$ (границы Ω) при непрерывном отображении $f : \partial\Omega \to \mathbb{G}$. Для произвольного непрерывного продолжения $F : \Omega \to \mathbb{G}$ отображения f определена *степень* $\mu(y, F)$ отображения F в каждой точке $y \in \mathbb{G} \setminus f(\partial\Omega)$. Положим *индекс зацепления* $\chi(y, f(\partial\Omega))$ равным $\mu(y, F)$ для $y \neq f(\partial\Omega)$. Свойства степени можно найти в [9, 10].

Сформулируем несколько простых свойств индекса зацепления, необходимых для дальнейшего. Они являются очевидными следствиями свойств степени отображения.

Свойство 1 (свойства индекса зацепления). 1. Индекс зацепления не зависит от выбора продолжения F исходного отображения $f : \partial\Omega \to \mathbb{G}$.

2. Пусть отображения $f_1 : \partial\Omega \to \mathbb{G}, f_2 : \partial\Omega \to \mathbb{G}$ непрерывны, Δ — произвольная область в $\mathbb{G}$, не пересекающаяся с циклами $f_1(\partial\Omega), f_2(\partial\Omega)$, и отображения $f_1 : \partial\Omega \to \mathbb{G}\backslash\Delta$, $f_2 : \partial\Omega \to \mathbb{G}\backslash\Delta$ гомотопны, т. е. существует непрерывное

отображение $g : \partial\Omega \times [0,1] \to \mathbb{G}\setminus\Delta$ такое, что $g|_{\partial\Omega\times 0} \equiv f_1$ и $g|_{\partial\Omega\times 1} \equiv f_2$. Тогда $\chi(y, f_1(\partial\Omega)) = \chi(y, f_2(\partial\Omega))$ для всех $y \in \Delta$.

3. Индекс зацепления $\chi(y, f(\partial\Omega))$ постоянен на каждой компоненте связности множества $\mathbb{G}\setminus f(\partial\Omega)$; $\chi(y, f(\partial\Omega)) \equiv 0$ на неограниченной компоненте множества $\mathbb{G}\setminus f(\partial\Omega)$.

4. Пусть $f_m : \partial\Omega \to \mathbb{G}$ $(m = 1, 2, \dots)$ — последовательность непрерывных отображений, равномерно сходящаяся к f при $m \to \infty$; Δ — компактная область, не пересекающаяся с $\partial\Omega$. Существует m_0 такое, что при любом $m \geq m_0$ функция $\chi(y, f_m(\partial\Omega))$ определена на $\triangle$ и совпадает на этой области с $\chi(y, f(\partial\Omega))$. Выбор числа m_0 зависит только от расстояния $\rho(\Delta, f(\partial\Omega))$.

Кратность $N(y, \varphi, A)$ отображения $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ в точке $y \in \mathbb{G}$ относительно множества $A \subset \Omega$ — это число элементов множества $\varphi^{-1}(y) \cap A$ в том случае, когда это пересечение конечное, ($N(y, \varphi, A) = 0$, если $\varphi^{-1}(y) \cap A = \varnothing$), и $N(y, \varphi, A) = \infty$, если множество $\varphi^{-1}(y) \cap A$ бесконечно. Очевидно, что в условиях предложения 1 кратность $N(y, \varphi, A)$ равна $\sum\limits_{\varphi^{-1}(y)\cap(A\setminus\Sigma)} 1$ для п. вс. $y \in \mathbb{G}$ и является измеримой функцией.

Отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ обладает *$\mathscr{N}$-свойством Лузина*, если образ множества меры нуль есть множество меры нуль.

В [8] (см. также [6, теорема 6.2] и [7, теорема 4]) для гладких в римановом смысле отображений $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ на группе Карно доказано следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ принадлежит классу $C^1(\Omega)$ в римановом смысле. Пусть $U \Subset \Omega$ — некоторая компактная область такая, что $|\varphi(\partial U)| = 0$.*

Тогда для любой измеримой функции $u : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ такой, что произведение $u(\varphi(x)) \det \mathscr{D}\varphi(x)$[2)] *суммируемо на U, справедлива формула*

$$\int\limits_U u(\varphi(x)) \det \mathscr{D}\varphi(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{G}} u(y)\chi(y, \varphi(\partial U))\, dy. \tag{7}$$

Более того, для почти всех $y \in \mathbb{G}$ справедливо равенство

$$\chi(y, \varphi(\partial U)) = \sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\cap U} \operatorname{sign} \det \mathscr{D}\varphi(x).$$

Величину

$$V(U, \varphi) = \int\limits_U \det \mathscr{D}\varphi(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{G}} \chi(y, \varphi(\partial U))\, dy$$

естественно называть *ориентированным объемом*, ограниченным φ.

Ниже в теореме 1 и предложении 5 условия на отображение φ, при которых верны выводы предложения 2, будут значительно ослаблены.

3.3. Следуя [11] или [12], со всяким пространством Соболева $W^1_p(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, можно ассоциировать полуаддитивную функцию $C(A)$, определенную на всех подмножествах $A \subset \Omega \subset \mathbb{G}$, называемую $(1, p)$-емкостью. В ряде вопросов функция $C(A)$ дает для пространства $W^1_p(\Omega)$ более тонкую характеристику

2) Здесь и далее обозначаем символом $\mathscr{D}\varphi(x)$ риманов дифференциал отображения $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ в точке x.

сравнительно с мерой Лебега (достаточно напомнить, что множество нулевой $(1,p)$-емкости имеет нулевую меру Лебега). Точное определение $(1,p)$-емкости можно найти в [11, 12]. В данной работе эта характеристика применяется только при $p=\nu$. Свойства $(1,\nu)$-емкости формулируются по мере необходимости.

Элемент пространства $W^1_\nu(\Omega)$ представляет класс функций, совпадающих почти всюду. В этом классе можно выбрать функцию, поведение которой хорошо связано с $(1,\nu)$-емкостью.

Функция $u\in W^1_\nu(\Omega)$ называется $(1,\nu)$-*уточненной*, если для любого $\varepsilon>0$ существует открытое множество V такое, что $C(V)<\varepsilon$, вне которого u непрерывна.

Термин «*квазивсюду*» будет значить: всюду за исключением множества $(1,\nu)$-емкости нуль.

Перечислим основные свойства $(1,\nu)$-уточненных функций, доказанные в [11, 12].

Свойство 2 (свойства $(1,\nu)$-уточненных функций). 1. Если $u\in W^1_\nu(\Omega)$, то существует $(1,\nu)$-уточненная функция $\widetilde{u}$, совпадающая с u почти всюду.

2. Если функции $u_1,u_2\in W^1_\nu(\Omega)$ совпадают почти всюду и $(1,\nu)$-уточнены, то u_1 и u_2 совпадают квазивсюду.

3. Всякая последовательность $(1,\nu)$-уточненных функций, сходящаяся в $W^1_\nu(\Omega)$ к $(1,\nu)$-уточненной функции, содержит подпоследовательность, сходящуюся квазивсюду.

4. Рассмотрим семейство сфер $\{S(x_0,r)\}$, $x_0\in\Omega$, $r<r_0=\frac{1}{2}\rho(x_0,\partial\Omega)$. Если функция $u\in L^1_\nu(\Omega)$ $(1,\nu)$-уточнена, то она непрерывна на сферах $S(x_0,r)$ при почти всех $r\in(0,r_0)$.

5. Если последовательность $u_m\in W^1_\nu(\Omega)$ $(1,\nu)$-уточненных функций сходится к $(1,\nu)$-уточненной функции u в $W^1_\nu(\Omega)$, то она содержит подпоследовательность u_{m_k}, сходящуюся к u равномерно на почти каждой сфере $S(x_0,r)\subset\Omega$, $r\in(0,r_0)$, $r_0=\frac{1}{2}\rho(x_0,\partial\Omega)$.

