МАРТ 1983 г., ТОМ XIX, № 3

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

Л. И. КАМЫНИН, Б. Н. ХИМЧЕНКО

ОБ ОДНОМ АСПЕКТЕ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНОГО СТРОГОГО ПРИНЦИПА ЭКСТРЕМУМА А. Д. АЛЕКСАНДРОВА

Из качественной теории параболических уравнений 2-го порядка известно, что для уравнения теплопроводности $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0$, рассматриваемого в прямоугольнике G со сторонами, параллельными осям координат, имеет место строгий принцип экстремума в следующей форме: решение $u(x, t)$, принимающее наибольшее или наименьшее значение внутри G в точке (x_0, t_0), равно постоянной в G при $t\leqslant t_0$. (Таким образом, в отличие от строгого принципа экстремума для уравнения Лапласа указанный принцип экстремума для уравнения теплопроводности анизотропен.) Для равномерно параболического уравнения 2-го порядка анизотропный строгий принцип экстремума был доказан в [1]. В работе А. Д. Александрова [2] была впервые построена теория анизотропного строгого принципа экстремума для параболического оператора 2-го порядка с неотрицательной характеристической формой. В настоящей работе приводится один из возможных вариантов развития теории А. Д. Александрова. Обобщение проводится в следующих трех направлениях: 1) параболический оператор 2-го порядка с неотрицательной характеристической формой рассматривается не во всей области G дифференцируемости функции u, а лишь на меньшем открытом множестве $G\setminus\mathscr{E}$; 2) вместо линий эллиптичности (по А. Д. Александрову), лежащих в гиперплоскостях, ортогональных оси Ot и вдоль которых характеристическая форма оператора существенно положительна, вводятся линии слабой эллиптичности, вдоль которых характеристическая форма оператора может слабо вырождаться; 3) наряду с линиями слабой эллиптичности, лежащих на открытых (без концов) траекториях некоторых гладких невырожденных векторных полей в $G\setminus\mathscr{E}$, рассматриваются линии слабой эллиптической и параболической связности, содержащие точки исключительного множества $\mathscr{E}$. По своим методам настоящая статья примыкает к работе [3].

Пусть $\bar{G}=G\cup\partial G\subset\mathbf{R}^{n+1}$, где G — ограниченная область. Через $\gamma(G)$ и $\gamma_0(G)$ будем обозначать соответственно верхнюю и нижнюю крышки области G (см. определения в [4]). При этом $\Gamma(G)=\partial G\setminus\gamma(G)$ называется параболической границей области G, а $\Sigma(G)=\Gamma(G)\setminus\gamma_0(G)$ — боковой частью $\Gamma(G)$. Пусть $\mathscr{E}=\partial\mathscr{E}\subset G\cup\gamma(G)$ — замкнутое множество. Рассмотрим на $(G\cup\gamma(G))\setminus\mathscr{E}$ линейный параболический оператор 2-го порядка

$$Lu\equiv\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x,\,t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,\,t)u-\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (1)$$

где матрица $(a_{ij}(x, t))$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ симметрическая, а действительные функции $a_{ij}(x, t)$, $a_i(x, t)$ и $c(x, t)$ ограничены в $(G\cup\gamma(G))\setminus\mathscr{E}$, причем

$$-C\leqslant c(x, t)\leqslant 0 \quad \forall (x, t)\in(G\cup\gamma(G))\setminus\mathscr{E}. \tag{2}$$

Характеристическая форма оператора (1) предполагается при этом неотрицательно определенной так, что $\forall\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $|\xi|_n=1$ имеют место $\forall (x, t)\in(G\cup\gamma(G))\setminus\mathscr{E}$ оценки

$$0\leqslant A(x, t; \xi)\equiv\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j\leqslant a^0<+\infty, \tag{3}$$

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x, t)\leqslant\bar{A}<+\infty. \tag{4}$$

На замкнутом множестве $\mathscr{E}\subset G\cup\gamma(G)$ (если $\mathscr{E}\neq\varnothing$) рассмотрим линейный оператор 1-го порядка

$$L_0u\equiv\sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+b(x, t)u-\frac{\partial u}{\partial t} \tag{5}$$

с действительными ограниченными коэффициентами $b_i(x, t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и $b(x, t)$, причем

$$-B\leqslant b(x, t)\leqslant 0 \quad \forall (x, t)\in\mathscr{E}. \tag{6}$$

Определение 1. Функция $\Omega\in C[0, h_0]\wedge D^{(2)}(0, h_0]$ удовлетворяет условию (A), если $\Omega(0)=0$ и $D\Omega(s)\geqslant 0$, $D^2\Omega(s)\leqslant 0$ $\forall s\in(0, h_0]$.

Пусть $M_0=(x_0, t_0)=(x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)$ и $\{(y, \tau)\}=\{(y_1, \ldots, y_n; \tau)\}$ — местная декартова система координат с началом в точке M_0 и осью $O\tau$, коллинеарной оси Ot. Положим

$$p(s)=p_0s\Omega(s), \quad s\in[0, h_0], \quad p_0>0 \text{ — постоянная}, \tag{7}$$

где функция Ω удовлетворяет условию (A). Будем пользоваться обозначениями: $y=(y_1, y')$, $y'=(y_2, \ldots, y_n)$, $z=(y_1, z')$, $z'=(y', \tau)$, $|y'|^2=\sum_{i=2}^{n} y_i^2$, $|y|^2=y_1^2+|y'|^2$, $|z'|_p=\sqrt{|y'|^2+|\tau|}$, $|z|_p=\sqrt{y_1^2+|z'|_p^2}=\sqrt{|y|^2+|\tau|}$. Положим также при $M=(x, t)$ и $M_0=(x_0, t_0)$, $M_1=(x, t_0)$, $|M_0M_1|=|x-x_0|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2}$, $|M_0M|_p=\sqrt{|x-x_0|^2+|t-t_0|}$, $d(M)=|M_0M_1|\cos(M_0p, M_0M_1)$ $(M_0p\parallel Oy_1)$.

Рассмотрим «параболоид» (см. (7))

$$\Pi(M_0, h_0)=\{(y, \tau)\,|\,0<p(|z'|_p)<y_1<h_0, \ \tau\leqslant 0\} \tag{8}$$

с вершиной в точке M_0. Орт

$$M_0p=(N_1, \ldots, N_n; 0) \tag{9}$$

является ортом оси Oy_1 и входит в $\gamma(\Pi(M_0, h_0))$. Будем говорить, что параболоид (8) связан с функцией Ω из (7) и с ортом (9). Поверхность $P(M_0, h_0)=\{(y, \tau)\,|\,y_1=p(|z'|_p), \ 0\leqslant y_1\leqslant h_0, \ \tau\leqslant 0\}$ будем называть боковой поверхностью параболоида (8).

