СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ Том 54, № 5, 1990

УДК 512.552+515.12

В. К. ЗАХАРОВ

СВЯЗИ МЕЖДУ РАСШИРЕНИЕМ ЛЕБЕГА И РАСШИРЕНИЕМ БОРЕЛЯ ПЕРВОГО КЛАССА И МЕЖДУ СООТВЕТСТВУЮЩИМИ ИМ ПРООБРАЗАМИ

В статье вводятся новая алгебраическая структура c-колец с *измельчением* и новая топологическая структура a-пространств с *прикрытием*. На их основе вводятся понятия делимых оболочек и несвязных накрытий некоторого типа. С помощью этих понятий даётся кольцевая характеризация расширения Лебега $C \rightarrowtail L_\mu$ и расширения Бореля первого класса $C \rightarrowtail BM_1$ как делимых оболочек одного типа (теорема 1), а также топологическая характеризация прообразов максимальных идеалов этих расширений как несвязных накрытий одного типа (теорема 2).

Введение

В различных разделах математики возник ряд ставших уже классическими расширений кольца C всех ограниченных непрерывных функций на пространстве T таких, как кольцо R_μ классов функций [1]), μ-интегрируемых по Риману [1, гл. IV, § 5, упр. 16, 17], кольцо L_μ классов функций, μ-измеримых по Лебегу [1, гл. IV, § 6.3], кольца B и B^0 классов функций со свойством Бэра [2, п. 15.6] и со свойством Бэра относительно конульмножеств [3, § 32], кольца BM и BM^0 функций, измеримых по Борелю и по Бэру [3, § 31; 4 гл. IV, п. 1], второе сопряжённое кольцо Аренса C'' [5; 2, п. 27.2] и т. д. Оказалось, что все данные кольца изоморфны кольцам непрерывных функций на соответствующих компактных пространствах максимальных идеалах, т. е. они являются *с-кольцами*. Так как данные расширения возникли вне алгебры, то характер связи между кольцом C и данными кольцами с алгебраической точки зрения оставался совершенно неизвестным. В связи с этим возникла *проблема алгебраического описания классических с-расширений кольца С.*

Первый шаг к решению этой проблемы был сделан в работе [6] в связи с развитием в шестидесятые годы теории делимости в кольцах [7, § 2.3, § 4.6]. Авторам [6] удалось связать расширение Бэра $C \rightarrowtail B$ с полным кольцом частных кольца C (см. также [8]). Много позже (из-за резкой отличности задачи) авторам работ [9] и [8] удалось связать малое расширение Бэра $C \rightarrowtail B^0$ с классическим кольцом частных кольца C.

Исследования автора в последующие годы показали, однако, что подход к остальным c-расширениям через классическую теорию делимости, изложенную, например, в книге [24], не позволяет связать эти расширения с какими-либо кольцами частных или делимыми оболочками кольца C, поскольку они имеют три неклассические характерные особенности:

а) почти все из них обладают составным свойством делимости, состоящим из ряда простейших свойств, каждое из которых в отдельности

[1]) Все функции далее считаются ограниченными.

не является характеристическим и которые определяются последовательным образом в том смысле, что следующее свойство определяется только после того, как определены все предыдущие;

б) указанные свойства делимости не являются только глобальными кольцевыми, а обладают локальными идеально-факторными эффектами, без которых глобальные варианты этих свойств не являются характеристическими;

в) элементы этих расширений разделяются на образующие элементы, которые имеют делимостную природу, и на выражающиеся через них произвольные элементы, у которых делимостная природа совершенно теряется.

Другой подход, учитывающий эти три неклассические особенности, был развит автором в [10]. Автором была выделена новая алгебраическая структура, названная *измельчением*; c-кольца с измельчением были названы *cr-кольцами*. Наличие измельчения позволяет следить за теснотой продолжения гомоморфизмов не только в самом кольце, но и в каждом факторе кольца по идеалу измельчения, и тем самым позволяет более тонко определить свойства делимости в cr-кольцах. С учётом указанных трёх особенностей автором было введено весьма общее понятие *делимой cr-оболочки типа* $Z^{\pi_1}\dots Z^{\pi_k}$ *cr-кольца* C как такого cr-расширения $C\rangle\!\!\rightarrow A$, для которого описана последовательность простейших свойств Z^{π_i}-делимости cr-кольца A и описан процесс последовательного перехода от C к A с помощью свойств Z^{π_i}-делимости. С помощью этого понятия удалось охарактеризовать расширение Лебега $C\rangle\!\!\rightarrow L_\mu$ как делимую cr-оболочку типа Z^0Z^{c0} кольца C (теорема 1). Кроме того, такой подход к делимой оболочке весьма неожиданно выявил полный параллелизм в описании расширения $C\rangle\!\!\rightarrow L_\mu$ и расширений Бэра $C\rangle\!\!\rightarrow BM_1^0$ и Бореля $C\rangle\!\!\rightarrow BM_1$ первого класса (теорема 1′).

Каждому из классических c-расширений кольца C соответствует некоторый прообраз пространства T, реализующий это расширение в виде непрерывных функций и являющийся прообразом максимальных идеалов этого расширения. Поэтому проблема алгебраического описания классических c-расширений кольца C порождает параллельную *проблему топологического описания классических реализующих прообразов пространства* T. В работе [6] (см. также [11]) было установлено, что реализующий прообраз расширения Бэра $C\rangle\!\!\rightarrow B$ является абсолютом Глисона – Пономарёва $T \twoheadleftarrow pT$ пространства T [12]. В работах [13] и [9] было начато изучение реализующего прообраза $T \twoheadleftarrow sT$ малого расширения Бэра $C\rangle\!\!\rightarrow B^0$.