6. Рассмотрим две сферы: $S_0=S(x_0,r_0)$ и $S_1=S(x_1,r_1)$, предполагая, что $S_1\subset B(x_0,r_0)$. Фиксируем горизонтальное векторное поле X_{1j}, слоение Γ_j открытого шара $B(x_1,r_1)$ и меру $d\gamma_j$ на слоении Γ_j (см. (2)). Напомним, что каждый слой слоения Γ_j имеет вид $\gamma(s)=g_s(p)=p\exp sX_{1j}$, где p принадлежит поверхности $P=\{x\in\mathbb{G}:x_{1j}=0\}$, трансверсальной к векторному полю X_{1j}, а параметр s — числовой прямой $\mathbb{R}$.

Если функция $u\in L^1_\nu(\Omega)$ $(1,\nu)$-уточнена, то на $d\gamma_j$-почти всех слоях слоения Γ_j она абсолютно непрерывна на всяком замкнутом отрезке l_p в пересечении слоя $p\exp sX_{1j}$, $s\in\mathbb{R}$, $p\in P$, с Ω.

С этого момента будем рассматривать только $(1,\nu)$-уточненные функции, что особо оговариваться не будет.

В доказательстве следующей теоремы применим аппроксимацию отображения класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$ гладкими. Подходящие аппроксимации получены в [13–15]. Нам нужны будут свойства аппроксимаций, сформулированные в следующей лемме.

Лемма 1 (о свойствах аппроксимирующих последовательностей). *Пусть отображение $\varphi=(\varphi_{ij})_{1\le i\le m,\,1\le j\le n_i}:\Omega\to\mathbb{G}$ принадлежит классу $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Тогда для любой компактно вложенной области $D\Subset\Omega$ существует последовательность гладких отображений*

$$\varphi_l=\big(\varphi^{(l)}_{ij}\big)_{1\le i\le m,\,1\le j\le n_i}:D\to\mathbb{G}$$

таких, что

1) $\varphi_{ij}^{(l)} \to \varphi_{ij}$ *в* $W_\nu^1(D)$ *при* $l \to \infty$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n_i$;

2) $\det \mathscr{D}\varphi_l \to \det D\varphi$ *в* $L_1(D)$ *при* $l \to \infty$.

(Здесь и далее $\mathscr{D}\varphi_l$ — риманов дифференциал гладкого отображения $\varphi_l : \Omega \to \mathbb{G}$.)

Описание конструкции аппроксимации и доказательство сформулированных свойств см. в [13, лемма 2.1, теорема 3.5] для двухступенчатых групп Карно, в [14, теорема 1.1] для группы Энгеля и в [15, теорема 4.3] для общих групп Карно.

Теорема 1. *Пусть отображение* $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ *принадлежит классу* $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$. *Тогда для всякого открытого шара* $U = B(z,r) \Subset \Omega$, *для которого ограничение* $\varphi|_{\partial U}$, $\partial U = S(z,r)$, *непрерывно*[3)], *имеет место формула для ориентированного объема:*

$$V(U,\varphi) = \int\limits_{U\setminus\varphi^{-1}(\varphi(\partial U))} \det D\varphi(x)\,dx = \sum_{i\ge1} \chi_i m(V_i). \tag{8}$$

Здесь V_i, $i = 1,2,\dots,$ — *ограниченные компоненты дополнения* $\mathbb{G}\setminus\partial U$, *а* χ_i — *соответствующий* V_i *индекс зацепления, т. е.* $\chi_i = \chi_i(y)$ *в точках* $y \in V_i$. *Ряд в формуле* (8) *сходится абсолютно.*

Далее, если $u : \mathbb{G}\setminus\varphi(\partial U) \to \mathbb{R}$ — *ограниченная непрерывная функция, то*

$$\int\limits_{U\setminus\varphi^{-1}(\varphi(\partial U))} u(\varphi(x)) \det D\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{G}\setminus\varphi(\partial U)} u(y)\chi(y,\varphi(\partial U))\,dy. \tag{9}$$

Доказательство. Формула (8) известна для гладких отображений φ. В условиях теоремы формула (8) может быть получена из формулы (9) для функции $u : \mathbb{G}\setminus\varphi(\partial U) \to \mathbb{R}$, тождественно равной 1.

Формулу (9) докажем в два шага.

Шаг 1. Пусть $u \in C_0(\mathbb{G}\setminus\varphi(\partial U))$ — произвольная непрерывная ограниченная функция, равная нулю в некоторой окрестности $\varphi(\partial U)$.

Для гладких отображений $\{\varphi_l : D \to \mathbb{G}\}$, $l = 1,2,\dots$, $U \Subset D \Subset \Omega$, леммы 1, сходящихся в $W^1_\nu(D)$ к φ, свойство 2 (п. 4) $(1,\nu)$-уточненных функций позволяет считать последовательность φ_l сходящейся к φ квазивсюду. По свойству 2 (пп. 4, 5) последовательность ограничений $\varphi_l(\partial U)$ можно считать равномерно сходящейся к $\varphi(\partial U)$.

Следовательно, для достаточно больших l таких, что $\varphi_l(\partial U)\cap\operatorname{supp} u = \varnothing$, по предложению 2 имеем

$$\int\limits_U u(\varphi_l(x)) \det \mathscr{D}\varphi_l(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{G}\setminus\varphi(\partial U)} u(y)\chi(y,\varphi_l(\partial U))\,dy. \tag{10}$$

Правая часть формулы (10) не зависит от отображений φ_l при достаточно больших l. Предельный переход в левой части основан на том, что последовательность $u(\varphi_l(x))$ ограничена в совокупности, композиции $u(\varphi_l(x))$ сходятся к композиции $u(\varphi(x))$ квазивсюду в U, а последовательность якобианов $\{\det \mathscr{D}\varphi_l(x)\}$ сходится к $\det D\varphi(x)$ в $L_1(U)$. Равенство (9) для функции $u \in C_0(\mathbb{G}\setminus\varphi(\partial U))$ доказано.

3) Здесь следует принять во внимание лемму 1 и свойство 2 (пп. 3, 4), чтобы и ограничение $\varphi|_{\partial U}$ было непрерывным, и сходимость $\varphi_l|_{\partial U} \to \varphi|_{\partial U}$ при $l \to \infty$ была равномерной (см. свойство 2 (п. 6), а детали в [11]).