Определение 2. Оператор (1) слабо вырождается в вершине M_0 параболоида (8), связанного с функцией Ω и имеющего орт «оси» (9), если существуют постоянная $\alpha>0$ и функция $\widehat{\Omega}$, удовлетворяющая условию (A) и условию Дини $\int_0^{h_0} s^{-1}\widehat{\Omega}(s)\,ds<+\infty$, такие, что (см. (3), (9)) $\forall M=(x, t)\in\Pi(M_0, h_0)\subset(G\cup\gamma(G))\setminus\mathscr{E}$

$$A(M;\, M_0p) \geqslant \alpha \frac{\Omega(|M_0M|_p)}{|M\ M'|} \frac{d(M)}{\widehat{\Omega}(d(M))} > 0$$

(при этом функция Ω, связанная с параболоидом (8), также будет удовлетворять условию Дини).

Замечание 1. Пусть оператор (1) слабо вырождается в вершине M_0 параболоида (8) и $\lambda_1(M) \geqslant .. \geqslant \lambda_n(M) \geqslant 0$ — собственные значения неотрицательно определенной характеристической формы (3). Тогда $\forall M \in \Pi(M_0,\, h_0)$ имеют место оценки $\lambda_1(M) = \max\limits_{|\xi|_n=1} A(M;\, \xi) \geqslant A(M;\, M_0p) > 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(M) \geqslant \lambda_1(M) > 0$, однако возможны равенства $\lambda_j(M) = 0$ при некоторых $j \neq 1$.

Замечание 2 (ср. [3]). Если оператор (1) слабо вырождается в вершине M_0 параболоида (8), связанного с функцией Ω, и $\exists$ функция Ω_0, удовлетворяющая условию (A), такая, что (см. определение 2) $\widehat{\Omega} = O(\Omega_0)$ $(s \to +0)$, а также имеют место оценки $0 < A(M;\, M_0p) \leqslant \leqslant a^0 \dfrac{\Omega(|M_0M|_p)\, d(M)}{|M_0M|_p \Omega_0(d(M))}$, то $\exists \lim\limits_{M \to M_0} A(M;\, M_0p) = 0$, $\exists \lim\limits_{M \to M_0} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}(M) = 0$.

Определение 3. Граничная точка $M_0 \in \Sigma(G)$ обладает относительно множества $(G \cup \gamma(G)) \setminus \mathscr{E}$ свойством строгой x-параболоидности изнутри, если существует параболоид (8), в вершине M_0 которого оператор (1) слабо вырождается в смысле определения 2, причем $\overline{\Pi}(M_0,\, h_0) \setminus \{M_0\} \subset (G \cup \gamma(G)) \setminus \mathscr{E}$.

Теорема 1 (см. [5]). *Пусть оператор (1) задан на множестве $(G \cup \gamma(G)) \setminus \mathscr{E}$ и граничная точка $M_0 \in \Sigma(G)$ обладает относительно этого множества свойством строгой x-параболоидности изнутри с параболоидом (8), причем для функции u выполнены условия*

$$u \in C(\bar{G}) \wedge C^{(1)}(G \cup \gamma(G)) \wedge C^{(2,\,1)}_{x,\,t}((G \cup \gamma(G)) \setminus \mathscr{E}), \tag{10}$$

$$Lu(M) \leqslant 0 \quad \forall M \in (G \cup \gamma(G)) \setminus \mathscr{E} \text{ и имеет место } (2), \tag{11}$$

$$u(M_0) \leqslant 0, \quad u(M) > u(M_0) \quad \forall M \in \overline{\Pi}(M_0,\, h_0) \setminus \{M_0\}. \tag{12}$$

Тогда для любого направления с ортом $M_0l = (\cos\beta_1, \ldots, \cos\beta_n;\, 0)$, входящим в $\gamma(\Pi(M_0,\, h_0))$ и таким, что $0 \leqslant |\alpha_l| < \pi/2$ (где $\alpha_l = \measuredangle(M_0p,\, M_0l)$), имеет место оценка снизу

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial M_0 l} \overset{\text{def}}{=} \liminf_{M \to M_0,\ M_0M \,||\, M_0l} \frac{u(M) - u(M_0)}{|MM_0|} > 0. \tag{13}$$

Приведем некоторые сведения из теории автономных систем (см. § 3, 4, 7, гл. 2 [6], § 1—4, гл. 1, § 1, 2, гл. 5 [7] и § 3, гл. 5 [8]). Рассмотрим в $(n+1)$-мерной полуокрестности $U^-(N_0) = U(N_0) \cap \{t \leqslant t_{N_0}\}$ (где $N_0 = (x_{N_0},\, t_{N_0})$) векторное поле $Y(M) = (Y_1(M), \ldots, Y_n(M);\, 0)$ класса $C^{(k)}(U^-(N_0))$ $(k \geqslant 1)$, ортогональное оси Ot и не вырожденное в $U^-(N_0)$ (так, что $|Y(M)|_n > 0$ $\forall M \in U^-(N_0)$). Обозначим через $\Lambda(Q_0;\, Y(Q_0))$ гиперплоскость, проходящую через точку $Q_0 = (q_0,\, t_0) \in U^-(N_0)$ ортогонально вектору $Y(Q_0)$.

Пусть $K_\delta(Q_0) = \{(x,\, t) \,|\, |x - q_0|^2 + (t - t_0)^2 < \delta^2\}$, $K^-_\delta(Q_0) = K_\delta(Q_0) \cap \cap \{t \leqslant t_0\}$.

Рассмотрим n-мерный полушар $S(Q_0,\, \delta_0) = K^-_{\delta_0}(Q_0) \cap \Lambda(Q_0;\, Y(Q_0))$, лежащий в гиперплоскости $\Lambda(Q_0;\, Y(Q_0))$. В полуокрестности $U^-(N_0)$ рассмотрим соответствующую невырожденному полю $Y(x,\, t) = (Y_1(x,\, t), \ldots, Y_n(x,\, t);\, 0)$ автономную систему, зависящую от параметра t:

$$\frac{dx}{ds} = Y(x, t), \quad (x, t) \in U^-(N_0), \quad s_-(x, t) < s < s_+(x, t). \tag{14}$$

Поскольку $Y \in C^{(1)}(U^-(N_0))$, то в силу теоремы существования и единственности для автономных систем для любой точки $Q = (q, t) \in S(Q_0, \delta_0)$ существует единственное решение $x(s) \equiv \varphi(s, Q) = \varphi(s, q, t)$, $s \in (s_-(Q), s_+(Q))$, задачи Коши для системы (14) с начальным условием $x(0) = q$, т. е.

$$\varphi(0, Q) \equiv \varphi(0, q, t) = q \quad \forall (q, t) \in S(Q_0, \delta_0), \quad t \in (t_0 - \delta_0, t_0], \tag{15}$$

при этом в силу автономности системы (14) имеем

$$\varphi(s_2, \varphi(s_1, Q)) = \varphi(s_1 + s_2, Q) \ \forall Q = (q, t) \in S(Q_0, \delta_0),$$

$$\forall s_1, s_2, s_1 + s_2 \in (s_-(Q), s_+(Q)), \tag{16}$$

$$\varphi(s, q, t) \in C^{k+1, k, k}_{s, q, t}. \tag{17}$$

Определение 4. Гладкая класса $C^{(k+1)}((s_-(Q), s_+(Q))$ кривая $\varphi_Q \equiv \varphi_{q, t} \equiv \varphi((s_-(Q), s_+(Q)); q, t) = \{M \in U^-(N_0) \mid M = \varphi(s, Q), s \in (s_-(Q), s_+(Q))\}$, $Q_0 = (q_0, t_0)$, $Q = (q, t) \in S(Q_0, \delta_0)$ называется траекторией поля Y, соответствующей интервалу $(s_-(Q), s_+(Q))$. Траектория $\varphi_{Q_1} \equiv \varphi_{q_1, t_1}$ лежит в гиперплоскости $t = t_1$ и проходит через точку $Q_1 = (q_1, t_1) \in S(Q_0, \delta_0)$.