Последующие исследования автора показали, однако, что подход к остальным реализующим прообразам должен быть иным, поскольку они имеют три, не встречавшиеся при изучении абсолюта $T \twoheadleftarrow pT$ и секвенциального абсолюта $T \twoheadleftarrow sT$ характеристические особенности:

а) почти все из них обладают составным свойством окружаемости, состоящим из ряда простейших свойств, каждое из которых в отдельности не является характеристическим и которые определяются последовательным образом в том смысле, что следующее свойство определяется только после того, как определены все предыдущие;

б) указанные свойства окружаемости не являются только глобальными пространственными, а обладают локальными подпространственными эффектами, без которых глобальные варианты этих свойств не являются характеристическими;

в) элементы основ этих прообразов разделяются на образующие элементы, которые имеют окружаемостную природу, и на выражающиеся через них произвольные элементы, у которых окружаемостная природа совершенно теряется.

Подход, учитывающий эти три особенности, был развит автором в [14, 15]. Автором была выделена параллельная измельчению новая топологическая структура, названная *прикрытием*. Пространства Александрова (a-пространства) с прикрытием были названы *as-пространствами*. Наличие прикрытия позволяет следить за теснотой окружения не только в самом пространстве, но и в каждом подпространстве прикрытия, и тем самым позволяет более тонко определить свойства окружаемости в as-пространствах. С учётом трёх указанных особенностей автором было введено весьма общее понятие *окружаемого as-накрытия типа* $Z^{\pi_1}\ldots Z^{\pi_k}$ *as-пространства* T как такого as-прообраза $T \twoheadleftarrow H$, для которого описана последовательность простейших свойств Z^{π_i}-окружаемости as-пространства H и описан процесс последовательного перехода от a-основы в T к a-основе в H с помощью свойств Z^{π_i}-окружаемости. С помощью этого понятия удалось охарактеризовать прообраз Ионеску Тулча $T \twoheadleftarrow i_\mu T$ [16, гл. X], реализующий расширение Лебега $C \rightarrowtail L_\mu$ как окружаемое as-накрытие типа Z^0Z^{c0} пространства T (теорема 2). Кроме того, такой подход к окружаемому накрытию выявил полный параллелизм в описании прообраза $T \twoheadleftarrow i_\mu T$ и бэровского $T \twoheadleftarrow b_1{}^0 T$ и борелевского $T \twoheadleftarrow b_1 T$ прообразов первого класса, реализующих расширения $C \rightarrowtail BM_1{}^0$ и $C \rightarrowtail BM_1$ (теорема 2′).

Целью данной статьи является точное описание указанных выше связей. Доказательства упомянутых теорем имеют смешанный алгебро-топологический характер, в связи с чем статья представляет собой единое целое.

§ 1. cr_μ-Расширения и as_μ-прообразы

1.1. cr_μ-Расширения и делимые cr_μ-оболочки типа $Z^0Z^{c0}|^aZ^{c0}$ и $ZZ^{c0}|^aZ^{c0}$.

1.1.1. c-Кольца и c-расширения. Далее все кольца будут предполагаться коммутативными и с единицами, а все кольцевые гомоморфизмы — унитарными. Кольцо A назовём *с-кольцом*, если A обладает следующими свойствами:

а) для любых a и b существует c такое, что $a^2+b^2=c^2$;

б) для любого a существуют b и c такие, что $a=b^2-c^2$ и $bc=0$;

в) если для a существует последовательность $\{b_n\}$ такая, что $n(a^2+b_n{}^2)=1$, то $a=0$;

г) для любого a существует $(1+a^2)^{-1}$;

д) для любого a существуют b и $n \in \mathbf{N}$ такие, что $a^2+b^2=n1$;

е) если $\{a_n\}$ — последовательность, для которой существует последовательность $\{m_k\} \subset \mathbf{N}$ такая, что $k((a_m-a_n)^2+b^2)=1$ для любых m, $n \geqslant m_k$ и соответствующих $b=b(k, m, n)$, то существует a, для которого есть последовательность $\{n_k\} \subset \mathbf{N}$ такая, что $k((a-a_n)^2+c^2)=1$ для любого $n \geqslant n_k$ и соответствующего $c=c(k, n)$.

Система свойств а)—е) была выделена Дельфоссом [17].

Идеал E c-кольца A назовём *замкнутым*, если для любой последовательности $\{a_n\}$ и любого элемента a, для которого существует последовательность $\{n_k\}\subset \mathbf{N}$ такая, что $k((a-a_n)^2+c^2)=1$ для любого $n\geqslant n_k$ и соответствующего $c=c(k, n)$; условие $\{a_n\}\subset E$ влечёт $a\in E$. Важность класса c-колец показывает следующая принадлежащая Дельфоссу [17] теорема.

ТЕОРЕМА. *Кольцо является с-кольцом тогда и только тогда, когда оно изоморфно кольцу всех ограниченных непрерывных функций на некотором компактном пространстве. Идеал с-кольца является замкнутым тогда и только тогда, когда при изоморфизме Дельфосса образ идеала является замкнутым относительно равномерной сходимости.*

Пусть C — фиксированное c-кольцо. Инъективный гомоморфизм $u: C\rightarrowtail A$, где A является c-кольцом, назовём *с-расширением с-кольца* C. *Морфизмом из* $u: C\rightarrowtail A$ в $\mathring{u}: C\rightarrowtail \mathring{A}$ назовём кольцевой гомоморфизм $v: A\to \mathring{A}$ такой, что $v\circ u=\mathring{u}$. Если вдобавок v инъективен, то скажем, что первое c-расширение *вкладывается* во второе.

Подкольцо B c-кольца A, являющееся c-кольцом, будем называть *с-подкольцом с-кольца* A. Для каждого подмножества S c-кольца A существует c-подкольцо B, являющееся пересечением всех c-подколец в A, содержащих S. Назовем его *с-подкольцом в* A, *порождённым множеством* S. Оно строится следующим образом. Рассмотрим подмножество

$$S'\equiv\{a\in A\,|\,\exists n\in\mathbf{N}\,(na\in S\cup\{1\})\}$$

и подкольцо S, состоящее из всех элементов $a\in A$, представимых в виде конечной комбинации элементов из S', соединённых знаками сложения, вычитания и умножения. Тогда B состоит из всех элементов $a\in A$, для которых существуют последовательность $\{a_n\}\subset S''$ и последовательность $\{n_k\}\subset\mathbf{N}$ такие, что $k((a-a_n)^2+c^2)=1$ для любого $n\geqslant n_k$ и соответствующего $c=c(k, n)$.