Шаг 2. Пусть $u : \mathbb{G} \setminus \varphi(\partial U) \to \mathbb{R}$ — произвольная ограниченная непрерывная функция, а u_0 — ее продолжение нулем на $\mathbb{G}$. Пусть

$$W_m = \{y \in \mathbb{G} : d(y, \varphi(\partial U)) < 1/m\}$$

— окрестность образа $\varphi(\partial U)$. Функция $u_m = \min(1, 2m \operatorname{dist}(x, \overline{W}_{2m}))u_0$ ограничена, непрерывна и равна нулю на W_{2m} (здесь $m \in \mathbb{N}$ — настолько большое число, что дополнение $\varphi(U) \setminus W_{2m}$ имеем положительную меру). Для каждой функции u_m справедлива формула (9):

$$\int\limits_U u_m(\varphi(x)) \det D\varphi(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{G}\setminus\varphi(\partial U)} u_m(y)\chi(y, \varphi(\partial U))\, dy. \tag{11}$$

Последовательность u_m сходится к функции u поточечно, поэтому композиции $u_m(\varphi(x))$ сходятся к композиции $u_0(\varphi(x))$ квазивсюду в U. Следовательно, в левой части (11) можно перейти к пределу по теореме Лебега при $m \to \infty$ и получить равенство

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_U u_m(\varphi(x)) \det D\varphi(x)\, dx = \int\limits_U u_0(\varphi(x)) \det D\varphi(x)\, dx. \tag{12}$$

Шаг 3. Перейдем к обоснованию предельного перехода в правой части (11). Для этого докажем, что ряд в правой части равенств (8) сходится абсолютно. Фиксируем компоненту связности V_i дополнения $\mathbb{G} \setminus \varphi(\partial U)$. Применим рассуждения предыдущего шага к функции

$$v_i(y) = \begin{cases} \operatorname{sign}(\chi(y, \varphi(\partial U))), & \text{если } y \in V_i, \\ 0, & \text{если } y \in (G \setminus \varphi(\partial U)) \setminus V_i, \end{cases}$$

вместо u. Рассмотрим на шаге 2 функцию v_i вместо u. По формуле (11) для функции $v_{i,m}$ вместо u_m имеем

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(V_i)} v_{i,m}(\varphi(x)) \det D\varphi(x)\, dx = \int\limits_{V_i} v_{i,m}(y)\chi(y, \varphi(\partial U))\, dy. \tag{13}$$

Переходя в (13) к пределу при $m \to \infty$, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(V_i)} v_i(\varphi(x)) \det D\varphi(x)\, dx = \int\limits_{V_i} v_i(y)\chi(y, \varphi(\partial U))\, dy.$$

Суммируя полученное равенство по i, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \int\limits_U |\det D\varphi(x)|\, dx &\geq \sum_{i\geq 0} \int\limits_{\varphi^{-1}(V_i)} |\det D\varphi(x)|\, dx \\ &\geq \sum_{i\geq 0} \left| \int\limits_{\varphi^{-1}(V_i)} v_i(\varphi(x)) \det D\varphi(x)\, dx \right| \\ &= \sum_{i\geq 1} \int\limits_{V_i} |\chi(y, \varphi(\partial U))|\, dy = \sum_{i\geq 1} |\chi_i| m(V_i). \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что ряд в правой части равенств (8) сходится абсолютно. Следовательно, в правой части равенства (11) можно перейти к пределу по теореме Лебега:

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\mathbb{G}\setminus\varphi(\partial U)} u_m(y)\chi(y,\varphi(\partial U))\,dy = \int\limits_{\mathbb{G}\setminus\varphi(\partial U)} u(y)\chi(y,\varphi(\partial U))\,dy. \tag{14}$$

Предельные переходы в (12) и (14) позволяют из (11) вывести равенство (9). $\square$

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если обозначить через K_0 класс непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{G}\setminus\varphi(\partial U)$, продолженных нулем на группу G, то формула* (9) *верна для любой функции из класса K_m, $m \geq 0$, где классы K_m строятся по индукции: K_m, $m \geq 1$, состоит из ограниченных функций, получающихся из класса K_{m-1} поточечным предельным переходом.*

Доказательство. База индукции. Если $u_m \in C_0(\mathbb{G} \setminus \varphi(\partial U))$ — последовательность непрерывных ограниченных в совокупности функций, сходящаяся поточечно к функции $u \in K_1$, то для каждой из них справедлива формула (9) (см. (11)) и, кроме того, в (11) возможен предельный переход при $m \to \infty$, результатом которого будет формула (9) для функции $u \in K_1$.

Аналогично предыдущему можно получить индукционный шаг для любого $m \geq 1$. $\square$

4. Топологические свойства отображений класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$

Открытый шар в $\mathbb{G}$ радиуса r с центром в точке x_0 будем обозначать через $B(x_0,r)$, а ограничивающую его сферу — через $S(x_0,r)$. Отображение $\varphi \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$ непрерывно вне некоторого множества V малой емкости. Множество малой емкости имеет малую линейную меру Хаусдорфа [11]. Сопоставление этих фактов позволяет заметить, что φ непрерывно на сферах $S(x_0,r)$ ($x_0 \in \Omega$ полагается фиксированным) при почти всех r, меньших $\frac{1}{2}\rho(x_0,\partial\Omega)$. Для всех таких r можно определить индекс зацепления $\chi(y,\varphi(S(x_0,r)))$ для всех $y \in \mathbb{G} \setminus \varphi(S(x_0,r))$.

Отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *топологически невырожденно* в точке $x_0 \in \Omega$, если существует такое положительное число $r_0(x_0) < \rho(x_0,\partial\Omega)$, что для почти всех $r \in (0, r_0(x_0))$ множество $\mathbb{G}\setminus\varphi(S(x_0,r))$ содержит непустую ограниченную компоненту V_i, индекс зацепления χ_i которой не равен нулю.

Во всех остальных случаях будем называть отображение φ *топологически вырожденным* в точке x_0.

Исследуем связь топологической невырожденности отображения с «функциональной невырожденностью».

Если отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ принадлежит классу $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$, то для почти всех $x_0 \in \Omega$ по известной теореме Лебега якобиан $\det D\varphi(x)$ совпадает с пределом

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x_0,r))} \int\limits_{B(x_0,r)} \det D\varphi(x)\,dx = \det D\varphi(x_0). \tag{15}$$

Нас интересуют точки, в которых выполнено равенство (15) и якобиан невырожденный.

Лемма 2. *Если в точке x_0 выполнено равенство* (15) *и* $\det D\varphi(x_0) \neq 0$, *то в этой точке отображение φ топологически невырожденное.*

Доказательство. Выберем r_0 так, чтобы при всех $r < r_0$

$$\int\limits_{B(x_0,r)} \det D\varphi(x)\,dx \neq 0.$$

Выбор такого $r_0 < \rho(x_0, \partial\Omega)$ возможен по условиям леммы. Для почти всех $r < r_0$ ограничение отображения φ на сферу $S(x_0, r)$ непрерывно. Следовательно, для этих сфер выполнены условия теоремы 1 и верна формула

$$\int\limits_{B(x_0,r)\setminus\varphi^{-1}(\varphi(S(x_0,r))} \det D\varphi(x)\,dx = \sum_{i=1} \chi_i m(V_i),$$

где V_i — связные ограниченные компоненты множества $\mathbb{G}\setminus\varphi(S(x_0,r))$, а χ_i — соответствующий индекс зацепления.

Левая часть равенства ненулевая, поэтому правая — также ненулевая и хотя бы одно из чисел χ_i ненулевое. $\square$

Для непрерывных отображений невырожденность индекса зацепления означает, что область накрывается отображением. Это верно и для отображений класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$, но в смысле «почти всюду».

Лемма 3. *Пусть $U = B(z,r) \Subset \Omega$ — компактная область, на которой отображение $\varphi|_{\partial U}$ непрерывно. Если на компоненте связности V_i множества $\mathbb{G}\setminus\varphi(\partial U)$ индекс зацепления χ_i ненулевой, то для почти всех $y \in V_i$ существует точка $x \in U$, образ которой $\varphi(x) = y$.*

Доказательство. В измеримом множестве $A = V_i \setminus \varphi(U)$ точек, не накрываемых отображением $\varphi|_U$, выберем любое компактное множество $F \subset A$ положительной меры. Характеристическая функция χ_F множества F может быть представлена как поточечный предел ограниченных непрерывных функций из $C_0(\mathbb{G} \setminus \partial U)$. Применим к функции χ_F следствие 1:

$$\int\limits_U \chi_F(\varphi(x)) \det D\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{G}\setminus\varphi(\partial U)} \chi_F(y)\chi(y, \varphi(\partial U))\,dy$$
$$= \int\limits_F \chi(y, \varphi(\partial U))\,dy = \chi_i\, m(F).$$

Функция $\chi_F(\varphi(x))$ тождественно нулевая, поэтому $m(F) = 0$. Полученное противоречие приводит к выводу, что $m(V_i \setminus \varphi(U)) = 0$. $\square$

Из лемм 2 и 3 выводим следующее утверждение.