Определение 5. Множество

$$\Phi \equiv \Phi((s_-, s_+); S(Q_0, \delta_0)) = \bigcup_{Q = (q, t) \in S(Q_0, \delta_0)} \varphi((s_-(Q), s_+(Q)); Q), \tag{18}$$

называется трубкой (траекторий) поля $Y \in C^{(1)}(U^-(N_0))$, надетой на сечение $S(Q_0, \delta_0)$ (трубки Φ) с «осью» $\varphi_{Q_0} \equiv \varphi_{q_0, t_0} = \varphi((s_-(Q_0), s_+(Q_0)); Q_0)$. В частности, если $\exists s_0 > 0$ такое, что $s_-(Q) \leqslant -s_0 < s_0 \leqslant s_+(Q)$ $\forall Q = (q, t) \in S(Q_0, \delta_0)$, то можно ввести трубку $\Phi \equiv \Phi((-s_0, s_0); S(Q_0, \delta_0)) = \bigcup_{Q \in S(Q_0, \delta_0)} \varphi((-s_0, s_0); Q)$ с «осью» $\varphi_0 \equiv \varphi_{Q_0} = \varphi((-s_0, s_0); Q_0)$.

Замечание 3. Поскольку поле $Y(M)$ невырождено, то величины $\delta_0 > 0$ и $s_+(Q) - s_-(Q) > 0$ $(\forall Q \in S(Q_0, \delta_0))$ можно считать столь малыми, что все траектории $\varphi_Q \equiv \varphi((s_-(Q), s_+(Q)); Q)$ из трубки Φ определения 5 являются простыми (без концов) дугами класса $C^{(k+1)}((s_-(Q), s_+(Q))$.

Определение 6. Скажем, что гиперповерхность $F \subset \Phi$ класса $C^{(1, 1/2)}_{x, t}$ t-трансверсальна векторному полю $Y(M)$ (ортогональному оси Ot), заданному в трубке Φ, если для любой точки $M_1 = (x_1, t_1) \in F$ вектор $Y(x_1, t_1)$ не касается сечения $F_{t_1} = F \cap \{t = t_1\}$. Если при этом для любой точки $M_1 = (x_1, t_1) \in F_{t_1}$ существуют траектория $\varphi_{q, t_1} \equiv \varphi((s_-(q, t_1), s_+(q, t_1)); q, t_1)$ такая, что $(q, t_1) \in S(Q_0, \delta_0)$, и единственное число $s(q, t_1) \in (s_-(q, t_1), s_+(q, t_1))$ такое, что $\varphi(s(q, t_1), q, t_1) \in F_{t_1}$, то гиперповерхность F называется сечением трубки Φ, t-трансверсальным полю Y. По построению трубки (18) $\Phi \equiv \Phi((s_-, s_+); S(Q_0, \delta_0))$ n-мерный полушар $S(Q_0, \delta_0)$ является сечением трубки Φ, надетой на этот полушар. Но $S(Q_0, \delta_0) \subset \Lambda(Q_0, Y(Q_0))$, поэтому сечение $S(Q_0, \delta_0)$ ортогонально вектору $Y(Q_0)$, и тогда в силу гладкости поля $Y(M)$ можно считать $\delta_0 > 0$ выбранным столь малым, что $S(Q_0, \delta_0)$ будет сечением трубки Φ, t-трансверсальным полю Y.

Замечание 4. Пусть

$$x = \varphi(s, q, t) \tag{19}$$

есть решение задачи Коши (14), (15). При фиксированном (s, t) соотношение (19) можно рассматривать как отображение, переводящее q в x, т. е

$$x = \varphi(s, q, t) : q \to x. \tag{20}$$

В силу теоремы единственности решения задачи Коши (14), (15) ($\forall Q \in S(Q_0, \delta_0)$) следует, что отображение (20) биективно, причем в силу (16), (17) обратное отображение $x \to q$ задается соотношением $q = \varphi(-s, x, t)$. Далее, из теоремы о непрерывности (см. теорему 2.1, § 2, гл. 5 [8]) вытекает, что отображение (20) непрерывно, а в силу теоремы 3.1, § 3, гл. 5 [8] отображение $x \to q = \varphi(-s, x, t)$ принадлежит относительно (s, x, t) также классу $C^{(k)}$. Наконец, рассмотрим отображение $\varphi : B_{\delta_0}(s_-, s_+, Q_0) \to \Phi$, где $B_{\delta_0}(s_-, s_+, Q_0) = \{(s, q, t) \mid s_-(q, t) < s < s_+(q, t), (q, t) \in S(Q_0, \delta_0)\}$, т. е. (см. (18)) $\varphi : (s, q, t) \to (\varphi(s, q, t), t) = (x, t) \in \Phi$. Легко показать, что при достаточно малых $\delta_0 > 0$ и $s_+(q, t) - s_-(q, t) > 0$ ($\forall (q, t) \in S(Q_0, \delta_0)$) отображение $\varphi^{-1} : \Phi \to B_{\delta_0}(s_-, s_+, Q_0)$ является «выпрямляющим» диффеоморфизмом, переводящим каждую траекторию $\varphi_{q_1, t_1} \in \Phi$ в интервал прямой, лежащей в гиперплоскости $t = t_1$ и параллельной оси Os. В частности, если $\exists (-s_0, s_0) \subset (s_-(q, t), s_+(q, t))$ $\forall Q = (q, t) \in S(Q_0, \delta_0)$ и $B_{s_0, \delta_0}(Q_0) = (-s_0, s_0) \times S(Q_0, \delta_0)$ — цилиндр в $\mathbf{R}^{n+2}_{s, q, t}$ с «осью», лежащей на оси Os, то трубка $\Phi \equiv \Phi((-s_0, s_0); S(Q_0, \delta_0))$ переводится выпрямляющим диффеоморфизмом φ^{-1} в цилиндр $B_{s_0, \delta_0}(Q_0)$. Для диффеоморфизма φ, обратного выпрямляющему диффеоморфизму φ^{-1}, имеем $\varphi : (s, q, t) \to (x, t)$, где $x = \varphi(s, q, t)$ есть решение задачи Коши (14), (15).