1.1.2. cr_μ-Кольца и cr_μ-расширения. Пусть T является фиксированным вполне регулярным пространством и C является c-кольцом всех ограниченных непрерывных функций на T. Через $\mathscr{G}$ обозначим семейство всех открытых, а через $\mathscr{B}$ — семейство всех борелевских множеств из T. Пусть μ — ограниченная радоновская мера на T, т. е. счётно-аддитивная компактно-регулярная функция из $\mathscr{B}$ в $\mathbf{R}$ [1, гл. IX, § 3.2]. Пусть T является носителем меры μ, т. е. $\mu G\neq 0$ для любого $G\in\mathscr{G}$. Через $\mathscr{LN}_\mu$ обозначим семейство всех μ-пренебрежимых множеств из T [1, гл. IX, § 1.9]. Компактное множество K из T назовём *μ-компактным*, если $G\cap K\notin\mathscr{LN}_\mu$ для любого $G\in\mathscr{G}$, пересекающего K. Семейство всех μ-компактных подмножеств из T обозначим через $\mathscr{A}_\mu$.

ЛЕММА 1. *Пусть E — компактное множество и $E\notin\mathscr{LN}_\mu$. Тогда $K\equiv$ $\equiv E\setminus\bigcup\{G\in\mathscr{G}\,|\,G\cap E\in\mathscr{LN}_\mu\}\in\mathscr{A}_\mu$ и $E\setminus K\in\mathscr{LN}_\mu$.*

Доказательство. Рассмотрим радоновскую меру $\nu:\mathscr{B}\to\mathbf{R}$ такую, что $\nu B\equiv\mu(B\cap E)$. Равенство $T\setminus K=\bigcup\{G\in\mathscr{G}\,|\,G\cap E\in\mathscr{LN}_\mu\}$ влечёт $\nu(T\setminus K)=0$ [1, гл. IX, § 1.6].

Следствие. $\bigcup\{K\,|\,K\in\mathscr{A}_\mu\}$ *плотно в* T.

Элемент $K\in\mathscr{A}_\mu$ назовём *вершиной семейства* $\{K_\xi\}\subset\mathscr{A}_\mu$, если $K_\xi\subset K$ и для любого $L\in\mathscr{A}_\mu$ такого, что $\varnothing\neq L\subset K$, существуют ξ_0 и $M\in\mathscr{A}_\mu$ такие, что $\varnothing\neq M\subset L$ и $M\subset K_{\xi_0}$. Обозначим $K=\operatorname{top} K_\xi$.

Пусть $\mathscr{C}(A)$ обозначает семейство всех замкнутых идеалов c-кольца A. Отображение $\mathfrak{A}:\mathscr{A}_\mu\to\mathscr{C}(A)$ назовём *измельчением с-кольца* A, если:

а) $\mathfrak{A}(K)=A$ тогда и только тогда, когда $K=\varnothing$;

б) $\bigcap\mathfrak{A}(K)=\{0\}$;

в) $K_1\subset K_2$ влечёт $\mathfrak{A}(K_1)\supset\mathfrak{A}(K_2)$;

г) $K=\operatorname{top} K_\xi$ влечёт $\mathfrak{A}(K)=\bigcap\mathfrak{A}(K_\xi)$.

c-Кольцо A с измельчением $\mathfrak{A}$ назовём *cr_μ-кольцом* и обозначим через $(A,\mathfrak{A})$. Обозначим $\mathfrak{A}(K)$ через A_K. Иногда при указании измельчения будем писать просто $\mathfrak{A}=\{A_K\,|\,K\in\mathscr{A}_\mu\}$.

На c-кольце C рассмотрим фиксированное измельчение $\mathfrak{C}_\mu:\mathscr{A}_\mu\to\mathscr{C}(C)$ такое, что $\mathfrak{C}_\mu(K)\equiv\{c\in C\,|\,c(K)=\{0\}\}$. c-Расширение $u:C\rightarrowtail A$, где $(A,\mathfrak{A})$ является cr_μ-кольцом, назовём *cr_μ-расширением cr_μ-кольца* $(C,\mathfrak{C}_\mu)$, если:

а) $uC_K\subset A_K$;

б) $uc\in A_K$ влечёт $c\in C_K$.

Такое расширение обозначим через $u:(C,\mathfrak{C}_\mu)\rightarrowtail(A,\mathfrak{A})$. *Морфизмом из* $u:(C,\mathfrak{C}_\mu)\rightarrowtail(A,\mathfrak{A})$ *в* $\overset{\circ}{u}:(C,\mathfrak{C}_\mu)\rightarrowtail(\overset{\circ}{A},\overset{\circ}{\mathfrak{A}})$ назовём морфизм v из $u:C\rightarrowtail A$ в $\overset{\circ}{u}:C\rightarrowtail\overset{\circ}{A}$ такой, что $vA_K\subset\overset{\circ}{A}_K$. Если вдобавок v инъективен и $va\in\overset{\circ}{A}_K$ влечёт $a\in A_K$, то скажем, что второе cr_μ-расширение *больше* первого или первое cr_μ-расширение *вкладывается* во второе.

Аннулятором идеала E в A называется идеал $E^*\equiv\{a\in A\,|\,\forall e\in E(ae=0)\}$. Идеал E называется *аннуляторным*, если $E=E^{**}$. Отображение $\mathfrak{A}:\mathscr{A}_\mu\to\mathscr{C}(A)$ назовём *насыщенным*, если для любого собственного идеала A_K и для любого собственного аннуляторного идеала E такого, что $E^*\not\subset A_K$, существует собственный идеал A_L такой, что $A_K\cup E\subset A_L$ и $L\subset K$. Если отображение $\mathfrak{A}:\mathscr{A}_\mu\to\mathscr{C}(A)$ обладает свойствами а)—в) из определения измельчения и является насыщенным, то $\mathfrak{A}$ является измельчением.