Лемма 4. *Если в точке $x_0 \in \Omega$*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x_0,r))} \int\limits_{B(x_0,r)} \det D\varphi(x)\,dx = \det D\varphi(x_0)$$

и $\det D\varphi(x_0) \neq 0$, то для всякой области $U \subset \Omega$ из условия $x_0 \in U$ следует $m(\varphi(U)) \neq 0$.

5. Достаточные условия монотонности и непрерывности

5.1. Отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$ будем называть *монотонным* в точке $x \in \Omega$, если для почти всех $r \in (0, r(x)), 0 < r(x) \leq \frac{1}{2}\rho(x, \partial\Omega)$, прообраз пересечения множества $\varphi(B(x,r))$ с неограниченной компонентой к циклу $\varphi(S(x,r))$ имеет меру нуль в $B(x,r)$. Отображение *монотонно* в области Ω, если оно монотонно в каждой точке этой области.

В конце этого раздела будет доказано, что всякое монотонное отображение класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$ квазимонотонно (см. определение ниже). Хорошо известно, что квазимонотонные функции класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$ непрерывны [16, предложение 3.8]. Поэтому достаточные условия монотонности отображений класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$ одновременно являются и достаточными условиями непрерывности.

Возьмем некоторую область $U \Subset \Omega$ в $\mathbb{G}$ и отображение $\varphi \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G}')$, $\nu - 1 < p \leq \nu$, где $\mathbb{G}'$ — еще одна группа Карно. Напомним, что все координатные функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N'}$ принадлежат $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R})$ (см. [6, предложение 4.2]). Удалим из U множество нулевой меры, чтобы получить общую область определения $\widetilde{U} \subset U$ всех координатных функций, для которых каждая точка $\widetilde{U}$ будет точкой Лебега всех координатных функций. Известно (см., например, [17]), что множество $U \setminus \widetilde{U}$ имеет нулевую $(1,p)$-емкость.

Согласно [11, предложение 5] ограничение любой координатной функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N'}$ на сферу $S(x,r) = \{y \in \mathbb{G} : \rho(x,y) = r\} \subset U$ непрерывно для всех $x \in U$ и почти всех $r \in \frac{1}{2}(0, \operatorname{dist}(x, \partial U))$[4)].

Следовательно, заданное отображение $\varphi \in W^1_\nu(\Omega; \mathbb{G}')$ также непрерывно на сфере $S(x,r) = \{y \in \mathbb{G} : \rho(x,y) = r\} \subset U$ для всех $x \in U$ и почти всех $r \in \frac{1}{2}(0, \operatorname{dist}(x, \partial U))$.

Отображение $\varphi \in W^1_p(\Omega; \mathbb{G}')$, $\nu - 1 < p \leq \nu$, называется *K-квазимонотонным* на $U \Subset \Omega$, где $K \in [1, \infty)$ — некоторая константа, если φ удовлетворяет следующему условию: для каждой точки $a \in U$ существует $r_a > 0$ такое, что для почти всех $r \in (0, r_a)$ имеем

$$\operatorname*{osc}_{B(a,r)\cap\widetilde{U}} \varphi = \operatorname{diam}(\varphi(B(a,r) \cap \widetilde{U})) \leq K \operatorname{diam}(\varphi(S(a,r)))$$

на шаре $B(a,r) \subset U$, где $B(a,r) = \{y \in \mathbb{G} : \rho(a,y) < r\} \subset U$. (Здесь диаметр множества $A \subset \mathbb{G}'$ равен $\sup\limits_{x,y \in A} \rho'(x,y)$.)

Лемма 5. *Пусть Ω — область в группе Карно $\mathbb{G}$. Всякое монотонное отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}'$ класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$ квазимонотонно на любом открытом множестве $U \Subset \Omega$.*

Доказательство. Действительно, если отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}'$ класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$ не квазимонотонное, то для достаточно большого $K \in [1, \infty)$ найдется точка $a \in U$ такая, что для всякого $r_a \in (0, \operatorname{dist}(a, \partial U))$ существует множество $T \subset (0, r_a)$ положительной меры такое, что на всяком шаре $B(a,r) \Subset U$, $r \in T$, имеем соотношение

$$\operatorname*{osc}_{B(a,r)\cap\widetilde{U}} \varphi = \operatorname{diam}(\varphi(B(a,r) \cap \widetilde{U})) > K \operatorname{diam}(\varphi(S(a,r))).$$

---

4) Согласно свойствам множеств нулевой емкости (см. [11, предложение 5]) имеем совпадение $S(x,r) = \{y \in U : \rho(x,y) = r\} = \{y \in \widetilde{U} : \rho(x,y) = r\}$ для всех $x \in U$ и для почти всех $r \in \left(0, \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x, \partial U)\right)$.

Из последнего неравенства имеем, что найдется хотя бы одна точка $z \in B(a,r) \cap \widetilde{U}$ такая, что $\varphi(z)$ принадлежит неограниченной компоненте V_0 к циклу $\varphi(S(a,r))$. Так как точка z — это точка Лебега для каждой координатной функции отображения φ, то в точке z отображение φ аппроксимативно непрерывно. Из этого свойства выводим, что для любой окрестности $W \subset V_0$ точки $\varphi(z)$ множество $\{x \in B(a,r) : \varphi(x) \in W\}$ имеет положительную меру. Последнее противоречит монотонности отображения φ. $\square$

5.2. В этом разделе исследуем свойства отображения $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Из леммы 3 ясно, что для доказательства монотонности отображения φ следует рассмотреть те компоненты V_i дополнения $\mathbb{G}\backslash\varphi(S(x,r))$, на которых индекс зацепления χ_i обращается в нуль. Такой, в частности, является внешняя компонента к циклу $\varphi(S(x,r))$. Если компонента с нулевым индексом зацепления накрывается отображением φ, то она (так же, как и в гладком случае) накрывается по крайней мере два раза при различных знаках якобиана.

Неотрицательность якобиана или заменяющие ее условия влекут монотонность отображения.

Рассмотрим ограничение отображения φ на открытый шар $U = B(z,r) \Subset \Omega$, предполагая, что на ∂U отображение непрерывно. Выберем любую компоненту V_i множества $\mathbb{G}\backslash\varphi(\partial U)$, на которой индекс зацепления $\chi(y,\varphi(\partial U))$ равен нулю. Прообраз $W = (\varphi|_U)^{-1}V_i$ компоненты V_i разобьем на две части: $W^+ = \{x \in W : \det D\varphi(x) \geq 0\}$, $W^- = W\backslash W^+$.

Лемма 6. *Если $m(W) > 0$ и множество точек $x \in W$, в которых отображение φ топологически невырожденное, имеет положительную меру, то $m(W^+) > 0$, $m(W^-) > 0$ и $m(\varphi(W^+) \cap \varphi(W^-)) > 0$.*

Доказательство. Так как множество W имеет положительную меру, то через почти все точки $x \in W$ проходят слои слоения Γ_j, где $j = 1,\dots,n_1$ — натуральное число, на отрезках интегральных линий которых отображение φ абсолютно непрерывно.

Возьмем такую точку $x \in W$. Если $\gamma_x \in \Gamma_j$ — слой, на котором φ абсолютно непрерывно, то при некотором $s > 0$ имеем $\varphi(\gamma_x \cap B(x,s)) \subset V_i$. Пусть s такое число, что $\operatorname{diam}\varphi(\gamma_x \cap B(x,s)) < \frac{1}{2}d(\varphi(x),\partial V_i)$.