Определение 7. Оператор (1) слабо вырождается в трубке (18) $\Phi \subset (G \cup \gamma(G)) \setminus \mathscr{E}$ поля $Y \in C^{(1)}(\Phi)$, если для любой точки $M_1 \in \Phi$ и любого орта $M_1 p_1$ (9), неортогонального вектору $Y(M_1)$, существует параболоид (ср. (8)) $\overline{\Pi}_1(M_1, h_1) \subset \Phi$, связанный с функцией Ω_1 и с ортом «оси» $M_1 p_1$, такой, что оператор (1) слабо вырождается (в смысле определения 2) в вершине M_1 этого параболоида с функцией $\widehat{\Omega}_1$ и постоянной $\alpha_1 > 0$, зависящими, вообще говоря, от точки M_1 и орта $M_1 p_1$.

Определение 8. Непрерывная кривая $l_0 \subset (G \cup \gamma(G)) \setminus \mathscr{E}$ называется линией слабой эллиптичности для параболического оператора (1), если для любой точки $Q_0 = (q_0, t_0) \in l_0$ существуют полушаровая окрестность $K_R^-(Q_0) \subset (G \cup \gamma(G)) \setminus \mathscr{E}$, невырожденное векторное поле $Y \in C^{(1)}(K_R^-(Q_0))$, ортогональное оси Ot, и трубка $\Phi \equiv \Phi((-s_0, s_0); S(Q_0, \delta_0)) \subset K_R^-(Q_0)$ поля Y с осью $\varphi_{Q_0} \equiv \varphi((-s_0, s_0); Q_0)$, лежащей на кривой Φ, такие, что оператор (1) слабо вырождается в трубке Φ в смысле определения 7.

Замечание 5. Каждая траектория φ из трубки Φ определения 8 сама является линией слабой эллиптичности для оператора (1).

Нетрудно также показать (ср. [9]), что кривая, являющаяся линией эллиптичности для оператора (1) в смысле А. Д. Александрова (см. [2, 9]), будет линией слабой эллиптичности для оператора (1) и в смысле определения 8.

Теорема 2. *Пусть оператор (1) определен в $(G \cup \gamma(G)) \setminus \mathscr{E}$ и для функции u имеют место (10), (11) и существует точка $M_0 = (x_0, t_0) \in (G \cup \gamma(G)) \setminus \mathscr{E}$, для которой*

$$u(M_0) = \min_{\overline{G}} u = \mu \leqslant 0, \tag{21}$$

причем $M_0 \in l_0$, где $l_0 \subset (G \cup \gamma(G)) \setminus \mathscr{E}$ — линия слабой эллиптичности для оператора (1). Тогда

$$u(M) = u(M_0) \quad \forall M \in \overline{l}_0. \tag{22}$$

Доказательство теоремы 2 проводится с помощью теоремы 1 и совпадает в основном с доказательством теоремы 2 из [9], если воспользоваться определениями 5 и 6 и положить

$$\text{Э}_\lambda : \sum_{i=2}^{n} \frac{\xi_i^2}{\delta^2} + \frac{(t - t_0)^2}{\delta^2} + \frac{s^2}{\lambda^2} < 1, \ s \leqslant 0, \ t \leqslant 0.$$

Замечание 6. Теорема 2 для линий эллиптичности оператора (1) была доказана в [2].

Определение 9. Ось $\varphi_{Q_0}\equiv\varphi((s_-(Q_0),\ s_+(Q_0));\ Q_0)$ трубки Φ поля $Y\in C^{(1)}(\Phi)$ выходит из точки $M_0=(x_0,\ t_0)\in\partial\Phi$, если

$$\exists \lim_{s\to s_-(Q_0)+0}\varphi(s;\ Q_0)=M_0,\ \exists \lim_{s\to s_-(Q_0)+0}\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s;\ Q_0)=$$

$$=\lim_{s\to s_-(Q_0)+0}Y(\varphi(s;\ Q_0))\overset{\text{def}}{=}Y(M_0)\neq 0. \tag{23}$$

Аналогичные условия при $s\to s_+(Q_0)-0$ выполняются, когда ось φ_{Q_0} входит в точку $M_0\in\partial\Phi$.

Определение 10. Точка $M_0\in G\cup\gamma(G)$ обладает свойством D-параболоидности относительно трубки $\Phi\subset(G\cup\gamma(G))\setminus\mathscr{E}$ поля $Y\in C^{(1)}(\Phi)$, если: 1) ось $\varphi_{Q_0}\equiv\varphi((s_-(Q_0),\ s_+(Q_0));\ Q_0)$ трубки (18) Φ выходит из (входит в) точки $M_0\in\partial\Phi$; 2) точка $M_0\in\partial\Phi$ обладает относительно области $\Phi\subset(G\cup\gamma(G))\setminus\mathscr{E}$ свойством строгой x-параболоидности изнутри с параболоидом (8), связанным с ортом «оси» (9), коллинеарным вектору $Y(M_0)$ из (23); 3) для поля Y, пополненного в точке M_0 вектором $Y(M_0)$ из (23), выполнено условие

$$Y\in C^{(1)}(\Phi)\wedge H^{(1)}(\overline{\Pi}(M_0,\ h_0)), \tag{24}$$

обеспечивающее существование единственного решения задачи Коши для пополненной вектором (23) автономной системы (14).

Определение 11. Точки $M_1=(x_1,\ t_0)$, $M_0=(x_0,\ t_0)\in G\cup\gamma(G)$ соединимы линией слабой эллиптической связности для параболического оператора (1), заданного на $(G\cup\gamma(G))\setminus\mathscr{E}$, если существует непрерывная кусочно-гладкая кривая $l[M_1,\ M_0]=\bigcup\limits_{i=2}^{r}l[M_{i-1},\ M_i]\subset(G\cup\gamma(G))\cap\cap\{t=t_0\}$ $(M_r=M_0)$ такая, что: 1) при $i=2,\ 3,\ \ldots,\ r$ простая открытая дуга $\varphi_i\equiv l(M_{i-1},\ M_i)\subset((G\cup\gamma(G))\setminus\mathscr{E})\cap\{t=t_0\}$ является «осью» трубки $\Phi_i\subset(G\cup\gamma(G))\setminus\mathscr{E}$ поля $Y_i\in C^{(1)}(\Phi_i)$, ортогонального оси Ot, в которой оператор (1) слабо вырождается в смысле определения 7; 2) при $i=2,\ 3,\ \ldots,\ r$ «ось» φ_i трубки Φ_i входит в точку $M_i\in\partial\Phi_i$ и выходит из точки $M_{i-1}\in\partial\Phi_j$; 3) точка $M_j\in\partial\Phi_j\cap\partial\Phi_{j+1}$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ r-1)$ обладает свойством D-параболоидности в смысле определения 10 как относительно трубки Φ_j, так и относительно трубки Φ_{j+1}.

Замечание 7. Для точки $M_j\in G\cup\gamma(G)$ возможно $M_j\in\mathscr{E}$, кроме того, точка $M_j\in G\cup\gamma(G)$ может принадлежать границе области единственности решения задачи Коши (14), (15), связанной с трубкой Φ_j (или Φ_{j+1}), относительно которой точка M_j обладает свойством D-параболоидности в смысле определения 10.