1.1.3. Элементарные типы делимости. Пусть E является идеалом в cr_μ-кольце A. Множество всех A-модульных гомоморфизмов из A-модуля E в A-модуль A обозначается через $\operatorname{Hom}_A(E,A)$. Для $b\in A$ через ψ_b обозначим элемент из $\operatorname{Hom}_A(A,A)$ такой, что $\psi_b a\equiv ba$ для любого $a\in A$. Гомоморфизм $\varphi\in\operatorname{Hom}_A(E,A)$ назовём *ограниченным*, если существует число $n=n(\varphi)\in\mathbf{N}$ такое, что $ne-\varphi e$ и $ne+\varphi e$ являются квадратами в A для любого $e\in E$. Подмножество в $\operatorname{Hom}_A(E,A)$, состоящее из всех ограниченных гомоморфизмов, обозначим через $\operatorname{hom}_A(E,A)$.

Скажем, что гомоморфизм $\varphi\in\operatorname{hom}_A(E,A)$ имеет *тотальное продолжение*, если существует гомоморфизм $\psi\in\operatorname{hom}_A(A,A)$ такой, что $\psi|E=\varphi$. Ясно, что в этом случае $\psi=\psi_b$ для некоторого $b\in A$. Продолжение ψ назовём *плотным*, если из $a\in A$ и $a\varphi E=\{0\}$ следует $a\psi A=\{0\}$. Продолжение ψ назовём *r-плотным*, если из $a\in A$ и $a\varphi E\subset A_K$ следует $a\psi A\subset A_K$. r-Плотное продолжение является плотным.

Идеал E называется *плотным* в A, если из $a\in A$ и $aE=\{0\}$ следует $a=0$. Идеал E назовём *r-плотным* в A, если из $a\in A$ и $aE\subset A_K$ следует $a\in A_K$. r-Плотный идеал является плотным. Идеал E назовём *дополняемым*, если существует идеал $F\subset E^*$ такой, что идеал $E\oplus F$ является r-плотным в A.

Пусть в A выделено подкольцо B (с единицей). В этом случае будем рассматривать идеалы $E=\langle E_B\rangle$, порождённые некоторыми множествами $E_B\subset B$. cr_μ-Кольцо A назовём *относительно делимым на идеал* $E=\langle E_B\rangle$, если любой гомоморфизм $\varphi\in\operatorname{hom}_A(E,A)$ такой, что $\varphi E_B\subset B$, имеет тотальное r-плотное продолжение.

Рассмотрим множество $\mathscr{P}(B)$ всех идеалов $E=\langle E_B\rangle$, множество $\mathscr{P}^0(B)$ всех счётно-порождённых идеалов $E=\langle E_B\rangle$ и множество $\mathscr{P}^{c0}(B)$ всех счётно-порождённых идеалов $E=\langle E_B\rangle$, дополняемых счётно-порождёнными идеалами $F=\langle F_B\rangle$. Пусть π обозначает один из символов: $\varnothing$, 0 и $c0$. Тогда вместо $\mathscr{P}(B)$, $\mathscr{P}^0(B)$ и $\mathscr{P}^{c0}(B)$ можно писать $\mathscr{P}^\pi(B)$.

cr_μ-Кольцо A назовём *Z^π-делимым относительно подкольца* B, если оно является относительно делимым на любой идеал $E=\langle E_B\rangle\in\mathscr{P}^\pi(B)$. При $B=A$ получаем определение *${}^aZ^\pi$-делимого cr_μ-кольца* A. cr_μ-Расширение $C\rangle\!\!\to A$ назовём *${}^aZ^\pi$-делимым*, если cr_μ-кольцо A является ${}^aZ^\pi$-делимым.

1.1.4. Сложные типы делимости и cr_μ-кольца частных. Пусть A—cr_μ-кольцо с выделенным подкольцом B. Рассмотрим в A подкольцо $Z^\pi(B)$, порождённое всеми элементами $a\in A$, для которых существуют идеал $E=\langle E_B\rangle\in\mathscr{P}^\pi(B)$ и гомоморфизм $\varphi\in\mathrm{hom}_A(E, A)$ такие, что $\varphi E_B\subset B$ и ψ_a является r-плотным продолжением φ. Так как $A=\langle 1\rangle\in\in\mathscr{P}^\pi(B)$, то $B\subset Z^\pi(B)$. Для $\pi=\varnothing$, $\pi=0$ и $\pi=c0$ получаем подкольца $Z(B)$, $Z^0(B)$ и $Z^{c0}(B)$.

Пусть $u: C\rangle\!\!\to A$ — cr_μ-расширение. Рассмотрим в A подкольца $Z^{c0}(Z^0(uC))$ и $Z^{c0}(Z(uC))$.

cr_μ-Расширение $u: C\rangle\!\!\to A$ назовём *Z^0Z^{c0}-делимым*, если cr_μ-кольцо A является Z^0-делимым относительно подкольца uC и Z^{c0}-делимым относительно подкольца $Z^0(uC)$. Аналогично определим *ZZ^{c0}-делимость*.

cr_μ-Расширение $u: C\rangle\!\!\to A$ назовём *cr_μ-кольцом частных типа Z^0Z^{c0} cr_μ-кольца* C, если c-подкольцо в A, порождённое кольцом $Z^{c0}(Z^0(uC))$, совпадает с A. Аналогично определим *cr_μ-кольцо частных типа ZZ^{c0}*.