Применяя утверждение [16, предложение 2.5] при $p = \nu$ к координатным функциям отображения $\varphi(x)$, выводим

1) существование сферы $S(x,\tau)$, $\tau \leq s$, образ которой $\varphi(S(x,\tau))$ имеет диаметр $\varphi(S(x,\tau)) < \frac{1}{2}d(\varphi(x),\partial V_i)$, и отображение $\varphi : S(x,\tau) \to \mathbb{G}$ непрерывно; тогда $\varphi(S(x,\tau) \subset V_i$;

2) кроме того, можно при выборе τ сделать так, что дополнение $\mathbb{G}\backslash\varphi(S(x,\tau)$ содержит ограниченную компоненту $\widetilde{V}$, на которой индекс $\chi(y,\varphi(S(x,r)))$ отличен от нуля.

Применим к характеристической функции $\chi_{\widetilde{V}}$ теорему 1:

$$\int\limits_{B(x,\tau)\backslash\varphi^{-1}(\varphi(S(x,\tau)))} \chi_{\widetilde{V}}(\varphi(x)) \det D\varphi(x_0)\,dx = \chi(y,\varphi(S(x,\tau)))m(\widetilde{V}), \quad y \in \widetilde{V}.$$

Правая часть этого равенства не равна нулю. Функция $\chi_{\widetilde{V}}(\varphi(x))$ тождественно нулевая на $B(x,r)\backslash\varphi^{-1}(\widetilde{V})$. Поэтому $W \supset \varphi^{-1}(\widetilde{V}) \cap B(x,r)$ и

$$m(W) > m(\varphi^{-1}(\widetilde{V}) \cap B(x,\tau)) > 0.$$

Из $W \supset \varphi^{-1}(\widetilde{V})$ по лемме 3 имеем $m(\varphi(W)) \geq m(\widetilde{V}) > 0$.

Предположим, что $m(\varphi(W^+) \cap \widetilde{V}) > 0$, в то время как $m(\varphi(W^+) \cap \varphi(W^-)) = 0$. В множестве $(\varphi(W^+) \cap \widetilde{V}) \setminus \varphi(W^-)$ выберем компакт F ненулевой меры. К характеристической функции χ_F применим следствие 1:

$$\int\limits_{B(x,\tau)\setminus\varphi^{-1}(\varphi(S(x,\tau)))} \chi_F(\varphi(x)) \det D\varphi(x)\, dx = \chi(y, \varphi(S(x,\tau)))m(F), \quad y \in \widetilde{V}.$$

Отсюда, поскольку правая часть отлична от нуля и $\varphi^{-1}(F) \subset W^+$, имеем $m(\varphi^{-1}(F)) \neq 0$ и $m(W^+) > 0$. Далее,

$$\int\limits_{U\setminus\varphi^{-1}(\varphi(\partial U))} \chi_F(\varphi(x)) \det D\varphi(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{G}\setminus\varphi(\partial U)} \chi_F(y)\chi(y, \varphi(\partial U))\, dy$$
$$= \int\limits_{V_i} \chi_F(y)\chi(y, \varphi(\partial U))\, dy = 0.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{U\setminus\varphi^{-1}(\varphi(\partial U))} \chi_F(\varphi(x)) \det D\varphi(x)\, dx \geq \int\limits_{B(x,r)} \chi_F(\varphi(x)) \det D\varphi(x)\, dx > 0.$$

Полученное противоречие доказывает неравенство $m(\varphi(W^+) \cap \varphi(W^-)) > 0$. Из $m(W^+) > 0$ и

$$\int\limits_{W} \det D\varphi(x)\, dx = \int\limits_{V_i} \chi(y, \varphi(\partial U))\, dy = 0$$

следует, что $m(W^-) > 0$. $\square$

Предложение 3. *Пусть V_i — компонента связности множества $\mathbb{G}\setminus\varphi(\partial U))$, для которой $\chi(y, \varphi(\partial U)) \equiv 0$. Если $\det D\varphi(x) \neq 0$ п. вс. в U и $m(W) > 0$, то $m(W^+) > 0$, $m(W^-) > 0$ и $m(\varphi(W^+) \cap \varphi(W^-)) > 0$.*

Сформулированное утверждение следует из лемм 2 и 6.

Теорема 2. *Пусть $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ — отображение класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Пусть выполнено одно из условий:*

(a) *отображение φ топологически невырожденное почти во всех точках области Ω ($\det D\varphi(x) \neq 0$ п. вс.) и φ взаимно однозначно п. вс., т. е. для любых двух непересекающихся множеств $A, B \subset \Omega$ из $m(A) > 0$, $m(B) > 0$ следует, что $m(\varphi(A) \cap \varphi(B)) = 0$;*

(b) *отображение φ топологически невырожденное почти во всех точках области Ω и $\det D\varphi(x) \geq 0$ для п. вс. $x \in \Omega$ (для п. вс. $x \in \Omega$ якобиан $\det D\varphi(x)$ положителен);*

(c) *отображение φ имеет неотрицательный якобиан и имеет конечное искажение: $D\varphi(x) = 0$ п. вс. на множестве $Z = \{x \in \Omega : \det D\varphi(x) = 0\}$.*

Тогда отображение φ монотонно в области Ω.

Доказательство. Применим рассуждение от противного. Предположим, что в точке x_0 отображение φ немонотонно. Это означает, что множество T тех $r \in \big(0, \rho\big(x_0, \frac{1}{2}\partial\Omega\big)\big)$, для которых прообраз $W \subset B(x_0, r)$ пересечения множества $\varphi(B(x_0, r))$ с неограниченной компонентой V_0 к циклу $\varphi(S(x_0, r))$ имеет ненулевую меру, само является множеством положительной меры на вещественной оси.

По свойству 2 (п. 4) отображение φ непрерывно на всех сферах $S(x_0, r)$, $r \in T$. Фиксируем такое r. Множество W разобьем на две части: $W^+ = \{x \in W : \det D\varphi(x) \geq 0\}$, $W^- = W \setminus W^+$. В случаях (a) и (b), применяя лемму 6 и предложение 3, заключаем, что $m(\varphi(W^+) \cap \varphi(W^-)) > 0$, $m(W^+) > 0, m(W^-) > 0$. Это противоречит условиям теоремы, так как $r \in T$ может быть произвольным.

В случае (c) возможны две ситуации.

1. Мера множества точек $x \in W$, в которых отображение φ топологически невырожденное, положительна. Конец доказательства такой же, как и в случае (a).

2. В почти всех точках $x \in W$ отображение φ топологически вырожденное. В этом случае привлечем другие аргументы. Применим равенства (9) к характеристической функции χ_{V_0} компоненты V_0. Так как для точек $y \in V_0$ индекс зацепления $\chi(y, \varphi(S(x_0, r))$ равен нулю, из формулы (9) выводим, что

$$\det D\varphi(x) = 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in W.$$

Так как множество W имеет положительную меру, через почти все точки $x \in W$ проходят слои слоения Γ_j, где $j = 1, \dots, n_1$ — натуральное число, на отрезках интегральных линий которых отображение φ абсолютно непрерывно.

Возьмем такую точку $x_1 \in W$. Если $\gamma_{x_1} \in \Gamma_j$ — слой, на котором φ абсолютно непрерывно, то при некотором $s > 0$ имеем $\varphi(\gamma_{x_1} \cap B(x_1, s)) \subset V_0$. Пусть s такое число, что $\operatorname{diam} \varphi(\gamma_{x_1} \cap B(x_1, s)) < \frac{1}{2} d(\varphi(x_1), \partial V_0)$.