Лемма (см. [6, 7]). *Пусть точка $M_0=(x_0,\ t_0)\in G\cup\gamma(G)$ обладает свойством D-параболоидности с параболоидом $\Pi(M_0,\ h_0)\subset\Phi$ относительно трубки (18) Φ невырожденного поля $Y\in C^{(1)}(\Phi)\wedge H^{(1)}(\overline{\Pi}(M_0,\ h_0))$, ортогонального оси Ot, причем «ось» $\varphi_{Q_0}\equiv\varphi((s_-(Q_0),\ s_+(Q_0));\ Q_0)$ трубки (18) выходит из точки M_0. Тогда: 1) $\forall s_1\in\left(0,\ \frac{s_0}{3}\right)$ (где $s_0=\min\limits_{Q\in S(Q_0,\ \delta_0)}(s_+(Q)-s_-(Q))>0$) $\exists\delta_1\in(0,\ \delta_0]$ такое, что $\overline{K_{\delta_1}^-}(Q_0)\subset\Phi([-s_1,\ s_1];\ S(Q_0,\ \delta_0))$; 2) $\exists h_1\in(0,\ h_0]$ и $\alpha_0\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ такие, что $\overline{\Pi}(M_0,\ h_1)\setminus\{M_0\}\subset\Phi\left(\left(s_-,\ -\frac{2}{3}s_0\right);\ S(Q_0,\ \delta_0)\right)\equiv\bigcup\limits_{Q\in S(Q_0,\ \delta_0)}\varphi'\left(s_-(Q),\ -\frac{2}{3}s_0\right);\ Q\right)$, причем боковая поверхность $P(M_0,\ h_1)\subset\Phi\cup\{M_0\}$ параболоида $\Pi(M_0,\ h_1)$ t-трансверсальна пополненному полю (24) и для*

любой точки $(x, t)\in\overline{\Pi}(M_0, h_1)$ существуют точка $Q=(q, t)\in S(Q_0, \delta_0)$ и единственное число $s(x, t)\in\left[s_-(Q), -\frac{2}{3}s_0\right)$ такие, что $x=\varphi(s, q, t)$ при $(x, t)\neq M_0$ и $\lim\limits_{s\to s_-(Q_0)+0}\varphi(s, Q_0)=M_0$ при $(x, t)=M_0$. Далее, существует открытый n-мерный конус вращения к $(M_0, \alpha_0, h_1)\subset\gamma(\Pi(M_0, h_1))$ с ортом оси вращения $M_0p=Y(M_0)$ (см. (23)), касающимся «оси» φ_{Q_0} трубки Φ, с раствором угла $2\alpha_0\in(0, \pi)$ при вершине M_0 и высоты h_1, такой, что $\varphi_{Q_0}\cap(\gamma(\Pi(M_0, h_1))\setminus k(M_0, \alpha_0, h_1))=\varnothing$; 3) $\forall\delta\in(0, \delta_1]$ $\exists h(\delta)\in\in(0, h_1]$ такое, что для любой точки $(x, t)\in\overline{\Pi}(M_0, h(\delta))$ имеем (см. 2)) $\varphi(-s_-(Q), x, t)=\varphi(-s_-(Q)+s(x, t); Q)\in K_\delta^-(Q_0)$, где $x=\varphi(s, x, t)$ при $s\in[0, -s_-(Q)+s(x, t)]$ есть решение задачи Коши с начальным условием $x(0)\equiv\varphi(0, x, t)=x$ для пополненной (24) автономной системы (14).

Теорема 3. *Пусть параболический оператор (1) определен на $(G\cup\gamma(G))\setminus\mathscr{E}$ и для функции и имеют место (10), (11).*

Пусть существует точка $M_0=(x_0, t_0)\in C\cup\gamma(G)$ такая, что имеет место (21), *причем $M_0\in l_0$, где $l_0\subset(G\cup\gamma(G))\cap\{t=t_0\}$ — линия слабой эллиптической связности для оператора* (1) *в смысле определения* 11. *Тогда имеет место (22).*

Доказательство. Пусть $M_1=(x_1, t_0)\in l_0$ — любая, но фиксированная точка, отличная от $M_0=(x_0, t_0)$ из (21). Без ограничения общности можно считать, что существует непрерывная кривая слабой эллиптической связности $l[M_1, M_0]\subset l_0\subset(G\cup\gamma(G))\cap\{t=t_0\}$, состоящая только из одного звена. Имея в виду (21), докажем, что $u(M_1)=\mu$. Поскольку (см. (10)) $u\in C(M_1)$, то существует точка $M_2=(x_2, t_0)\in l(M_1, M_0)$ такая, что $u(M_2)>\mu$. Заметим, что по определению 11 гладкая класса $C^{(2)}$ открытая дуга $l(M_1, M_0)\equiv\varphi_0\subset((G\cup\gamma(G))\setminus\mathscr{E})\cap\{t=t_0\}$ является линией слабой эллиптичности (в смысле определения 8) для параболического оператора (1), и поэтому в силу теоремы 2 имеем оценку $u(M)>>\mu$ $\forall M\in l(M_1, M_0)$ и, в частности,

$$u(Q_0)>\mu, \tag{25}$$

где $Q_0=(q_0, t_0)\in l(M_1, M_0)\equiv\varphi_0=\varphi((s_-(Q_0)), s_+(Q_0); Q_0)$ и φ_0 есть «ось» трубки Φ из определения 11. В силу утверждения 1) леммы существует полушар $K_\delta^-(Q_0)\subset\overline{K_\delta^-}(Q_0)\subset\Phi([-s_1, s_1]; S(Q_0, \delta_0))\subset\Phi$ такой, что (см. (10), (25))

$$u(M)>\mu \quad \forall M\in K_\delta^-(Q_0). \tag{26}$$

«Ось» $\varphi_0\equiv l(M_1, M_0)$ выходит из точки $M_0\in G\cup\gamma(G)$ и обладает свойством D-параболоидности (в смысле определения 10) относительно трубки Φ с параболоидом $\Pi(M_0, h_0)\subset\Phi$. В силу утверждений 2) и 3) леммы $\exists h\in(0, h_0]$ такое, что $\overline{\Pi}(M_0, h)\setminus\{M_0\}\subset\Phi\left(\left(s_-, -\frac{2}{3}s_0\right); S(Q_0, \delta_0)\right)$, и для любой точки $(x, t)\in\overline{\Pi}(M_0, h)\setminus\{M_0\}$ существует траектория φ из трубки Φ, являющаяся по определению 11 линией слабой эллиптичности для параболического оператора (1), такая, что φ проходит через точки (x, t) и $\varphi(-s_-(Q_0)+s(x, t); x, t)\in K_\delta^-(Q_-)$. Но тогда из теоремы 2 с учетом (26) имеем оценку

$$u(x, t)>\mu \quad \forall (x, t)\in\overline{\Pi}(M_0, h)\setminus\{M_0\}\subset(G\cup\gamma(G))\setminus\mathscr{E}. \tag{27}$$

Итак, в силу условий теоремы 3 оператор (1) слабо вырождается в вершине M_0 параболоида $\Pi(M_0, h)$, причем в силу (10), (11), (21) и (27) выполнены все условия теоремы 1, в силу которой имеет место оценка

(13), противоречащая необходимым условиям $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x_i}=0$ $(i=1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$ существования локального экстремума (21) в точке $M_0 \in (G \cup \cup \gamma(G)) \cap \{t=t_0\}$ для функции $u \in C^{(1)}(G)$.