1.1.5. Делимые cr_μ-оболочки типа $Z^0Z^{c0}|{}^aZ^{c0}$ и $ZZ^{c0}|{}^aZ^{c0}$. *Делимой cr_μ-оболочкой типа $Z^0Z^{c0}|{}^aZ^{c0}$ cr_μ-кольца* C назовём cr_μ-расширение, которое является:

а) наибольшим из всех cr_μ-колец частных типа Z^0Z^{c0} cr_μ-кольца C;

б) наименьшим из всех Z^0Z^{c0}-делимых cr_μ-расширений cr_μ-кольца C;

в) ${}^aZ^{c0}$-делимым.

cr_μ-Кольцо C может иметь только одну (с точностью до изоморфизма) делимую cr_μ-оболочку типа $Z^0Z^{c0}|{}^aZ^{c0}$. Делимая sr_μ-оболочка типа $Z^0Z^{c0}|{}^aZ^{c0}$ cr_μ-кольца C является единственным Z^0Z^{c0}-делимым cr_μ-кольцом частных типа Z^0Z^{c0} cr_μ-кольца C, т. е. эта оболочка полностью определяется только относительными свойствами, стоящими в левой части цепочки $Z^0Z^{c0}|{}^aZ^{c0}$. Аналогичным образом определяется *делимая cr_μ-оболочка типа $ZZ^{c0}|{}^aZ^{c0}$*.

1.2. as_μ-Прообразы и несвязные as_μ-накрытия типа $Z^0Z^{c0}|{}^aZ^{c0}$ и $ZZ^{c0}|{}^aZ^{c0}$.

1.2.1. a-Пространства и a-прообразы. Пусть H — некоторое множество. Семейство $\mathscr{K}$ подмножеств из H назовём *основой*, если оно содержит множества $\varnothing$ и H и замкнуто относительно конечных пересечений. Пусть со-$\mathscr{K}$ обозначает семейство всех дополнений к элементам из $\mathscr{K}$.

Основу $\mathscr{H}$ назовём *а-основой*, если:

а) $\mathscr{H}$ замкнуто относительно счётных объединений;

б) дизъюнктные элементы из со-$\mathscr{H}$ содержатся в дизъюнктных элементах из $\mathscr{H}$;

в) любой элемент из $\mathscr{H}$ является счётным объединением элементов из со-$\mathscr{H}$;

г) для любых точек t и s из H существует элемент $G\in\mathscr{H}$ такой, что $t\in G$ и $s\notin G$.

В [18] использовался термин «вполне нормальная база». Пара $(H, \mathscr{H})$ с a-основой $\mathscr{H}$ называется *пространством Александрова* или *a-пространством*. Эти пространства были введены А. Д. Александровым [18].

Основу $\mathscr{K}\subset\mathscr{H}$ будем называть *подосновой a-основы*. Рассмотрим семейство $\mathscr{G}(\mathscr{K})$ (соответственно $\mathscr{G}^0(\mathscr{K})$), состоящее из объединений элементов всех (соответственно всех счётных) подсемейств семейства $\mathscr{K}$. Вместо $\mathscr{G}(\mathscr{K})$ будем писать также $\mathscr{G}(H)$. Пара $(H, \mathscr{G}(H))$ с топологией $\mathscr{G}(H)$ называется *топологическим пространством, соответствующим a-пространству* $(H, \mathscr{H})$. Через $C(H)$ будем обозначать семейство всех ограниченных непрерывных функций на топологическом пространстве $(H, \mathscr{G}(H))$. Если $f:H\to\mathbf{R}$ — некоторая функция, то множество $\operatorname{coz} f\equiv\equiv\{s\in H\,|\,f(s)\neq0\}$ называется *конульмножеством* функции f. Семейство $\mathscr{G}^0(H)\equiv\{\operatorname{coz} f\,|\,f\in C(H)\}$ называется *семейством конульмножеств a-пространства* $(H, \mathscr{H})$. А. Д. Александровым было доказано, что топологическое пространство $(H, \mathscr{G}(H))$ является вполне регулярным и $\mathscr{H}\subset\mathscr{G}^0(H)$ (см. [18]). Семейства $\mathscr{F}(H)\equiv\text{co-}\mathscr{G}(H)$ и $\mathscr{F}^0(H)\equiv\text{co-}\mathscr{G}^0(H)$ называются соответственно семействами *замкнутых множеств* и *нульмножеств a-пространства* $(H, \mathscr{H})$. Если $(H, \mathscr{H})$ и $(\mathring{H}, \mathring{\mathscr{H}})$ — a-пространства, то отображение $\gamma:H\to\mathring{H}$ называется *a-отображением*, если $\gamma^{-1}\mathring{\mathscr{H}}\equiv\{\gamma^{-1}G\,|\,G\in\mathring{\mathscr{H}}\}\subset\mathscr{H}$.

Пусть $(T, \mathscr{T})$ — фиксированное a-пространство. Для него вместо $\mathscr{G}(T)$, $\mathscr{F}(T)$, $\mathscr{G}^0(T)$ и $\mathscr{F}^0(T)$ будем писать просто $\mathscr{G}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}^0$ и $\mathscr{F}^0$. a-Пространство $(H, \mathscr{H})$ с сюръективным совершенным [12, гл. VI, § 2] a-отображением $\tau:H\twoheadrightarrow T$ назовём *a-прообразом a-пространства* $(T, \mathscr{T})$ и обозначим через $\tau:(T, \mathscr{T})\twoheadleftarrow(H, \mathscr{H})$. *Морфизмом из* $\tau:(T, \mathscr{T})\twoheadleftarrow(H, \mathscr{H})$ *в* $\mathring{\tau}:(T, \mathscr{T})\twoheadleftarrow(\mathring{H}, \mathring{\mathscr{H}})$ назовём совершенное a-отображение $\gamma:H\to\mathring{H}$ такое, что $\mathring{\tau}\circ\gamma=\tau$. Если вдобавок γ сюръективно, то скажем, что первый a-прообраз *больше* второго.

Обозначим через $O(H, \mathscr{H})$ c-кольцо всех ограниченных a-функций $f:H\to\mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ рассматривается с канонической a-основой, состоящей из всех открытых множеств. c-Кольцо $O(H, \mathscr{H})$ будем называть *c-кольцом a-пространства* $(H, \mathscr{H})$. c-Расширение $u_\tau:O(T, \mathscr{T})\rightarrowtail O(H, \mathscr{H})$ такое, что $u_\tau c\equiv c\circ\tau$, назовём *$c$-расширением, соответствующим a-прообразу* $\tau:T\twoheadleftarrow H$.

