В. И. Гурман, Е. А. Трушкова, И. В. Расина, О. В. Усенко, Иерархическая модель неоднородной дискретной системы и ее приложения, *УБС*, 2013, выпуск 41, 249–269

УДК 519.86
ББК 22.19

ИЕРАРХИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕОДНОРОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ[1]

Гурман В.И.[2], **Трушкова Е.А.**[3],
(*Институт программных систем имени А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский*)
Расина И.В.[4], **Усенко О.В.**[5],
(*Сибирская академия права, экономики и управления, Иркутск*)

Рассматривается концепция двухуровневой модели неоднородной дискретной управляемой системы и связанные с ней алгоритмы оптимизации управления. Предлагается ее применение для модификации имеющихся готовых программ путем создания над ними верхнего, дискретного, уровня, обеспечивающего заданное целенаправленное функционирование и текущую настройку. Это демонстрируется на примере моделирования инноваций в региональной социо-эколого-экономической модели, когда требуется варьирование параметров модели, изначально принятых постоянными.

Ключевые слова: сложные системы, моделирование, компьютерные программы, оптимальное управление.

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ, проект № 11-02-00171 и РФФИ, проекты № 12-01-00256, № 10-06-00081.*

[2] *Владимир Иосифович Гурман, д-р техн. наук, гл. науч. сотр.,* (*head@head.botik.ru*).

[3] *Екатерина Александровна Трушкова, канд. физ.-мат. наук, ст. научч. сотр.,* (*katerinatr@mail.ru*).

[4] *Ирина Викторовна Расина, канд. физ.-мат. наук, зав. каф. математических и естественно-научных дисциплин,* (*iras6547@mail.ru*).

[5] *Олег Валерьевич Усенко, старший преподаватель,* (*0.V.usenko@gmail.com*).

1. Введение

Научно-технический прогресс, использование современных компьютерных и информационных технологий повлекли за собой усложнение управляемых систем и бурный рост их многообразия. Это приводит к необходимости, с одной стороны, построения новых моделей и методов с соответствующими алгоритмами и программами, а с другой — создания средств эффективного использования уже имеющихся действующих разработок. Актуализировались важные результаты отечественных исследований прошлых лет, полученных в работах С.В. Емельянова, В.Ф. Кротова, и Я.З. Цыпкина, Ю.С. Попкова, А.Б. Куржанского, С.Н. Васильева, Б.М. Миллера, Е.Я. Рубиновича и др. Среди них — условия оптимальности для абстрактной динамической модели [8] и сети операторов [2] и подход, основанный на иерархическом представлении дискретно-непрерывных систем (ДНС) с целью декомпозиции неоднородной системы на отдельные однородные подсистемы [3, 11], общие достаточные условия оптимальности типа Кротова и итерационные методы оптимизации для таких систем общего вида [12, 13]. Такие модели успешно применялись в различных областях: в космонавтике, робототехнике, технологических и производственных процессах, экономических, экологических, социо-эколого-экономических системах и т.п. Поток публикаций в мировой литературе, посвященный различным неоднородным управляемым системам, неуклонно возрастает (список наиболее представительных приведен в [13]). В них исследуются главным образом неоднородные дифференциальные системы переменной структуры, называемые чаще всего гибридными.

В данной работе рассматриваются дискретные системы, которым в литературе уделяется гораздо меньше внимания, чем непрерывным (что отчасти объясняется отсутствием аналога принципа максимума Понтрягина для таких систем). Предлагается соответствующая концепция двухуровневой модели неоднородной системы. Верхний дискретный уровень учитывает неоднородность моделируемого объекта в целом, а нижний описывает дискретные однородные подсистемы. Кратко описываются полученные на ее основе условия оптимальности и алгоритмы оптимизации, по аналогии с известными достаточными условиями оптимальности Кротова [8, 9]. Дискретная двухуровневая модель возникает, в частности, при естественной дискретизации нижнего уровня ДНС при проведении практических вычислений и поэтому имеет широкие перспективы приложений, по крайней мере, в тех же областях, где применима модель ДНС. Первая ее версия с алгоритмом оптимизации градиентного типа была предложена в [4, 14]. Рассматриваемая в данной статье версия — более общая, с существенно более эффективным алгоритмом, использующим итерации как локального, так и нелокального улучшения.

В качестве приложения предлагается применить рассматриваемую концепнцию для использования имеющихся готовых программ путем создания над ними верхнего дискретного уровня, обеспечивающего заданное целенаправленное функционирование и текущую их настройку. Это демонстрируется на достаточно общей процедуре моделирования инноваций с практической реализацией в региональной социо-эколого-экономической модели, рассматривавшейся ранее в [5] с других позиций.

2. Модель двухуровневой системы

Рассматриваемая модель представляет собой двухуровневую структуру. На верхнем уровне фигурирует дискретная модель

$$\begin{aligned} &x(k+1) = f(k, x(k), u), \\ &k \in \mathbf{K} = \{k_I, k_I + 1, ..., k_F\}, \end{aligned} \tag{1}$$

где k – номер шага (этапа), а переменные x, u и оператор $f(k, x, u)$ интерпретируются следующим образом.