Определение 12. Множество $\mathcal{G}_\tau \subset (G \cup \gamma(G)) \cap \{t=\tau\}$ называется множеством слабой эллиптической связности для параболического оператора (1) (определенного на $(G \cup \gamma(G)) \setminus \mathcal{E}$), если любые две точки M_1, $M_0 \in \mathcal{G}_\tau$ можно соединить линией слабой эллиптической связности в смысле определения 11.

Пусть $M_0=(x_0, t_0) \in G \cup \gamma(G)$. Тогда через $\Lambda_{t0}(M_0)$ обозначим связную компоненту сечения $(G \cup \gamma(G)) \cap \{t=t_0\}$, проходящую через точку M_0.

Определение 13. Параболический оператор (1), заданный на множестве $(G \cup \gamma(G)) \setminus \mathcal{E}$, обладает свойством (СЭ) на множестве $\mathcal{G} \subset \subset G \cup \gamma(G)$, если для любой точки $M_0=(x_0, t_0) \in \mathcal{G}$ множество $\Lambda_{t_0}(M_0) \cap \mathcal{G}$ является множеством слабой эллиптической связности (в смысле определения 12) для оператора (1).

Теорема 4 (ср. [10]). *Пусть*

$$\Pi_0(M_0, k, h_0) \equiv \{(x, t) \in G \mid t_0-h_0<t<t_0-k \sum_{i=1}^{n} (x_i-x_i^0)^2\} \tag{28}$$

— квадратический параболоид вращения с ортом оси вращения $M_0p_0=(0, \ldots, 0, -1)$, «антипараллельным» оси Ot, и с вершиной в точке $M_0=(x_0, t_0)$, причем (см. (4))

$$0<k<\frac{1}{2\bar{A}}. \tag{29}$$

Пусть для функции u имеют место (10), (11) и (см. (5), (6))

$$L_0u(x, t) \leqslant 0 \quad \forall (x, t) \in \mathcal{E}, \tag{30}$$

причем

$$u(M_0)=\mu \leqslant 0, \quad u(M)>u(M_0) \quad \forall M \in \overline{\Pi}_0(M_0, k, h_0) \setminus \{M_0\} \subset G. \tag{31}$$

Тогда имеет место оценка

$$D_t^- u(M_0) \overset{\text{def}}{=} \limsup_{t \to t_0-0} \frac{u(x_0, t)-u(x_0, t_0)}{t-t_0}<0. \tag{32}$$

Доказательство. Следуя схеме доказательства теоремы 1 из [10] (где $r=1$), рассмотрим в параболоиде (28) барьер

$$V(x, t)=(t_0-t)\left(1-\frac{k}{t_0-t} \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2\right), \quad (x, t) \in \overline{\Pi}_0(M_0, k, h_0) \subset \bar{G}, \tag{33}$$

для которого в силу ограниченности коэффициентов оператора (1), (5) показывается (см. [10]), что $\exists h_1 \in (0, h_0]$ такое, что имеют место

$$V \in C(\overline{\Pi}_0(M_0, k, h_1)) \wedge C_{x, t}^{2, 1}(\Pi_0(M_0, k, h_1)), \tag{34}$$

$$V(M)=0 \quad \forall M \in P_0(M_0, k, h_1)=\Sigma(\Pi_0(M_0, k, h_1)), \tag{35}$$

$$V(M)>0 \quad \forall M \in \Pi_0(M_0, k, h_1) \cup B_0(h_1), \quad B_0(h_1)=\gamma_0(\Pi_0(M_0, k, h_1)) \tag{36}$$

и (см. (29))

$$LV(M) \geqslant \frac{1}{2}(1-2k\bar{A})>0 \quad \forall (x, t) \in \Pi_0(M_0, k, h_1) \setminus \mathcal{E}. \tag{37}$$

Далее из (5), (33) $\forall (x, t) \in \Pi_0(M_0, k, h_1) \cap \mathscr{E}$ имеем

$$L_0 V(x, t) = 1 - 2k \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)(x_i - x_i^0) +$$

$$+ b(x, t)(t - t_0)\left(1 - \frac{k}{t_0 - t} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2\right). \qquad (38)$$

Используя ограниченность коэффициентов оператора (5), из (33), (36) видим, что постоянную $h_1 \in (0, h_0]$ можно считать столь малой, что имеет место оценка (см. (6)) $\forall (x, t) \in \Pi_0(M_0, k, h_1) \cap \mathscr{E}$

$$|B(t - t_0)| + 2k \left| \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)(x_i - x_i^0) \right| < \frac{1}{2},$$

с помощью которой из (38) получаем оценку снизу

$$L_0 V(x, t) \geqslant \frac{1}{2} > 0 \quad \forall (x, t) \in \Pi_0(M_0, k, h_1) \cap \mathscr{E}. \qquad (39)$$

Вводя новый барьер

$$W(x, t) = u(x, t) - u(x_0, t_0) - l_1 V(x, t), \quad (x, t) \in \overline{\Pi}_0(M_0, k, h_1), \qquad (40)$$

где $l_1 \in \left(0, \frac{\mu_1 - \mu}{m}\right)$, $\mu_1 = \min\limits_{B_0(h_1)} u$, $m = \max\limits_{B_0(h_1)} V > 0$ (см. (31), (37)), имеем в силу (10), (34)

$$W \in C(\Pi_0(M_0, k, h_1)) \wedge C^{(1)}(\Pi_0(M_0, k, h_1)) \wedge C^{2,1}_{x,t}(\Pi_0(M_0, k, h_1) \setminus \mathscr{E}). \qquad (41)$$

Из (31), (35), (36) следует

$$W(M) \geqslant 0 \quad \forall M \in \Gamma(\Pi_0(M_0, h, h_1)), \qquad (42)$$

из (31), (37)

$$LW(M) < 0 \quad \forall M \in \Pi_0(M_0, k, h_1) \setminus \mathscr{E}, \qquad (43)$$

а из (30), (39)

$$L_0 W(M) < 0 \quad \forall M \in \Pi_0(M_0, k, h_1) \cap \mathscr{E}. \qquad (44)$$

Но тогда из (41)—(44) вытекает оценка

$$W(M) \geqslant 0 \quad \forall M \in \overline{\Pi}_0(M_0, k, h_1). \qquad (45)$$

В самом деле, если, вопреки (45), $\exists M_1 \in \Pi_0(M_0, k, h_1)$ такая, что

$$W_1(M_1) = \min_{\overline{\Pi}_0(M_0, k, h_1)} W < 0, \qquad (46)$$

то, как показано при доказательстве теоремы 1 из [10], $M_1 \overline{\in} \Pi_0(M_0, k, h_1) \setminus \mathscr{E}$, т. е. $M_1 \in \mathscr{E} \cap \Pi_0(M_0, k, h_1)$. Но тогда из (46) в силу необходимых условий существования локального экстремума у дифференцируемой функции (см. (41)) имеем $\frac{\partial W(M_1)}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\frac{\partial W(M_1)}{\partial t} = 0$ и тогда в силу (46) и (6) имеем оценку снизу $L_0 W(M_1) = b(M_1) W(M_1) \geqslant 0$, противоречащую (44), что и доказывает (45). Из (45) имеем (см. (40)) оценку

$$u(x, t) - u(x_0, t_0) \geqslant l_1 V(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Pi_0(M_0, k, h_1). \qquad (47)$$

Но из (28), (33) вытекает оценка $V(x, t) \geqslant t_0 - t$ $\forall (x, t) \in \Pi_0(M_0, k, h_1)$, из которой ввиду (47) получаем $u(x_0, t) - u(x_0, t_0) \geqslant l_1(t_0 - t)$, $t_0 - h_1 \leqslant t \leqslant t_0$, что и завершает доказательство (32).