Через $D(\mathscr{K})$ обозначим семейство всех конечных покрытий $\varkappa\subset\mathscr{K}$ a-пространства H. Ограниченную функцию $f:H\to\mathbf{R}$ назовём *функцией малого колебания относительно подосновы* $\mathscr{K}$, если существует последовательность покрытий $\{\varkappa_n\}\subset D(\mathscr{K})$ такая, что колебание $\omega(f, G)$ функции f на каждом элементе $G\in\varkappa_n$ меньше $1/n$. c-Кольцо всех таких функций обозначим через $O(H, \mathscr{K})$. Ясно, что $O(H, \mathscr{K})\subset O(H, \mathscr{H})$. Эти два кольца совпадают, если и только если в любое покрытие из $D(\mathscr{H})$ можно вписать покрытие из $D(\mathscr{K})$.

1.2.2. as_μ-Пространство и as_μ-прообразы. Пусть T, C и μ — такие же, как в 1.1.2. На T рассмотрим каноническую a-основу $\mathscr{T}$, состоящую из конульмножеств всех функций $f\in C$. Тогда C является c-кольцом a-пространства $(T, \mathscr{T})$ и $\mathscr{G}^0=\mathscr{T}$.

Отображение $\mathfrak{M}:\mathscr{A}_\mu\to\mathscr{F}(H)$ назовём *прикрытием а-пространства* $(H, \mathscr{H})$, если:

а) $\mathfrak{M}(K)=\varnothing$ тогда и только тогда, когда $K=\varnothing$;

б) $\bigcup\mathfrak{M}(K)$ плотно в H;

в) $K_1\subset K_2$ влечёт $\mathfrak{M}(K_1)\subset\mathfrak{M}(K_2)$;

г) $K=\operatorname{top} K_\xi$ влечёт $\mathfrak{M}(K)=\operatorname{cl}\bigcup\mathfrak{M}(K_\xi)$.

a-Пространство $(H, \mathscr{H})$ с прикрытием $\mathfrak{M}$ назовём *as_μ-пространством* и обозначим через $(H, \mathscr{H}, \mathfrak{M})$. Обозначим $\mathfrak{M}(K)$ через H_K. Иногда при указании прикрытия будем писать просто $\mathfrak{M}\equiv\{H_K\,|\,K\in\mathscr{A}_\mu\}$.

На a-пространстве $(T, \mathscr{T})$ рассмотрим фиксированное прикрытие $\mathfrak{T}_\mu:\mathscr{A}_\mu\to\mathscr{F}$ такое, что $\mathfrak{T}_\mu(K)\equiv K$. a-Прообраз $\tau:(T,\mathscr{T})\twoheadleftarrow(H, \mathscr{H})$, где $(H, \mathscr{H}, \mathfrak{M})$ является as_μ-пространством, назовём *as_μ-прообразом as_μ-пространства* $(T, \mathscr{T}, \mathfrak{T}_\mu)$, если $\tau H_K=T_K$. Такой прообраз обозначим через $\tau:(T, \mathscr{T}, \mathfrak{T}_\mu)\twoheadleftarrow(H, \mathscr{H}, \mathfrak{M})$. *Морфизмом из* $\tau:(T, \mathscr{T}, \mathfrak{T}_\mu)\twoheadleftarrow(H, \mathscr{H}, \mathfrak{M})$ *в* $\mathring{\tau}:(T, \mathscr{T}, \mathfrak{T}_\mu)\twoheadleftarrow(\mathring{H}, \mathring{\mathscr{H}}, \mathring{\mathfrak{M}})$ назовём морфизм γ из $\tau:(T, \mathscr{T})\twoheadleftarrow(H, \mathscr{H})$ в $\mathring{\tau}:(T, \mathscr{T})\twoheadleftarrow(\mathring{H}, \mathring{\mathscr{H}})$ такой, что $\gamma H_K\subset\mathring{H}_K$. Если вдобавок γ сюръективен и $\gamma H_K=\mathring{H}_K$, то скажем, что первый as_μ-прообраз *больше* второго.

Отображение $\mathfrak{M}:\mathscr{A}_\mu\to\mathscr{F}(H)$ назовём *насыщенным*, если для любого $H_K\neq\varnothing$ и любого $G\in\mathscr{H}$, пересекающего H_K, существует $H_L\neq\varnothing$ такое, что $H_L\subset H_K\bigcap G$ и $L\subset K$. Если отображение $\mathfrak{M}:\mathscr{A}_\mu\to\mathscr{F}(H)$ обладает свойствами а) — в) из определения прикрытия и является насыщенным, то $\mathfrak{M}$ является прикрытием.

1.2.3. Элементарные типы несвязности. Пусть P и Q — подмножества as_μ-пространства H и $P\subset Q$. Множество P называется *плотным в множестве* Q, если из $G\in\mathscr{H}$ и $G\bigcap P=\varnothing$ следует $G\bigcap Q=\varnothing$. Множество P назовём *s-плотным* в множестве Q $(Q=sP)$, если из $G\in\mathscr{H}$ и $G\bigcap P\bigcap H_K=\varnothing$ следует $G\bigcap Q\bigcap H_K=\varnothing$, т. е. $P\bigcap H_K$ является плотным в $Q\bigcap H_K$ для каждого K. Если Q открыто, то из s-плотности P в Q следует плотность P в Q.