На некотором подмножестве $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$, $k_F \notin \mathbf{K}'$, u рассматривается как пара $\left(u^d, m^c\right)$, где m^c – дискретный процесс $(x^c(t), u^c(t))$; $t \in \mathbf{T} = \{t_I, t_I + 1, \dots t_F\}$; $m^c \in \mathbf{D}^c(k, z)$, $z = \left(x, u^d\right)$; x, u^d – переменные произвольной природы, а $\mathbf{D}^c$ – множество допустимых процессов m^c, удовлетворяющих при каждом k, z системе (нижнего уровня)

$$x^c(t+1) = f^c\left(k, z, t, x^c(t), u^c\right), \quad t \in \mathbf{T}(k, z(k)). \tag{2}$$

$$x^c \in \mathbf{X}^c(k,z,t) \subset \mathbb{R}^{n(k)},\ u^c \in \mathbf{U}^c\left(k,z,t,x^c\right) \subset \mathbb{R}^{p(k)}.$$

Оператор правой части (1) сводится к следующему:

$$f\left(k,x,u\right) = \theta\left(k,z,\gamma^c\right), \quad \gamma^c = (t_I, x_I^c, t_F, x_F^c) \in \mathbf{\Gamma}^c(k,z) =$$

$$\gamma^c\colon t_I = \tau(k,z), t_F = \vartheta(k,z), x_I^c = \xi(k,z), \quad x_F^c \in \mathbf{\Gamma}_F^c(k,z)\},$$

где $\tau(k,z),\ \vartheta(k,z); \xi(k,z)$ – заданные функции (функционалы); $\mathbf{\Gamma}_F^c(k,z) \subset \mathbb{R}^{n(k)}$ – заданное при каждом k,z множество. Как видно, k и z – переменные верхнего уровня, играющие на нижнем уровне роль параметров.

На оставшемся подмножестве $\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'$ x, u – переменные произвольной природы (возможно различной) для различных k, u принимает значения из заданного при каждом k и x множества $\mathbf{U}(k,x)$ [6]

3. Задача оптимального управления

Будем рассматривать на множестве $\mathbf{D}$ процессов

$$m = \left(x(k), u(k), x^c(k,t), u^c(k,t)\right),$$

удовлетворяющих (1)–(2), и задачу оптимального управления с минимизируемым концевым функционалом $I = F\left(x\left(k_F\right)\right)$ при фиксированных $k_I = 0,\ k_F,\ x\left(k_I\right)$ и дополнительных ограничениях $x(k) \in \mathbf{X}(k)$.

[6] *Здесь с учетом специфики иерархического представления применяются условно-контекстные обозначения. Так, например, u обозначает свободную переменную; $u(k)$ – программу управления; $u(k,x)$ – синтез (поле) управления либо значение при данном k, при данных k,x в зависимости от контекста. Такие обозначения уже стали традиционными для аналогичных ДНС (см., например, [12, 13]). Альтернативой было бы введение обилия новых символов (букв, индексов и т.п.), что крайне нежелательно, в особенности на последующих этапах исследования – вывода условий оптимальноси и алгоритмов оптимизации.*

Для решения этой задачи вводится множество $\mathbf{E}$ процессов m, где исключены дискретные цепочки, и обобщенный лагранжиан Кротова по аналогии с [13]:

$$L = G\left(x\left(k_F\right)\right) - \sum_{\mathbf{K} \backslash \mathbf{K}' \backslash k_F} R(k, x(k), u(k)) +$$

$$+ \sum_{\mathbf{K}'} \Big(G^c(z(k)) - \sum_{\mathbf{T}(z(k)) \backslash t_F} R^c(z(k), t, x^c(k,t), u^c(k,t)) \Big),$$

$$G\left(x\right) = F\left(x\right) + \varphi\left(k_F, x\right) - \varphi\left(k_I, x\left(k_I\right)\right),$$

$$R\left(k, x, u\right) = \varphi\left(k+1, f\left(k, x, u\right)\right) - \varphi\left(k, x\right),$$

$$G^c\left(k, z, \gamma^c\right) = -\varphi\left(k+1, \theta\left(k, z, \gamma^c\right)\right) + \varphi\left(k, x\left(k\right)\right) +$$

$$+ \varphi^c\left(k, z, t_F, x_F^c\right) - \varphi^c\left(k, z, t_I, x_I^c\right),$$

$$R^c\left(k, z, t, x^c, u^c\right) = \varphi^c(k, z, t{+}1, f^c\left(k, z, t, x^c, u^c\right)) {-} \varphi^c(k, z, t, x^c).$$

Здесь $\varphi\left(k, x\right)$ – произвольный функционал; $\varphi^c\left(k, z, t, x^c\right)$ – произвольное параметрическое семейство скалярных функций от $t,\ x^c$ (с параметрами k, z).

Легко убедиться, что $L(m) = I(m)$ при $m \in \mathbf{D}$, т.е. при выполнении отброшенных связей $L(m)$ совпадает с $I(m)$. Действительно, при $m \in \mathbf{D}$, как видно,

$$R = \varphi\left(k+1, x(k+1)\right) - \varphi\left(k, x\right),$$

$$R^c = \varphi^c(k, z, t+1, x^c(t+1)) - \varphi^c(k, z, t, x^c),$$

$$L = F(x(k_F) + \sum_{\mathbf{K} \backslash \mathbf{K}'} \left(\varphi\left(k, x\right) - \varphi\left(k, x\right)\right) +$$

$$+ \sum_{\mathbf{K}'} \Big(\sum_{\mathbf{T}(k, z(k))} \left(\varphi^c(k, z(k), t, x^c(k,t)) - \varphi^c(k, z(k), t, x^c(k,t))\right) \Big) =$$

$$= F(x(k_F)) = I.$$

Отсюда непосредственно вытекают следующие утверждения:

1. Для последовательности $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ условие $L(m_s) \to \inf\limits_{\mathbf{E}}$ есть достаточное условие, что эта последовательность минимизирует I на $\mathbf{D}$.

2. Если $m^{\mathrm{I}} \in \mathbf{D}$, $L(m^{\mathrm{II}}) \leqslant L(m^{\mathrm{I}})$ и $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{D}$, то $I(m^{\mathrm{II}}) \leqslant I(m^{\mathrm{I}})$.