Применяя утверждение [16, предложение 2.5] при $p = \nu$ к координатным функциям отображения $\varphi(x)$, выводим

1) существование сферы $S(x_1, t)$, $t \leq s$, образ которой $\varphi(S(x_1, t))$ имеет диаметр $\varphi(S(x_1, t)) < \frac{1}{2} d(\varphi(x_1), \partial V_0)$ и отображение $\varphi : S(x_1, t) \to \mathbb{G}$ непрерывно; тогда из-за $\gamma_{x_1} \cap S(x_1, t) \neq \varnothing$ имеем $\varphi(S(x_1, t) \subset V_0$, поэтому $\varphi^{-1}(\varphi(S(x_1, t))) \subset W$;

2) кроме того, можно при выборе t сделать так, чтобы на дополнении $\mathbb{G} \setminus \varphi(S(x_1, t)$ было $\chi(y, \varphi(S(x_1, t))) \equiv 0$; существование такой сферы следует из определения топологически вырожденного отображения.

Применяя соотношение (9) теоремы 1 к функции $u \equiv 1$ на $\mathbb{G} \setminus \varphi(S(x_1, t))$ и шару $B(x_1, t)$, выводим

$$\int\limits_{B(x_1,t) \setminus \varphi^{-1}(\varphi(S(x_1,t)))} \det D\varphi(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{G} \setminus \varphi(S(x_1,t))} \chi(y, \varphi(S(x_1, t)))\, dy = 0.$$

Значит, $\det D\varphi(x) = 0$ почти всюду в $B(x_1, t) \setminus \varphi^{-1}(\varphi(S(x_1, t)))$. В силу включения $\varphi^{-1}(\varphi(S(x_1, t)) \subset W$ имеем также $\det D\varphi(x) = 0$ почти всюду в $B(x_1, t) \cap \varphi^{-1}(\varphi(S(x_1, t)))$. Ввиду конечности искажения $D\varphi(x) = 0$ почти всюду в $B(x_1, t)$. Отсюда выводим, что φ постоянно на $B(x_1, t)$. Следовательно, отображение φ имеет следующие свойства:

α) $\varphi(y) = \varphi(x_1)$ для всех $y \in B(x_1, t)$;

β) $\varphi(B(x_1, t)) = \{\varphi(x_1)\} \subset V_0$;

γ) множество $\widetilde{W}$ тех точек из W, в которых φ топологически вырожденное, открыто;

δ) на любой компоненте связности множества $\widetilde{W}$ отображение φ постоянно.

Фиксируем точку $x_2 \in \widetilde{W}$ и сферу $S_2 = S(x_2, \tau)$, $\tau < \operatorname{dist}(x_2, \partial\widetilde{W})$, лежащую в одной компоненте связности множества $\widetilde{W}$. Горизонтальное векторное поле X_{1j} определяет слоение Γ_j открытого шара $B(x_2, \tau)$ и меру $d\gamma_j$ на слоении Γ_j, $j = 1, \dots, n$ (см. свойство 2 (п. 6)).

Если координатные функции отображения $\varphi \in L^1_\nu(B(x_0, r))$ $(1, \nu)$-уточнены, то на $d\gamma_j$-почти всех слоях слоения Γ_j отображение φ абсолютно непрерывно на всяком замкнутом отрезке l_p в пересечении слоя $p \exp sX_{1j}$, $s \in \mathbb{R}$, с шаром $B(x_0, r)$, $p \in P$.

Из доказанного выше следует, что отображение φ постоянно на шаре $B(x_2, \tau)$. Обозначим через y_0 одноточечный образ $\varphi(B(x_2, \tau))$. По предположению $y_0 \in V_0$. Следовательно, $y_0 \notin \varphi(S(x_0, r))$. Семейство $\mathscr{L}_j = \Gamma_j \cap B(x_0, r)$ всех отрезков, на которых φ абсолютно непрерывно, переводится отображением φ в семейство кривых, соединяющих y_0 и $\varphi(S(x_0, r))$.

Образ $\widetilde{W}$ счетен. Используя это и абсолютную непрерывность φ на любом отрезке $l_p \in \mathscr{L}_j$, заключаем, что на каждом $l_p \in \mathscr{L}_j$ существует измеримое множество $\widetilde{l}_p$ положительной меры $m(\widetilde{l}_p)$, образ которого лежит вне $\varphi(\widetilde{W})$, но все еще в V_0. Следовательно, $\widetilde{l}_p \subset W \backslash \widetilde{W}$.

Дополнение $W \backslash \widetilde{W}$ измеримо и имеет нулевую меру. По теореме Фубини и (2) имеем

$$0 = m(W \backslash \widetilde{W}) = \int\limits_{\gamma \in \Gamma_p,\, \gamma_p \cap W \backslash \widetilde{W} \neq \varnothing} m(\gamma_p \cap W \backslash \widetilde{W})\, d\gamma_j.$$

Отсюда для $d\gamma_j$-почти всех слоев γ_p мера пересечения $\gamma_p \cap W \backslash \widetilde{W}$ равна нулю. С другой стороны, почти все пересечения $\gamma_p \cap W \backslash \widetilde{W}$ содержат измеримое множество $\widetilde{l}_p$ положительной меры. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Следствие 2. *Пусть $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ — отображение класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Если выполнено одно из условий* (a), (b) *или* (c) *теоремы* 2, *то отображение φ можно переопределить на множестве нулевой меры так, что оно будет*

1) *непрерывным,*
2) *$\mathscr{P}$-дифференцируемым почти всюду,*
3) *обладать $\mathscr{N}$-свойством Лузина.*

Доказательство. По теореме 2 каждое из условий (a), (b) или (c) теоремы 2 гарантирует, что отображение φ монотонное. По лемме 5 выводим, что отображение φ квазимонотонное. В [16, предложение 2] доказано, что всякое квазимонотонное отображение $\varphi \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$ можно изменить на множестве меры нуль так, чтобы оно стало непрерывным. В той же работе доказано, что квазимонотонное отображение $\varphi \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$ $\mathscr{P}$-дифференцируемо почти всюду [16, предложение 3] и обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина [16, теорема 4]. $\square$

6. Свойства отображений с конечным искажением

Определение 3. Отображение φ называется *отображением с конечным искажением*, если для почти всех $x \in \Omega$ выполняется поточечное неравенство

$$|D_h\varphi(x)|^\nu \le K(x) \det D\varphi(x)$$

с некоторой функцией $K(x) \in (1, \infty)$, зависящей от точки $x \in \Omega$.

Поточечное неравенство этого определения эквивалентно условию: отображение φ имеет неотрицательный якобиан и $D_h\varphi(x) = 0$ п. вс. на множестве $Z = \{x \in \Omega : \det D\varphi(x) = 0\}$ нулей якобиана, т. е. $\mathscr{P}$-дифференциал отображения φ вырождается п. вс. на множестве нулей якобиана.

Предложение 4. *Пусть $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ — отображение класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Если φ имеет конечное искажение, то после переопределения на множестве нулевой меры такое отображение*

1) *непрерывно,*
2) *$\mathscr{P}$-дифференцируемо почти всюду,*
3) *обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина.*

Доказательство. Условие конечности искажения — это в точности условие (c) теоремы 2, в соответствии с которым отображение φ монотонное. Поэтому утверждения 1–3 доказаны в следствии 2. $\square$

В следующем утверждении докажем формулу замены переменной для отображений с конечным искажением.