Определение 14. Пусть $M_0 = (x_0, t_0) \in \overline{G}$ и $M_1 = (x_0, t_1) \in G$, где

$t_1<t_0$. Тогда интервал (прямой) $(M_0, M_1)\subset G$, антипараллельный оси Ot, называется линией параболичности для оператора (1), если: 1) существуют квадратический параболоид вращения (28), связанный с параметром k, удовлетворяющим условию (29) (см. (4)), и 2) открытый цилиндроид $C_\delta(M_0, M_1)=\left\{(x, t)\in G \,|\, t_1<t<t_0-k\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2;\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2<\delta^2=\frac{h_0^2}{k}\right\}$ такой, что оператор (1) обладает в цилиндроиде $C_\delta(M_0, M_1)$ свойством (СЭ) в смысле определения 13, причем $\bar{C}_\delta(M_0, M_1)\setminus\{M_0\}\subset G$.

Замечание 8. Любой интервал $(\bar{M}, \underline{M})\subset C_\delta(M_0, M_1)\subset G$, антипараллельный оси Ot (так, что $\bar{M}=(x, \bar{t})$, $\underline{M}=(x, \underline{t})$ при $t_1\leqslant\underline{t}<\bar{t}\leqslant t_0$), также является линией параболичности для оператора (1).

Теорема 5. *Пусть параболический оператор (1) определен на $(G\cup\gamma(G))\setminus\mathscr{E}$, а оператор (5) — на $\mathscr{E}=\partial\mathscr{E}$. Пусть для функции u имеют место (10), (11), (30) и существует точка $M_0=(x_0, t_0)\in G\cup\gamma(G)$ такая, что имеет место (21) и $(M_0, M_1)\subset G$ (где $M_1=(x_0, t_0)$, $t_1<t_0$) есть линия параболичности для оператора (1) в смысле определения 14. Тогда*

$$u(M)=u(M_0)\quad \forall M\in[M_0, M_1]. \tag{48}$$

Доказательство. Допустим, что утверждение (48) неверно, тогда существует точка $M_2=(x_0, t_2)\in(M_0, M_1)\subset G$ (где $t_1<t_2<t_0$) такая, что (см. (21))

$$u(M_2)>\mu. \tag{49}$$

Поскольку (M_1, M_0) есть линия параболичности для оператора (1), то существует цилиндроид $C_\delta(M_1, M_0)\subset G$ с осью вращения (M_1, M_0), в котором оператор (1) обладает свойством (СЭ), причем $\bar{C}_\delta(M_1, M_0)\setminus\{M_0\}\subset G$. В силу локальных свойств непрерывной функции $u\in C(\bar{G})$ из (49) видим, что $\exists\delta_0\in\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ такое, что $\bar{K}_{\delta_0}(M_2)\subset C_\delta(M_1, M_0)$ и

$$u(M)>\mu\quad \forall M\in\bar{K}_{\delta_0}(M_2). \tag{50}$$

Рассмотрим семейство линз $\{Л(M_\tau, h_0);\ \tau\in[t_2, t_0]\}$, где $M_\tau=(x_0, \tau)\in[M_0, M_2]$, и (ср. (28))

$$Л(M_\tau, h_0)=\Pi_0(M_\tau, k, h_0)\cap K_{\delta_0}(M_\tau)=\{(x, t)\in G \,|\, \tau-h_0<t<\tau-k\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2,\ \tau-\sqrt{\delta_0^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2}<t<\tau-h_0\}\subset C_\delta(M_1, M_0)\subset G. \tag{51}$$

Тогда имеем $\bar{Л}(M_\tau, h_0)\subset C_\delta(M_1, M_0)\subset G\quad \forall\tau\in[t_2, t_0)$, $\bar{Л}(M_0, h_0)\setminus\{M_0\}\subset\bar{C}_\delta(M_1, M_0)\setminus\{M_0\}\subset G$, причем в силу (50) имеет место оценка

$$u(M)>\mu\quad \forall M\in\bar{Л}(M_2, h_0)\subset C_\delta(M_1, M_0)\subset G. \tag{52}$$

Непрерывно меняя параметр τ в (51) от t_2 до t_0, в силу (21) и (52) видим, что $\exists\tau_0\in(t_2, t_0]$ такое, что $u(M)>\mu\ \forall M\in\bar{Л}(M_\tau, h_0)\subset C_\delta(M_1, M_0)\subset G$ при $\tau\in[t_2, \tau_0)$, хотя

$$u(M)>\mu\quad \forall M\in Л(M_{\tau_0}, h_0). \tag{53}$$

Но существует точка $M_3\in\Sigma(Л(M_{\tau_0}, h_0)\cap\{\tau_0-h_0\leqslant t\leqslant\tau_0\})$ такая, что

$$u(M_3)=\mu\leqslant 0. \tag{54}$$

Относительно расположения точки $M_3=(x_3, \tau_3)$ (не являющейся, очевидно, нижней вершиной $(x_0, \tau_0-\delta_0)$ линзы $Л(M_{\tau_0}, h_0)$) возможны два случая: 1) точка $M_3=M_{\tau_0}=(x_0, \tau_0)$ есть верхняя вершина линзы $Л(M_{\tau_0}, h_0)$ и 2) точка $M_3 \in \Sigma(Л(M_{\tau_0}, h_0))$ не является ни верхней, ни нижней вершинами линзы $Л(M_{\tau_0}, h_0)$. Случай 1) невозможен. В противном случае без ограничения общности можно считать, что $M_3=M_{\tau_0}$ — единственная граничная точка линзы $Л(M_{\tau_0}, h_0)$, для которой справедливо (54), причем (см. (53)) имеет место оценка $u(M)>\mu$ $\forall M \in \overline{\Pi}_0(M_{\tau_0}, k, h_0)\setminus\{M_{\tau_0}\}$. Но тогда для точки $M_3=M_{\tau_0} \in G \cup \gamma(G)$ и для суперпараболической функции u выполнены все условия (10), (11), (30) и (31) теоремы 4, из которой (см. (32)) имеем