Первое утверждение – это общее достаточное условие оптимальности типа Кротова, которое может применяться для получения тех или иных конкретных условий оптимальности.

Второе используется для построения итерационных поцедур оптимизации путем последовательного поиска улучшенных допустимых элементов. При этом m^{II} ищется из условия уменьшения функционала L без учета отброшенных связей, а сам функционал L задается посредством $(\varphi,\ \varphi^c)$ так чтобы m^{II} им удовлетворял, т.е. был бы допустимым.

Здесь предлагается метод улучшения, основанный на комбинации минимаксного принципа [10] и принципа локализации [1, 4].

Предположим, что $\mathbf{X}(k) = \mathbb{R}^{m(k)}$, $\mathbf{X}^c(k,z,t) = \mathbb{R}^{n(k)}$, $x_I^c = \xi(z)$, t_I, t_F, k_I, x_I и k_F заданы, $x_F^c \in \mathbb{R}^{n(k)}$. Минимаксный принцип применительно к данной задаче состоит в следующем. Задан элемент $m^{\mathrm{I}} \in \mathbf{D}$. Функции $\varphi\left(k, x\left(k\right)\right), \varphi^c\left(k,z,t,x^c\right)$ задаются из условий:

$$1)\ R\left(k, x(k), u^I(k)\right) \to \min_x,$$

$$2)\ G\left(x\right) \to \max,$$

$$3)\ R^c\left(k,z,t,x^c\left(k,t\right), u^{c\mathrm{I}}\left(k,t\right)\right) \to \min_{x^c},$$

$$4)\ G^c\left(k,z,\tilde{x}^c(t_F,z)\right) - \\ - \sum_{\mathbf{T}(z)\setminus\vartheta(k,z)} R^c(k,z(k),t,\tilde{x}^c(k,z,t),u^{c\mathrm{I}}(k,t)) \to \max_x,$$

где $\tilde{x}^c(k,z,t)$ — результат операции в 3). Минимизация и максимизация производится по областям, где ожидается прохождение улучшенной траектории. Эти условия могут быть выполнены неоднозначно и оставляют значительную свободу выбора функций φ и φ^c. Если потребовать, чтобы левые части в этих условиях не зависели от $x,\ x^c$, то на верхнем и нижнем уровнях получатся дискретные цепочки относительно $\varphi,\ \varphi^c$, описываемые уравнениями типа Беллмана, но не содержащими операции поиска максимума по $u,\ u^c$ и, следовательно, линейными относительно $\varphi,\ \varphi^c$.

Из заданной иерархической системы и начальных условий при управлениях

$$\tilde{u}\left(k,x\right)=\arg\max_{u\in\mathbf{U}(k,x)}R\left(k,x\left(k\right),u\left(k\right)\right),$$

$$\tilde{u}^c\left(k,z,t,x^c\right)=\arg\max_{u^c\in\mathbf{U}^c(k,z,t,x^c)}R^c\left(k,z,t,x^c,u^c\right).$$

$$\tilde{u}^d(k,x)=\arg\min_{u^d\in\mathbf{U}^d(k)}\Big(G^c(z,\tilde{x}^c(k,z,t_F))-\sum_{\mathbf{T}(k,z)\setminus t_F}\tilde{R}^c(k,z,t)\Big),$$

где $\tilde{R}^c\left(k,z,t\right)=R^c\left(k,z,t,\tilde{x}^c(k,z,t),\tilde{u}^c\left(k,z,t,\tilde{x}^c(k,z,t)\right)\right)$, находятся функции $x^{\mathrm{II}}(k),\ x^{c\mathrm{II}}(k,t)$ и программы управлений:

$$u^{\mathrm{II}}\left(k\right)=\tilde{u}\left(k,x^{\mathrm{II}}(k)\right),\quad u^{d\mathrm{II}}\left(k\right)=\tilde{u}^d\left(k,x^{\mathrm{II}}(k)\right),$$

$$u^{c\mathrm{II}}\left(k,t\right)=\tilde{u}^c\left(k,t,x^{\mathrm{II}}(k),x^{c\mathrm{II}}(k,t)\right),$$

т.е. элемент m^{II} , такой что $I\left(m^{\mathrm{II}}\right)\leqslant I\left(m^{\mathrm{I}}\right)$. Повторяя итерационно эти операции, получим улучшающую последовательность $\{m_s\}$. Заметим, что фактически априорного вычисления и запоминания полей управлений здесь не требуется; нужные значения $\tilde{u}\left(k,x\right)$, $\tilde{u}^c\left(k,z,t,x^c\right)$, $\tilde{u}^d(k,x)$ определяются в процессе разрешения дискретных цепочек «слева направо». Если в той или иной конкретной задаче удается разрешить указанные линейные уравнения для φ и φ^c достаточно просто (например в классе линейных или линейно-квадратических конструкций), то описанная схема может быть применена непосредственно и улучшение оказывается глобальным. Иначе можно действовать по принципу локализации, выполняя указанные операции приближенно в достаточно малой окрестности траектории иерархического процесса

m^{I}. Следует ввести регулятор улучшения, обеспечивающий принадлежность m^{II} указанной окрестности. В данном случае, при использовании операции максимизации по управляющим переменным итерационной процедуры, удобно использовать сужения $\mathbf{U}_\nu$, $\mathbf{U}^d_\nu$, $\mathbf{U}^c_\nu$ множеств $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^d$, $\mathbf{U}^c$. Сужения могут задаваться различным образом в зависимости от специфики конкретных задач, например $\mathbf{U}_\nu = \mathbf{U}_\nu \cap \{u\colon |u - u_s(k)| \leqslant \nu\}$ и т.п.

Одна из схем – линейная тейлоровская аппроксимация функционала L.