Будем рассматривать далее множество $K(\mathscr{H})$ всех конечных семейств $\varkappa$ из $\mathscr{G}(H)$. Определим на $K(\mathscr{H})$ операции $\bigvee$ и $\bigwedge$, положив $\varkappa_1\bigvee\varkappa_2\equiv\{Q_1\bigcup Q_2\,|\,Q_1\in\varkappa_1\&Q_2\in\varkappa_2\}$ и $\varkappa_1\bigwedge\varkappa_2\equiv\{Q_1\bigcap Q_2\,|\,Q_1\in\varkappa_1\&Q_2\in\varkappa_2\}$. Множество $\operatorname{bod}\varkappa\equiv\bigcup\{Q\,|\,Q\in\varkappa\}$ назовём *телом*, а множество $\operatorname{cobod}\varkappa\equiv H\setminus\operatorname{bod}\varkappa$ назовём *котелом семейства* $\varkappa$.

Скажем, что семейство $\varkappa'\equiv\{Q_m'\}\subset\mathscr{H}$ является *s-плотным окружением семейства* $\varkappa\equiv\{Q_m\}\in K(\mathscr{H})$, если Q_m s-плотно содержится в Q_m' и $\operatorname{bod}\varkappa'\in\mathscr{H}\bigcap\text{co-}\mathscr{H}$. Если $\varkappa_1'$ и $\varkappa_2'$ являются s-плотными окружениями семейств $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ соответственно, то $\varkappa_1'\bigvee\varkappa_2'$ и $\varkappa_1'\bigwedge\varkappa_2'$ являются s-плотными окружениями семейств $\varkappa_1\bigvee\varkappa_2$ и $\varkappa_1\bigwedge\varkappa_2$ соответственно.

Семейство $\varkappa$ назовём *дополняемым*, если существует семейство $\rho\in K(\mathscr{H})$ такое, что $\operatorname{bod}\varkappa\bigcap\operatorname{bod}\rho=\varnothing$ и $\operatorname{bod}\varkappa\bigcup\operatorname{bod}\rho$ является s-плотным в H.

Пусть в $\mathscr{H}$ выделена подоснова $\mathscr{K}$. Рассмотрим множество $K(\mathscr{K})$ всех конечных семейств $\varkappa\subset\mathscr{G}(\mathscr{K})$, множество $K^0(\mathscr{K})$ всех конечных семейств $\varkappa\subset\mathscr{G}^0(\mathscr{K})$ и множество $K^{c0}(\mathscr{K})$ всех конечных семейств $\varkappa\subset\mathscr{G}^0(\mathscr{K})$, дополняемых конечными семействами $\rho\subset\mathscr{G}^0(\mathscr{K})$. Пусть π обозначает один из символов: $\varnothing$, 0 и $c0$. Тогда вместо $K(\mathscr{K})$, $K^0(\mathscr{K})$ и $K^{c0}(\mathscr{K})$ можно писать $K^\pi(\mathscr{K})$.

as_μ-Пространство H назовём *Z^π-несвязным относительно подосновы* $\mathscr{K}$, если любое семейство $\varkappa\in K^\pi(\mathscr{K})$ имеет s-плотное окружение. При

$\mathscr{K}=\mathscr{H}$ получаем определение *${}^aZ^\pi$-несвязного as_μ-пространства H*. as_μ-Прообраз $T \twoheadleftarrow H$ назовём *${}^aZ^\pi$-несвязным*, если as_μ-пространство H является ${}^aZ^\pi$-несвязным.

1.2.4. Сложные типы несвязности и порождённость. Пусть H — as_μ-пространство с выделенной подосновой $\mathscr{K}$. Рассмотрим множество $S^\pi(\mathscr{K})$ всех семейств $\varkappa' \subset \mathscr{H}$, являющихся s-плотными окружениями некоторых семейств $\varkappa \in K^\pi(\mathscr{K})$. Множество $S^\pi(\mathscr{K})$ замкнуто относительно операций $\bigvee$ и $\bigwedge$. Каждое окружение $\varkappa \in S^\pi(\mathscr{K})$ порождает покрытие $\varkappa \bigcup \{\operatorname{cobod} \varkappa\}$ пространства H. Рассмотрим семейство покрытий $C^\pi(\mathscr{K})$, порождённое семейством $\{\varkappa \bigcup \{\operatorname{cobod} \varkappa\} \mid \varkappa \in S^\pi(\mathscr{K})\}$ и замкнутое относительно операции $\bigwedge$. Обозначим через $Z^\pi(\mathscr{K})$ подоснову в $\mathscr{H}$, состоящую из множеств $G \in \mathscr{H}$, для которых существуют последовательности покрытий $\{\varkappa_n\} \subset C^\pi(\mathscr{K})$ такие, что $G = \bigcup\{\bigcup\{Q \in \varkappa_n \mid Q \subset G\} \mid n\}$. Если $K \in \mathscr{K}$, то $\{K, H\} \in C^\pi(\mathscr{K})$. Поэтому $\mathscr{K} \subset Z^\pi(\mathscr{K})$. Для $\pi = \varnothing$, $\pi = 0$ и $\pi = c0$ получаем подосновы $Z(\mathscr{K})$, $Z^0(\mathscr{K})$ и $Z^{c0}(\mathscr{K})$.

Подоснова $Z^\pi(\mathscr{K})$ имеет следующее простое описание. Рассмотрим в $\mathscr{H}$ подоснову $Z^\pi(\mathscr{K})$, состоящую из множеств $G \in \mathscr{H}$, для которых существуют окружения $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ из $S^\pi(\mathscr{K})$ и элемент $Q \in \varkappa_1$ такие, что $G = Q \bigcap \operatorname{cobod} \varkappa_2$. Тогда $Z^\pi(\mathscr{K}) = \mathscr{G}^0(\check{Z}^\pi(\mathscr{K}))$. Следовательно, подоснова $Z^\pi(\mathscr{K})$ замкнута относительно счётных объединений.