Предложение 5. *Пусть непрерывное отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ класса $\varphi \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$ имеет неотрицательный якобиан и конечное искажение: $D_h\varphi(x) = 0$ п. вс. на множестве $Z = \{x \in \Omega : \det D\varphi(x) = 0\}$. Пусть еще $U \Subset \Omega$ — произвольная компактная область такая, что $m(\partial U) = 0$.*

Тогда для любой измеримой функции $u : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ такой, что произведение $u(\varphi(x)) \det D\varphi(x)$ суммируемо на U, справедлива формула

$$\int\limits_U u(\varphi(x)) \det D\varphi(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{G}} u(y)\chi(y, \varphi(\partial U))\, dy. \tag{16}$$

Более того, для почти всех $y \in \varphi(U) \setminus \varphi(\partial U)$ верно равенство

$$\mu(y, \varphi, U) = \chi(y, \varphi(\partial U)) = \sum_{i=1}^{l} \operatorname{sign} \det D\varphi(a_i) = N(y, \varphi, U).$$

Доказательство. Для отображений класса Соболева выведем формулу (16) из формулы (6), применяя, в частности, некоторые аргументы доказательства [6, теорема 6.1]. Напомним, что по следствию 2 отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$ с конечным искажением не только непрерывно, но оно еще

1) $\mathscr{P}$-дифференцируемо почти всюду,
2) обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина.

Из последнего свойства выводим: $m(\varphi(\partial U)) = 0$.

Пусть $v : U \to \mathbb{R}$ — измеримая функция такая, что $v(x) \det D\varphi(x)$ суммируемо в U. По формуле (6) имеем равенство (в силу $\mathscr{N}$-свойства Лузина множество Σ в формуле (6) пустое)

$$\int\limits_U v(x) |\det D\varphi(x)|\, dx = \int\limits_{\mathbb{G}} \sum_{x \in \varphi^{-1}(y) \cap U} v(x)\, dy. \tag{17}$$

Полагая в формуле (17) функцию v равной характеристической функции множества $\varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \varphi(\partial U))$, получаем

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(\varphi(U)\cap\varphi(\partial U))} |\det D\varphi(x)|\, dx = 0.$$

Следовательно,

$$\det D\varphi(x) = 0 \quad \text{для почти всех } x \in \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \varphi(\partial U)). \tag{18}$$

Возьмем в качестве v интегрируемую функцию $(u\circ\varphi(x))\operatorname{sign}\det D\varphi(x)$, где $u:\mathbb{G}\to\mathbb{R}$ — произвольная измеримая функция из условия теоремы. Тогда

$$\int\limits_U (u\circ\varphi)(x)\det D\varphi(x)\,dx = \int\limits_U (u\circ\varphi)(x)\operatorname{sign}\det D\varphi(x)|\det D\varphi(x)|\,dx$$
$$= \int\limits_{\mathbb{G}} u(y)\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\cap U}\operatorname{sign}\det D\varphi(x)\,dy.$$

Осталось установить, что

$$\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\cap U}\operatorname{sign}\det D\varphi(x) = \chi(y,\varphi(\partial U)) = \mu(y,\varphi,D)$$

в почти каждой точке $y\in\varphi(U)\setminus\varphi(\partial U)$.

В силу компактности $\overline{U}\subset\mathbb{G}$ функция $\det D\varphi(x)$ суммируема. Полагая $v\equiv 1$ в формуле (17), получаем суммируемость функции кратности

$$\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\cap U} 1 = N(y,\varphi,U).$$

Пусть E_1 — множество точек $x\in U$, в которых φ не $\mathscr{P}$- дифференцируемо,

$$E_2=\{x\in U:\det D\varphi(x)=0\},\quad S=\{y\in\varphi(U):N(y,\varphi,U)=\infty\}.$$

В силу суммируемости функции кратности $N(y,\varphi,U)$ выводим $m(S)=0$.

Введем обозначение $E=S\cup\varphi(E_1)\cup\varphi(E_2)$. В силу $\mathscr{N}$-свойства Лузина $m(\varphi(E_1))=0$, а по формуле (17) получаем $m(\varphi(E_2))=0$. Следовательно, $m(E)=0$.

Возьмем произвольную точку $y\in\varphi(U)\backslash(E\cup\varphi(\partial U))$. Тогда множество $\varphi^{-1}(y)\cap U$ конечное, отображение φ дифференцируемо во всех точках $x\in\varphi^{-1}(y)\cap U$ и в тех же точках $\det D\varphi(x)>0$. Кроме того, все точки $x\in\varphi^{-1}(y)\cap U$ являются внутренними точками U. Пусть

$$\varphi^{-1}(y)\cap U=\{a_1,\dots,a_l\},\quad \text{где}\quad l=N(y,\varphi,U).$$

По определению $\mathscr{P}$-дифференцируемости существует последовательность шаров $B^i_m=B(a_i,r_m)$, $m\in\mathbb{N}$, таких, что их радиусы стремятся к нулю при $m\to\infty$ и

$$\mu(y,\varphi,B^i_m)=\operatorname{sign}\det D\varphi(a_i).$$

Шары B^i_m и $B^j_m, i\neq j$, не пересекаются при достаточно больших m. Из свойств степени выводим соотношение

$$\mu(y,\varphi,U)=\sum_{i=1}^{l}\mu(y,\varphi,B^i_m)=\sum_{i=1}^{l}\operatorname{sign}\det D\varphi(a_i)=N(y,\varphi,U)$$

для всех $y\in\varphi(U)\backslash(E\cup\varphi(\partial U))$. Ввиду $m(E)=0$, $m(\varphi(\partial U))=0$ и (18) предложение 5 доказано. $\square$

Предложение 6. *Условия, наложенные на отображение φ в теореме 2, гарантируют следующие свойства отображения φ:*

1) *для всякой компактной области $U\subset\Omega$ такой, что φ непостоянно на U, для всех $y\in\varphi(U)\backslash\varphi(\partial U)$ имеет место $\chi(y,\varphi(\partial\Omega))\neq 0$;*

2) *если, кроме того,* $\det D\varphi(x) \neq 0$ *п. в. в* Ω, *то отображение* φ *обладает* N^{-1}*-свойством*[5)].

Доказательство. Для доказательства утверждения 1 следует применить метод доказательства теоремы 2, а для доказательства утверждения 2 — предложение 1. □

В евклидовых пространствах основы теории отображений с ограниченным искажением заложены в 60-е гг. в работах Ю. Г. Решетняка [9]. Хотя эта теория и рассматривалась с самого начала как многомерное обобщение теории аналитических функций, методы и идеи, вовлеченные Ю. Г. Решетняком в решение задач новой теории, оказали влияние на развитие новых направлений и решение новых задач (см., например, [10, 18]). Сама область исследований охватывает сейчас широкий круг вопросов, имеет глубокие связи со смежными разделами математики, и называется *квазиконформным анализом.*

В рамках этого направления была получена теорема о непрерывности отображений класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}$ с конечным искажением в евклидовых пространствах [19] (опубликована в [20])[5)]. Болл пришел к выводу, что этот класс отображений лучше других подходит для адекватного описания допустимых деформаций в задачах нелинейной теории упругости и применил его в задачах минимизации интегралов энергии [22, 23] (см. также недавнюю работу [24]).

Некоторые аспекты теории отображений с конечным искажением можно найти в [18, 25].

7. Свойства отображений с ограниченным искажением

Определение 4 [26]. Пусть $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ — отображение класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$ на группе Карно. Отображение φ называется *отображением с ограниченным искажением*, если для почти всех $x \in \Omega$ выполняется поточечное неравенство:

$$|D_h\varphi(x)|^\nu \leq K \det D\varphi(x)$$

с некоторой постоянной $K \in [1, \infty)$, не зависящей от точки $x \in \Omega$.