Для выполнения условий 1)–4) по крайней мере приближенно в некоторой окрестности m^{I} достаточно потребовать

$$G^{\mathrm{I}}_x = 0, \quad R^{\mathrm{I}}_x = 0, \quad R^{c\mathrm{I}}_{x^c} = 0, \quad R^{c\mathrm{I}}_{x^c z} = 0, \quad G^{c\mathrm{I}}_x + G^{c\mathrm{I}}_z z_x = 0,$$

$$\varphi = \psi(k)x,\ \varphi^c = \psi^c(z,t)x^c,\ \psi^c(z,t) = \psi^c_0(k,t) + \psi^c_z(k,t)\left(z - z^{\mathrm{I}}\right),$$

Значения переменных берутся на элементе m^{I} для соответствующих k и t.

Расшифровка этих условий приводит к следующей задаче Коши с начальными условиями на правом конце:

$$\psi\left(k_F\right) = -F^{\mathrm{I}}_x(k_F), \quad \psi(k) = H^{\mathrm{I}}_x, \quad k \in \mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F,$$

$$\psi(k) = H_x + (H^z - \psi^c_z(k,t_F)x^c_F + \psi^c_z(k,t_I)x^c_I)z_x, \quad k \in \mathbf{K}', \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \psi^c_0(k,t) = H^{c\mathrm{I}}_{x^c}, \quad \psi^c_z(k,t) = H^{c\mathrm{I}}_{x^c z}, \\ \psi^c(k,t_F) = H_{x^c_F}, \quad \psi^c_z(k,t_F) = H_{x^c_F z}, \end{gathered} \tag{4}$$

$$H\left(k, x, \psi(k+1), u\right) = \psi(k+1)f(k,x,u), \quad k \in \mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'$$

$$H = \psi(k+1)\theta(k,z,\gamma^c(z)),$$

$$H^c = \psi(k+1)f^c(k,z,t,x^c,u^c), \quad k \in \mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'.$$

Здесь выражения вида $H^{c\mathrm{I}}_{x^c}$, $H^{c\mathrm{I}}_{x^c z}$ обозначают векторы первых и матрицы вторых производных $H^{c\mathrm{I}}$ по компонентам x^c, z.

В целом получается следующая итерационная процедура.

1. «Слева направо» просчитывается (1), (2) при $u = u_s(k)$, $u^d = u^d_s(k)$, $u^c = u^c_s(k,t)$ и заданных начальных условиях, получается соответствующая траектория $(x_s(k),\ x^c_s(k,t))$.

2. «Справа налево» разрешается система (3), (4) относительно $\psi,\ \psi^c$.

3. Просчитывается «слева направо» исходная система (1), (2) при $\tilde{u}_\nu,\ \tilde{u}_\nu^d,\ \tilde{u}_\nu^c$ и начальном условии $x(k_I) = x_I$, для различных $0 \leqslant \nu \leqslant \nu_{\max}$, где $\nu_{\max}$ – значение, при котором сужения покрывают исходные множества; находится ν_*, такое что $I(m_{\nu_*}) = \min\limits_{\nu} I(m_\nu)$ (с требуемой точностью).

Тем самым строится итерационный процесс улучшения $m_{s+1} = \Phi(m_s)$. Процесс итераций заканчивается, когда $|I_{s+1} - I_s| \approx 0$ с заданной точностью.

Как видно, построенные схемы решения задач оптимизации управления предусматривают взаимодействие уровней таким образом, что общая задача оптимизации ставится для верхнего уровня, а на нижнем формируется опосредованно управление по «заданиям», поступающим на каждом этапе с верхнего уровня. При этом переменные верхнего уровня играют на нижнем роль постоянных параметров.

4. Применение концепции двухуровневой модели для модификации программного обеспечения

Описанные выше условия оптимальности и алгоритмы представляют собой важную область приложений двухуровневой модели – оптимизацию неоднородных систем, когда традиционные методы, развитые для однородных систем, неэффективны либо неприменимы (например, когда меняется порядок системы на этапах. Однако возможно применение двух уровневого представления и для других целей, в частности, для эффективной модификации имеющихся компьютерных программ. Предлагаемый подход состоит в следующем. Пусть имеется программа для модели вида

(5) $$x_1^c(t+1) = f_1^c\left(t, x_1^c(t), u^c, a^c\right),$$

где a^c — некоторый постоянный параметр (скаляр, вектор, матрица и т.п.). Требуется модификация этой программы при предположении, что добавляется уравнение

$$x_2^c(t+1) = f_1^c\left(t, x_1^c(t), x_2^c(t), u^c, a^c\right),$$

а a^c объявляется переменной, которая задается в общем случае уравнением вида

$$a^c(t+1) = g^c\left(t, x^c(t), u^c, a^c(t), v^c(t)\right), \quad (6)$$

где v^c — дополнительное управление. В частности, может быть $a^c(t+1) = g^c\left(v^c(t)\right)$, т.е. a^c задается экзогенно.

В этой ситуации можно построить двухуровневую дискретную систему, разделив $\mathbf{T}$ на этапы $0, 1, \ldots, k, \ldots, k_F - 1$ так, что $t_I(0) = t_I$, $t_F(k_F - 1) = t_F$. На каждом этапе a^c «замораживается» как некоторая константа $a(k)$. Вводятся переменные верхнего уровня $x_1(k) = x_{1I}^c(k)$, $x_2(k) = x_{2I}^c(k)$, $a(k) = a^c\left(t_I(k)\right)$. В результате получаются уравнения верхнего уровня

$$x_1(k+1) = x_{1F}^c(k),\ x_2(k+1) = x_{2F}^c(k),\ a(k+1) = a\left(t_F(k)\right) \quad (7)$$

и нижнего уровня

$$\begin{aligned} & x_i^c(t+1) = f_i^c\left(t, x^c(t), u^c, a(k)\right), \quad i = 1, 2,\ x^c = (x_1^c, x_2^c), \\ & a^c(t+1) = g^c\left(t, x^c(t), u^c, a^c(t), v^c(t)\right), \end{aligned} \quad (8)$$

В итоге получается модель, для которой не требуется перепрограммирование модифицированной системы; достаточно написать программу лишь для уравнений относительно x_2^c и a^c и простых операций перехода на верхнем уровне, а затем использовать полученную двухуровневую модель.