$$D_t^- u(M_{\tau_0})<0. \tag{55}$$

Но, согласно (54), (21), точка $M_{\tau_0}=M_3 \in G \cup \gamma(G)$ есть точка локального минимума функции $u \in C_x^{(1)}((G \cup \gamma(G)) \cap \{t=\tau_0\})$, и поэтому в силу необходимых условий существования локального экстремума у дифференцируемой (по x) функции u в точке $M_3 \in G \cup \gamma(G)$ имеем при $i=1, 2, \ldots, n$ $\dfrac{\partial u(M_3)}{\partial x_i}=0$. Но тогда в силу неотрицательности характеристической формы (3) оператора (1) из математического анализа имеем оценку $B(M_3) \equiv \sum\limits_{i, j=1}^{n} a_{ij}(M_3) \dfrac{\partial^2 u(M_3)}{\partial x_i \partial x_j} \geqslant 0$, откуда в силу (55) при $M_3 \overline{\in} \mathscr{E}$ имеем оценку $Lu(M_3)=B(M_3)+c(M)\mu-D_t^- u(M_3)>0$, противоречащую (11), а при $M_3 \in \mathscr{E}$ — оценку $L_0 u(M_3)=b(M_3)\mu-D_t^- u(M_3)>0$, противоречащую (30). При рассмотрении случая 2) расположения точки $M_3=(x_3, \tau_3) \in \Sigma(Л(M_{\tau_0}, h_0))$ (где $t_2<\tau_3<t_0$) справедливо (54), и поскольку сечение $C_\delta(M_1, M_0) \cap \{t=\tau_3\} \subset G$ является множеством слабой эллиптической связности для оператора (1), то в силу теоремы 3 $u(M)=\mu \leqslant 0$ $\forall M \in C_\delta(M_1, M_0) \cap \{t=\tau_3\} \subset G$ и, в частности, $u(M)=\mu$ $\forall M \in Л(M_{\tau_0}, h_0) \cap \cap \{t=\tau_3\}$, что противоречит выбору параметра τ_0, для которого имеет место (53).

Замечание 9. В работе [2] теорема 5 доказана для оператора (1) (с ограниченными коэффициентами), заданного в $G \cup \gamma(G)$ при $\mathscr{E}=\varnothing$.

Определение 15. Пусть точка $M_0=(x_0, t_0) \in G \cup \gamma(G) \cup \Sigma(G)$. Тогда множеством $\mathscr{G}(M_0)$, подчиненным точке M_0 в силу слабой параболической связности, называется совокупность всех точек $M=(x, t) \in \mathscr{G}(M_0) \subset G \cup \gamma(G)$ (где $t \leqslant t_0$), соединимых с точкой M_0 непрерывной замкнутой дугой $l[M_0, M]$ такой, что полуоткрытая дуга $l(M_0, M] \subset G \cup \cup \gamma(G)$ состоит из конечного числа дуг слабой эллиптической связности оператора (1) (лежащих в гиперплоскостях, ортогональных оси Ot) и конечного числа линий параболичности для оператора (1), лежащих на прямых, параллельных оси Ot и проходимых (от M_0 к M) в направлении убывания t. Дуга $l[M_0, M]$ называется при этом линией слабой параболической связности для оператора (1).

Теорема 6. *Пусть на множестве $(G \cup \gamma(G)) \setminus \mathscr{E}$ определен оператор (1), а на множестве $\mathscr{E}$ — оператор (5) и для функции u выполнены (10), (11), (30) и (21). Тогда $u(M_1)=u(M_0)$ для любой точки $M_1=(x_1, t_1) \in G \cup \gamma(G)$ (с $t_1 \leqslant t_0$), соединимой с точкой $M_0 \in G \cup \gamma(G)$ линией слабой параболической связности $l[M_0, M_1] \subset G \cup \gamma(G)$. В частности, $u(M)=$ $=u(M_0)$ $\forall M \in \overline{\mathscr{G}}(M_0)$, где $\mathscr{G}(M_0)$ — множество, подчиненное точке $M_0 \in$ $\in G \cup \gamma(G)$ в силу слабой параболической связности.*

Теорема 6 следует из теорем 3 и 5.

Литература

1. Nirenberg L. A strong maximum principle for parabolic equations.— Communs. Pure and Appl. Math., 1953, vol. 6, N 2, p. 167—177.
2. Александров А. Д. Исследования о принципе максимума. III.— Изв. вузов, Математика, 1959, № 3, с. 3—15.
3. Камынин Л. И., Химченко Б. Н. Об одном аспекте развития теории изотропного строгого принципа экстремума А. Д. Александрова.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 2, с. 280—292.
4. Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.— М.: Наука, 1971.— 287 с.
5. Камынин Л. И., Химченко Б. Н. О строгом принципе экстремума для вырождающихся параболических уравнений 2-го порядка.— Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 5, с. 1060—1063.
6. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1961.— 387 с.
7. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.—Л.: Гостехиздат, 1949.— 550 с.
8. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.— 720 с.
9. Камынин Л. И., Химченко Б. Н. О строгом принципе экстремума для слабо эллиптически связного оператора 2-го порядка.— ЖВМ и МФ, 1979, т. 19, № 1, с. 129—142.
10. Камынин Л. И., Химченко Б. Н. Теоремы Жиро о временной производной для параболического оператора 2-го порядка.— Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., 1977, № 5, с. 45—53.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию ***23 мая 1980 г.***

УДК 517.956.4

И. Т. МАМЕДОВ

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ВБЛИЗИ ГРАНИЧНОЙ ТОЧКИ

Пусть D — ограниченная область $(n+1)$-мерного евклидова пространства R_{n+1} точек $(t, x_1, \ldots, x_n)$ и $\Gamma(D)$ — ее собственная граница. Рассмотрим в D следующее уравнение:

$$Lu=\varphi_1(t, x)\Big[\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(t, x)u_{x_ix_k}-u_t\Big]+\varphi_2(t, x)\Big[\sum_{i, k=1}^{n} b_{ik}(t, x)u_{x_ix_k}-u_t\Big]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} d_i(t, x)u_{x_i}+c(t, x)u=0. \qquad (1)$$

Будем считать, что матрицы $\|a_{ik}(t, x)\|$ и $\|b_{ik}(t, x)\|$ положительно определены, а функции $\varphi_1(t, x)>0$ и $\varphi_2(t, x)\geqslant 0$ могут стремиться к нулю при приближении (t, x) к граничной точке (t^0, x^0). Кроме того, коэффициенты $a_{ik}(t, x)$ предположим непрерывными по Дини в области D.

Известно, что в этом случае при довольно широких предположениях относительно коэффициентов $b_{ik}(t, x)$ (они могут быть даже разрывными) существует обобщенное по Винеру решение $u_f(t, x)$ задачи Дирихле

$$Lu=0 \text{ в } D, \quad u|_{\Gamma(D)}=f, \quad f \text{ непрерывна на } \Gamma(D). \qquad (2)$$

Функция $u_f(t, x)$ при этом в каждой строго внутренней подобласти D' области D удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле.

Определение 1. Точка $(t^0, x^0)\in\Gamma(D)$ называется регулярной по Винеру относительно задачи Дирихле, если для любой непрерывной на $\Gamma(D)$ функции f $\lim\limits_{(t, x)\to(t^0, x^0)} u_f(t, x)=f(t^0, x^0)$.