Предложение 7. *Всякое отображение с ограниченным искажением* $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ *можно изменить на множестве меры нуль, чтобы оно стало непрерывным. Кроме того, отображение с ограниченным искажением* $\mathscr{P}$*-дифференцируемо почти всюду и обладает* $\mathscr{N}$*-свойством Лузина.*

Доказательство. Отображение с ограниченным искажением удовлетворяет условию (c) теоремы 2 (т. е. всякое отображение с ограниченным искажением имеет конечное искажение). В силу следствия 2 всякое отображение с конечным искажением непрерывно (после изменения на множестве меры нуль), $\mathscr{P}$-дифференцируемо почти всюду и обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина. □

Предложение 8. *Пусть* $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ *— отображение с ограниченным искажением. Для всякого шара* $U = B(x, r) \Subset \Omega$ *такого, что* φ *непостоянно на* U, *отображение*

$$\varphi : U \setminus \varphi^{-1}(\varphi(\partial U)) \to \mathbb{G}$$

[5)] Отображение $\varphi \in W^1_\nu(\Omega)$ обладает N^{-1}*-свойством*, если прообраз множества меры нуль есть множество меры нуль. Очевидно, что это свойство эквивалентно следующему: образ множества ненулевой меры есть множество ненулевой меры.

[5)] В то время этот класс отображений не имел названия. Современное название этого класса отображений предложили авторы работы [21].

непрерывно, открыто и дискретно.

Доказательство. В силу предложения 7 отображение с ограниченным искажением $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ непрерывно.

Пусть $V_1, V_2, \dots, V_k, \dots$ — ограниченные компоненты дополнения $\mathbb{G} \setminus \varphi(\partial U)$. Перепишем формулу (16) с открытым множеством $W_k = \varphi^{-1}(V_k)$ вместо U. Имеем равенство

$$\int\limits_{W_k} u(\varphi(x)) \det D\varphi(x)\, dx = \int\limits_{V_k} u(y)\chi(y, \varphi(\partial U))\, dy \tag{19}$$

для любой измеримой $u : V_k \to \mathbb{R}$ такой, что произведение $u(\varphi(x)) \det D\varphi(x)$ суммируемо на W_k. Фиксируем точку $y \in V_k$ (применяя левый сдвиг в образе, можно считать, что $y = 0$), а в качестве u возьмем произвольную полунепрерывную снизу функцию $u \in L^1_\nu(V_k)$, для которой 0 — это единственная сингулярная точка, т. е. $u(y) \to \infty$ при $y \to 0$. В качестве таковой можно взять, например,

$$u(\cdot) = \max\left(\ln\ln\frac{1}{\rho(\cdot)}, M\right) \in L^1_\nu(V_k),$$

где число M подбирается таким образом, чтобы $\operatorname{supp} u \subset V_k$ (функцию u продолжим нулем за пределы открытого множества V_k). Тогда композиция $U \ni x \mapsto u(\varphi(x))$ принадлежит $L^1_\nu(U)$ [27, теорема 2]. Более того, композиция $u \circ \varphi$, продолженная нулем на $\mathbb{G}$, будет элементом пространства $L^1_\nu(\mathbb{G})$.

Следовательно, в силу неравенства Пуанкаре композиция $u \circ \varphi$ принадлежит $W^1_\nu(\mathbb{G})$. Применяя нелинейную теорию потенциала на группе Карно [11], выводим, что множество $A = \{x \in W_k : u \circ \varphi = \infty\}$ имеет нулевую ν-емкость. Отсюда выводим, что множество имеет нулевую H^1 вместимость [11, теорема 9]. Таким образом, для любого фиксированного $b \in W_k$ сферы $S(b, \tau) \subset W_k$ не пересекаются с множеством A для почти всех $\tau \in (1, \operatorname{dist}(b, \partial W_k))$. Установленные свойства позволяют сделать вывод, что отображение $\varphi : U \setminus \varphi^{-1}(\varphi(\partial U)) \to \mathbb{G}$ открыто и дискретно (см. детали в [26]). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
2. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Math. Notes; V. 28).
3. *Bonfiglioli A., Lanconelli E. Uguzzoni F.* Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2007.
4. *Stein E. M.* Harmonic analysis: real-variables methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993.
5. *Korányi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111. P. 1–87.
6. *Vodop'yanov S. K.* $\mathscr{P}$-Differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Proceedings on Analysis and Geometry. Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. P. 603–670.
7. *Водопьянов С. К.* О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 67–86.
8. *Federer H.* Geometric measure theory. New York: Springer-Verl., 1960.
9. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
10. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Berlin: Springer-Verl., 1993.
11. *Водопьянов С. К., Кудрявцева Н. А.* Нелинейная теория потенциала для пространств Соболева на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 5. С. 1016–1036.

12. *Vodop'yanov S. K., Chernikov V. M.* Sobolev spaces and hypoelliptic equations. I, II // Sib. Adv. Math. 1996. V. 6, N 3. P. 27–67; V. 6, N 4. P. 64–96.
13. *Dairbekov N. S.* Mappings with bounded distortion on two-step Carnot groups // Proceedings on Analysis and Geometry. Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. P. 122–155.
14. *Basalaev S. G.* Mollifications of contact mappings of Engel group // Владикавк. мат. журн. 2023. V. 25, N 1. P. 5–19. DOI 10.46698/n0927-3994-6949-u.
15. *Kleiner B., Müller S., Xie X.* Pansu pullback and exterior differentiation for Sobolev maps on Carnot groups. arXiv:2007.06694v2[math.DG]. 3 Dec 2021. 70 p.
16. *Басалаев С. Г., Водопьянов С. К.* Непрерывность по Гёльдеру следов функций класса Соболева на гиперповерхностях групп Карно и $\mathscr{P}$-дифференцируемость соболевских отображений // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 4. С. 700–719.
17. *Бондарев С. А.* Точки Лебега для функций из обобщенных классов Соболева $M^p_\alpha(X)$ в критическом случае // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. Т. 3. С. 4–11.
18. *Iwaniec T., Martin G.* Geometric function theory and nonlinear analysis. Oxford: Clarendon Press, 2001. (Oxford Sci. Publ.).
19. *Водопьянов С. К.* Функционально-теоретический подход к некоторым задачам теории пространственных квазиконформных отображений. Дис.. . . канд. физ.-мат. наук.. Новосибирск: Институт математики, 1975.
20. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Квазиконформные отображения и пространства функций с первыми обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 3. С. 515–531.
21. *Iwaniec T., Šverak V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 118. P. 181–188.
22. *Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1977. V. 63. P. 337–403.
23. *Ball J. M.* Global invertibility of Sobolev functions and the interpretation of matter // Proc. Royal Soc. Edinburgh. 1981. V. 88A. P. 315–328.
24. *Molchanova A., Vodop'yanov S.* Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity // Calculus of Variations and PDE. 2020. V. 59. 17. https://doi.org/10.1007/s00526-019-1671-4.
25. *Hencl S., Koskela P.* Lectures on mappings of finite distortion. Switzerland: Springer Intern. Publ., 2014. (Lect. Notes Math.; V. 2096).
26. *Vodop'yanov S. K.* Foundations of the theory of mappings with bounded distortion on Carnot groups // The interaction of analysis and geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 303–344. (Contemp. Math.; V. 424).
27. *Водопьянов С. К., Ухлов А О.* Пространства Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 776–795.

Поступила в редакцию 12 мая 2023 г.
После доработки 12 мая 2023 г.
Принята к публикации 2 августа 2023 г.

Водопьянов Сергей Константинович (ORCID 0000-0003-1238-4956)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vodopis@math.nsc.ru