Понятно, что решение при этом получается приближенным, связанным с «замораживанием» $a^c(t)$ на этапах, но точность при этом тем выше, чем больше дискретных шагов на верхнем уровне (очевидно, их число не должно превышать числа шагов на нижнем уровне).

Если речь идет изначально о модификации непрерывной модели, описываемой дифференциальной системой, а дискретная система (2) представляет ее численную реализацию, например, по методу Эйлера, Рунге–Кутта и т.п., то очевидно, за счет уменьшения шага дискретизации точность решения, получаемого на двухуровневой модели, можно повышать неограниченно.

Процедура по существу сводится к многократному обращению к готовой программе с постоянным параметром a и целенаправленным формированием данных на входе, предусмотренным для него. Если учесть, что перепрограммирование сколь–либо сложной модели с отладкой и тестированием — это весьма трудоемкий и дорогостоящий процесс, то экономия сил и средств при таком подходе очевидна.

Разумеется, речь здесь в целом идет не о стандартной для программирования операции обращения к известной подпрограмме, а о выделении такой подпрограммы на алгоритмическом уровне, где она непосредственно «не видна» программисту, путем существенного преобразования исходной модели с элементами аппроксимации.

5. Приложение к исследованию инновационных процессов

Характерными для применения данного подхода являются математические модели управления различными объектами по экономическим критериям с учетом активных инновационных процессов, требующих определенных затрат [6, 7, 15, 16]. Они представляют собой модификации уже известных, оправдавших себя в теории и приложениях моделей, не учитывающих инновации непосредственно, с добавлением инновационных блоков типа «затраты–выпуск», где «выпуск» трактуется специфически как улучшение параметров исходной модели, как правило, путем введения агрегированных инновационных индексов. Затраты учитываются в интегральном критерии эффективности функционирования модифицированной системы. В вышеприведенных терминах (5) играет роль исходной модели с набором постоянных параметров a^c, а (8) — роль модифицированной модели с добавочным инновационным блоком.

Предлагаемый подход был апробирован в вычислительных экспериментах с двумя последними версиями социо-эколого-экономической модели.

Одна из них — полная многокомпонентная модель региона:

$$\dot{\Pi} = p\left((E - A(\theta))y - Bu - A^z z - B^z u^z - A^v d - B^v u^v\right),$$

$$\dot{r} = \dot{\bar{r}} + N(r - \bar{r}) - C(\theta)y + C^z z + im^r - ex^r,$$

$$\dot{K} = u - [\delta]K, \quad \dot{K}^z = u^z - [\delta^z]K^z, \quad \dot{K}^v = u^v - [\delta^v]K^v,$$

$$0 \leqslant y \leqslant \Gamma(K), \quad 0 \leqslant z \leqslant \Gamma^z(K^z), \quad 0 \leqslant v \leqslant \Gamma(K^v),$$

$$\dot{\theta} = -([v] + [H])(\theta - \bar{\theta}),$$

$$x^i = x_0^i(1 + \theta^j \alpha_{ij}), i \in I_j, \quad \sum_{i \in I_j} \alpha_{ij} = 1,$$

где, напомним , y – вектор выпусков продукции по отраслям; $(K,\ K^z,\ K^v)$, $(\Gamma(K) = [\beta]K,\ \Gamma^z(K^z) = [\beta^z]K^z,\ \Gamma^v(K^v) = [\beta^v]K^v)$, (u, u^z, u^v), $(\delta, \delta^z, \delta^v)$ – основные фонды, мощности (векторы) и темпы амортизации в экономическом, природо-социо-восстановительном и инновационном секторах (диагональные матрицы); p – матрица-строка цен (ценовых поправок); r – вектор индексов состояния природной среды и социума; A, A^z, A^v – матрицы прямых затрат в экономическом, природо- социо-восстановительном и инновационном секторах; B, B^z, B^v – матрицы фондообразующих затрат в указанных секторах; N – матрица коэффициентов взаимовлияния компонентов природной и социальной подсистем; C – матрица коэффициентов прямого воздействия отраслей экономики на компоненты природной и социальной подсистем; θ, $\bar{\theta}$ – векторы инновационных индексов (агрегированное описание изменения за счет инноваций элементов матриц A, A^z, B, B^z, C, и других параметров) и их предельно достижимых значений. $\bar{r}(t)$ – заданная функция (опорная), например получаемая из статистического прогноза; im^r, ex^r – миграционные потоки загрязнений и ресурсов; H – диагональная матрица, отражающая влияние диффузии инноваций; $[X]$ – обозначение диагональной матрицы, построенной из компонент вектора X. Полная модель учитывает инновационные изменения лишь наиболее значимых групп параметров – матриц прямых производственных затрат A и прямых воздействий отраслей экономики на компоненты природы и социума C. Для нее были проведены расчеты по оценке чувствительности к инновационным изменениям следующей по значимости группы параметров – матрицы прямых затрат в восстановительном секторе A^z. Преобразование к иерархической модели по описанной выше схеме предусматривало присоединение к исходной модели уравнения (в указанных обозначениях)

$$\dot{\theta}^z = ([v^z] + H)(\theta^z - \bar{\theta}^z), \quad \theta^z(0) = \theta_0^z \tag{9}$$

(с последующей дискретизацией), где v^z — вектор темпов инноваций, и добавление члена $pA^{vz}v^z$ к сумме затрат в уравнении эволюции накопленного дохода, где A^{vz} — матрица соответствующих прямых инновационных затрат.

В эксперименте с полной моделью был использован тот же программный комплекс DSEEmodel 1.0, что и в [5] с набором данных, представленных в таблице 1. Весь горизонт планирования в 20 лет был разделен на четыре пятилетних этапа. Матрицы A^z и A^{vz} на этапах были взяты пропорциональными матрицам A и A^v соответственно (с учетом их близкого смысла, а вектор v^z определялся из уравнения (9). С учетом возможностей высокопроизводительных параллельных вычислений агрегирования в инновационном блоке не производилось. При этом размерность вектора состояния в модифицированной модели составила 66, вектора управления — 68.

В результате не произошло никаких изменений в исходных приближенных программах управлений и соответствующей эволюции переменных состояния, за исключением накопленного дохода (рис. 1). Это вполне ожидаемый эффект, поскольку элементы матрицы A^z входят лишь в уравнение накопленного дохода и присоединенное уравнение и не входят в выражения начальных приближений законов управлений для данной версии модели. По существу получается некоторый компромисс между непосредственным эффектом снижения затрат за счет инноваций и общими затратами на инновационную деятельность (при достаточно низком уровне заданных удельных затрат — коэффициентов матрицы A^{vz}). Проведенный эксперимент имеет, таким об-

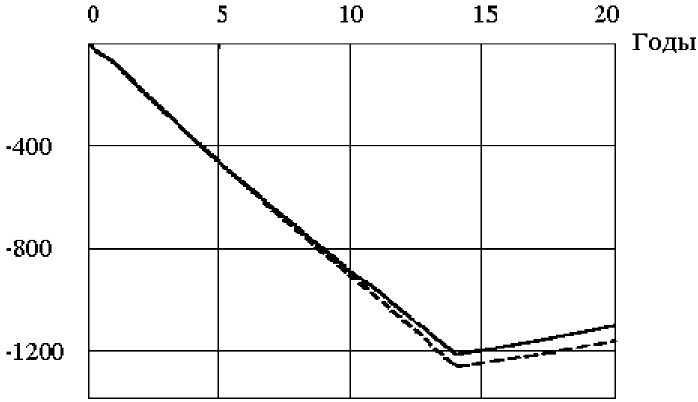

Рис. 1.

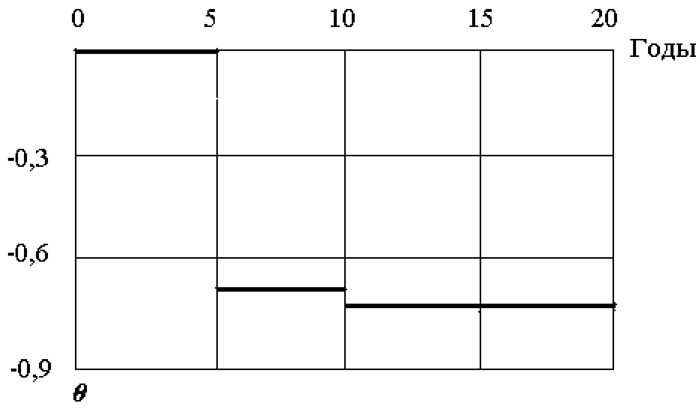

Рис. 2.

разом, методическую ценность, подтверждая работоспособность предлагаемой схемы применительно к сложному программному комплексу.

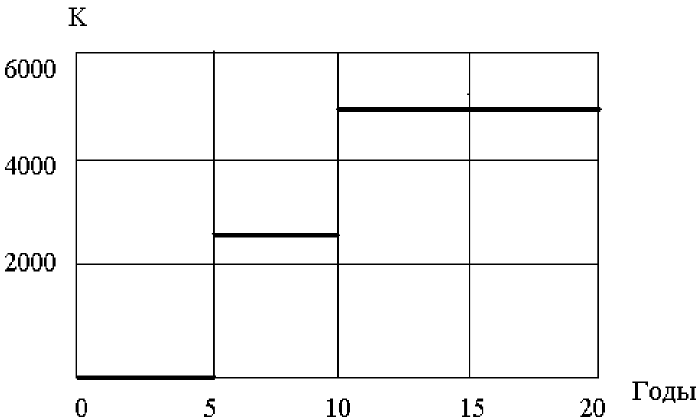

Рис. 3.

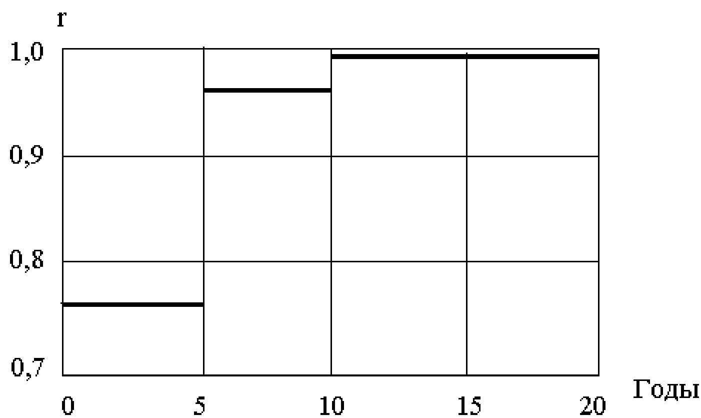

Рис. 4.

Другая модель – производная система для поиска приближенно-оптимальных (магистральных) решений [15],

(10) $$\dot{\zeta} = \kappa(\theta)y - pB\delta K - p(A^v(\theta)\gamma^v + B^v\delta^v)K^v - S(r) + \\ +\eta^z(\theta)\left(\dot{\bar{r}} + N(r - \bar{r}) + im^r - ex^r\right) - \eta^z_\theta(\theta)r([\gamma^v K^v] + H)(\theta - \bar{\theta}),$$

Таблица 1.

$K(0)$	211 251 37,3
$K^z(0)$	4 12 0,15 8,5
$K^v(0)$	1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 1 1 2 1 2 1 1 1 1 2 2
$r(0)$	5755 0,8 69,5 0,44
$\bar{r}$	6000 0,7 100 0,5
p	1 1 1
δ	0,06 0,06 0,07
δ^z	0,07 0,09 0,06 0,11
δ^v	0,06 . . . 0,06
β	0,4 0,35 0,5
β^z	3,7 0,019 0,03 0,0026
β^v	0,003 . . . 0,003
im^r, ex^r, N	нулевые
C^z (diag)	1 1 1 1
A	$\begin{matrix} 0,08 & 0,001 & 1e-05 \\ 0,5 & 0,4 & 0,35 \\ 0,001 & 0,006 & 0,06 \end{matrix}$
B	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,45 & 0,65 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
A^z	$\begin{matrix} 0,2 & 80 & 3 & 200 \\ 0,4 & 90 & 40 & 1000 \\ 0 & 0,6 & 20 & 3000 \end{matrix}$
B^z	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,35 & 0,2 & 0,15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
C	$\begin{matrix} 0 & 0,011 & 0 \\ 0,0018 & 0,002 & 0,0011 \\ 0,0001 & 0,0005 & 0,0003 \\ 0,0002 & 0,0001 & 0,0003 \end{matrix}$

(11) $\quad \dot{\theta} = -([\gamma^v K^v] + H)(\theta - \bar{\theta}), \quad \zeta(t_I) = 0, \quad \theta(t_I) = 0.$
$\eta^z = p(A^z\gamma^z + \delta^z B^z)(C^z\gamma^z)^{-1}$, $\kappa = p(E - A(\theta)) - \eta^z C(\theta)$.

Она получена при идеализирующих допущениях из уравнений полной модели с многими линейными управлениями посредством преобразования

$$\zeta = \Pi + p(Bk + B^z k^z + B^v k^v) - \sum_j \mu^{vj} \ln \gamma^{vj}(\theta^j - \bar{\theta}^j) + \eta^z r,$$

приводящего к радикальному снижению порядка системы.

В соответствии с выше изложенным построим двухуровневую модель. Разобьем уравнение для переменной ζ на два уравнения, что допустимо в силу независимости правой части этого уравнения от переменной состояния ζ. Имеем

$$\dot{\zeta}_1 = \kappa(\theta)y - pB\delta K - p(A^v(\theta)\gamma^v + B^v\delta^v)K^v - S(r) +$$
$$+\eta^z(\theta)\left(\dot{\bar{r}} + N(r - \bar{r}) + im^r - ex^r\right),$$

(12) $\quad \dot{\zeta}_2 = -\eta^z_\theta(\theta) r([\gamma^v K^v] + H)(\theta - \bar{\theta}), \ \zeta_1(t_I) = 0, \ \zeta_2(t_I) = 0.$
Введем в рассмотрение переменные верхнего уровня $x(k), \ a(k)$, где $x(k) = \zeta_1(k, t_I) + \zeta_2(k, t_I), \ a(k) = \theta(k, t_I)$. Тогда на верхнем уровне получаются уравнения

$$x(k+1) = \zeta_1(k, t_F) + \zeta_2(k, t_F), \quad a(k+1) = \theta(k, t_F),$$

а нижний уровень составляют уравнения (11) и уравнение относительно θ из (10), дискретизованные стандартным образом по методу Эйлера.

На второй модели решалась задача улучшения магистрали, полученной из наиболее простых, конечномерных соотношений при постоянных матрицах, за исключением матриц A и C, при предположении, что инновационным изменениям дополнительно подвержены все матрицы прямых затрат. Была построена двухуровневая модель и к ней был применен итерационный алгоритм улучшения, описанный в разделе 2. Расчеты проводились для агрегированного набора данных условного региона, близкого к данным Байкальского региона [15]:

$t_F = 20$; $p = 1$, $\delta = \delta^z = \delta^v = 0,05$; $A_0 = 0,5$; $A(\theta) = (1+\theta)A_0$;

$$C_0 = 0,0004;\ C(\theta) = (1+\theta)C_0;\ B = 1,\ A^z(\theta) = (1+\theta)A_0^z;$$
$$B^z = 1;\ A^v(\theta) = (1+\theta)A_0^v = 350;\ B^v = 1;\ C^z = 1;\ K_0 = 400;$$
$$K_0^z = 10;\ K_0^v = 6;\ \theta_0 = 0;\ \bar{\theta} = -0,8;\ r_0 = 0,8;\ r_F = 0,9;\ \bar{r} = 1;$$
$$N = -0,001;\ im^r = 0,1;\ ex^r = 0,1;\ S(r) = s(r-\bar{r})^2;\ s = 5000;$$
$$y_l = 0;\ k_l = 0;\ y_u = \gamma k^{\alpha};\ \gamma = 10;\ \alpha = 0,75;\ \gamma^z = 0,0002;$$
$$H = 0,03;\ \gamma^v = 0,0015.$$

Процесс улучшения закончился практически на второй итерации. Соответствующее изменение функционала представлено в таблице 2. Программы изменения инновационного индекса θ и управлений K и r на последней итерации показаны на графиках (рис. 2–4). Видно, что на начальных этапах происходит достаточно интенсивное изменение параметров модели за счет инноваций; в результате преодолевается порог рентабельности $\kappa = 0$, однако при данном значении коэффициента инновационных затрат A_0^v процесс инноваций прекращается примерно в середине планового периода. Это означает, что дальнейшие инновационные затраты малоэффективны.

Таблица 2.

Номер итерации	0	1	2
Значение функционала ζ_F	37,3	251,8	298,4

6. Заключение

В целом на основании проведенных исследований можно заключить, что предложенный иерархический принцип описания моделей неоднородных систем позволяет декомпозировать их на однородные и применить с соответствующими модификациями методы исследования однородных систем. В частности, двухуровневая дискретная модель, последняя версия которой представлена в разделе 1, расширяет возможности эффективного использования уже зарекомендовавшей себя модели дискретно-непрерывной системы (ДНС), поскольку охватывает разнообразные случаи «нестандартной» дискретизации дифференциальной системы нижнего уровня, учитывающей особенности конкретных объектов.

Данный принцип может быть эффективно использован также для модификации сложных программных комплексов с целью замены тех или иных постоянных параметров на эволюционирующие переменные. При этом исходная программа сохраняется, но для решения задачи создается верхний уровень, с которого происходит многократное обращение к этой программе как самостоятельной с нужным входным значением параметра при конкретном обращении. Эта схема не может быть реализована чисто программными средствами и требует алгоритмических преобразований, как правило, приближенных.

Важная область приложений предлагаемого подхода – модели управления различными объектами с учетом активных инновационных процессов, оцениваемых по экономическим критериям. Это продемонстрировано в компьютерных экспериментах на двух версиях социо-эколого-экономической модели с наборами данных, характерных для конкретных регионов.

Литература

1. ГУРМАН В.И. *Абстрактные задачи оптимизации и улучшения* // Программные системы: теория и приложения. Электрон. науч. журн. – 2011. – №5(9). – С. 21–29. – URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2011_5_21-29.pdf (дата обращения: 30.01.2013).
2. ГУРМАН В.И. *К теории оптимальных дискретных процессов* // Автоматика и телемеханика. – 1973. – №6. – С. 53–58.
3. ГУРМАН В.И. *Оптимизация дискретных систем*. Учебное пособие. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1976. – 121 с.
4. ГУРМАН В.И., БАТУРИН В.А., РАСИНА И.В. *Приближенные методы оптимального управления.* – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1983. – 180 с.
5. ГУРМАН В.И., МАТВЕЕВ Г.А., ТРУШКОВА Е.А. *Социо-эколого-экономическая модель региона в параллельных вы-*

численииях // Управление большими системами. – 2011. – Выпуск 32. – С. 109–130.

6. ГУРМАН В.И., РЮМИНА Е.В. *Моделирование социо-эколого-экономической системы региона.* / Под ред. В.И. Гурмана, Е.В. Рюминой. – М.: Наука, 2001. -– 175 с.
7. ГУРМАН В.И., ХАЛТАР Д. *Оптимальное управление ресурсами с учетом инноваций* // Автоматика и телемеханика. – 2008. – №3. – С. 178–189.
8. КРОТОВ В.Ф. *Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем* // ДАН СССР. – 1967. – Т. 172, № 1. – С. 18–21.
9. КРОТОВ В.Ф., ГУРМАН В.И. *Методы и задачи оптимального управления.* – М.: Наука, 1973. – 448 с.
10. КРОТОВ В.Ф., ФЕЛЬДМАН И.Н. *Итерационный метод решения задач оптимального управления* // Техн. кибернетика. – 1983. – №2. – С. 160–168.
11. ОРЛОВ А.Г., РАСИНА И.В. *Сложные процессы и достаточные условия относительной оптимальности* // Управляемые системы. – 1979. – Вып. 18. – С. 39–46.
12. РАСИНА И.В. *Дискретно-непрерывные модели и оптимизация управляемых процессов* // Программные системы: теория и приложения. Электрон. научн. журн. – 2011. – №5(9). – С. 49-–72. – URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2011_5_49-72.pdf (дата обращения 30.01.2013).
13. РАСИНА И.В. *Итерационные алгоритмы оптимизации дискретно-непрерывных процессов* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №10. – С. 3–15.
14. РАСИНА И.В. *Сложные дискретные процессы* // В кн. Методы оптимизации и исследование операций (прикладная математика). – Иркутск, СЭИ СО АН СССР, 1976. – С. 64–70.
15. РАСИНА И.В., БЛИНОВ А.О. *Улучшение импульсных процессов на основе дискретно-непрерывной модели* // Вестник БГУ. – 2012. – №1. – С. 42–51.

16. GURMAN V.I. *Modeling and Optimization Sustainable Strategies on Regional Level* // Proceedings of LI Int. Conference Econometrics of Environment fnd Transdisciplinarity. Lisbon, Portugal, April 1996. – Vol. 5.

HIERARCHICAL MODEL OF HETEROGENOUS SYSTEM: THEORY AND APPLICATIONS

Vladimir Gurman, Doct.Sc., professor (head@head.botik.ru), **Ekaterina Trushkova**, Cand.Sc., (katerinatr@mail.ru), Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Pereslavl, **Irina Rasina**, Cand.Sc., (iras6547@mail.ru), **Oleg Usenko**, Siberian Academy of Law, Economics and Management, Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Pereslavl, Cand.Sc., **Oleg Usenko**(0.V.usenko@gmail.com), Siberian Academy of Law, Economics and Management.

Abstract: The concept of a two-level model of a heterogeneous discrete control system and associated optimal control algorithms are considered. The model can be used to modify existing optimization packages trough creating an upper discrete level, which ensures desired operation and online tuning. This application is demonstrated with the problem of innovations control in a regional socio-ecological-economic model, which requires variation of model parameters.

Keywords: complex systems, modeling, computer programming, optimal control.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии М. В. Губко