Пусть $\tau : T \twoheadleftarrow H$ — as_μ-прообраз. Рассмотрим в $\mathscr{H}$ подосновы $Z^{c0}(Z^0(\tau^{-1}\mathscr{T}))$ и $Z^{c0}(Z(\tau^{-1}\mathscr{T}))$.

as_μ-Прообраз $\tau : T \twoheadleftarrow H$ назовём *Z^0Z^{c0}-несвязным*, если as_μ-пространство H является Z^0-несвязным относительно подосновы $\tau^{-1}\mathscr{T}$ и Z^{c0}-несвязным относительно подосновы $Z^0(\tau^{-1}\mathscr{T})$. Аналогично определим *$ZZ^{c0}$-несвязность*.

as_μ-Прообраз $\tau : T \twoheadleftarrow H$ назовём *Z^0Z^{c0}-порождённым*, если $\mathscr{H} = Z^{c0}(Z^0(\tau^{-1}\mathscr{T}))$. Аналогично определим *$ZZ^{c0}$-порождённость*.

1.2.5. Несвязные as_μ-накрытия типа $Z^0Z^{c0} | {}^aZ^{c0}$ и $ZZ^{c0} | {}^aZ^{c0}$. *Несвязным as_μ-накрытием типа $Z^0Z^{c0} | {}^aZ^{c0}$ as_μ-пространства T* назовём as_μ-прообраз, который является:

а) наибольшим из всех Z^0Z^{c0}-порождённых as_μ-прообразов as_μ-пространства T;

б) наименьшим из всех Z^0Z^{c0}-несвязных as_μ-прообразов as_μ-пространства T;

в) ${}^aZ^{c0}$-несвязным.

as_μ-Пространство T может иметь только одно (с точностью до изоморфизма) несвязное as_μ-накрытие типа $Z^0Z^{c0} | {}^aZ^{c0}$. Несвязное as_μ-накрытие типа $Z^0Z^{c0} | {}^aZ^{c0}$ as_μ-пространства T является единственным Z^0Z^{c0}-несвязным Z^0Z^{c0}-порождённым as_μ-прообразом as_μ-пространства T. Таким образом, это накрытие полностью определяется только относительными свойствами, стоящими в левой части цепочки $Z^0Z^{c0} | {}^aZ^{c0}$. Аналогичным образом определяется *несвязное as_μ-накрытие типа $ZZ^{c0} | {}^aZ^{c0}$*.

1.3 Топологические cr_μ-расширения и их универсальность.

1.3.1. cr_μ-Расширения, соответствующие as_μ-прообразам. Рассмотрим на as_μ-пространстве $(H, \mathscr{H}, \mathfrak{M})$ c-кольцо $O \equiv O(H, \mathscr{H})$ a-пространства $(H, \mathscr{H})$ и измельчение $\mathfrak{O} \equiv \{O_K \mid K \in \mathscr{A}_\mu\}$ такое, что $O_K \equiv \{f \in O \mid f(H_K) = \{0\}\}$. cr_μ-Кольцо $(O, \mathfrak{O})$ назовём *cr_μ-кольцом as_μ-пространства H*. Пусть $\tau : T \twoheadleftarrow H$ — as_μ-прообраз. Рассмотрим cr_μ-расширение $u_\tau : (C, \mathfrak{C}_\mu) \rightarrowtail (O, \mathfrak{O})$ такое, что $u_\tau c \equiv c \circ \tau$. Назовём его *$cr_\mu$-расширением*, *соответствующим* as_μ*-прообразу* $\tau: T \twoheadleftarrow H$. cr_μ-Расширения вида $u_\tau: C \rightarrowtail 0$ будем называть *топологическими.*

Ясно, что из $\hat{\tau}: T \twoheadleftarrow \hat{H} \leqslant \tau: T \twoheadleftarrow \tilde{H}$ следует $\hat{u}: C \rightarrowtail \hat{O} \leqslant \tilde{u}: C \rightarrowtail \tilde{O}$. Докажем обратное утверждение.

Предложение 1. *Если* $\hat{u}: C \rightarrowtail \hat{O} \geqslant \tilde{u}: \rightarrowtail \tilde{O}$, то $\hat{\tau}: T \twoheadleftarrow \hat{H} \leqslant \leqslant \hat{\tau}: T \twoheadleftarrow \tilde{H}$.

Доказательство. Пусть $v: \hat{O} \rightarrowtail \tilde{O}$ — морфизм, вкладывающий первое cr_μ-расширение во второе. Для точки $s \in \tilde{H}$ рассмотрим множества $\Gamma \equiv \{f \in \hat{O} \mid s \in \operatorname{coz} vf\}$ и $P \equiv \hat{\tau}^{-1} \tilde{\tau} s$. Предложим, что $P \cap \operatorname{cl} \operatorname{coz} f = \varnothing$. Тогда $\tilde{\tau} s \in \operatorname{coz} h \subset T \setminus \operatorname{cl} \hat{\tau} \operatorname{coz} f$ для некоторой функции $h \in C$. Так как $(h \circ \hat{\tau}) f = 0$, то, применив гомоморфизм v, получим $(h \circ \tilde{\tau}) vf = 0$, что невозможно. Следовательно, $P \cap \operatorname{cl} \operatorname{coz} f \neq \varnothing$ для любого $f \in \Gamma$. Пусть $f_1, f_2 \in \Gamma$. Тогда $f_1 f_2 \in \Gamma$ влечёт $P \cap \operatorname{cl} \operatorname{coz} f_1 \cap \operatorname{cl} \operatorname{coz} f_2 \neq \varnothing$. Следовательно, $P_s \equiv \bigcap \{P \cap \operatorname{cl} \operatorname{coz} f \mid f \in \Gamma\} \neq \neq \varnothing$ в силу компактности P.

Предположим, что существуют $r_1, r_2 \in P_s$. Тогда существует функция $f_1 \in \hat{O}$ такая, что $0 < f_1 \leqslant 1$, $r_1 \in \operatorname{int} \{r \in \hat{H} \mid f_1(r) = 0\}$ и $r_2 \in \operatorname{int} \{r \in \hat{H} \mid f_1(r) = 1\}$. Рассмотрим функцию $f_2 \equiv 1 - f_1$. Тогда $vf_1 + vf_2 = 1$. Предположим, что $s \in \in \operatorname{coz} vf_1$. Тогда $r_1 \in \operatorname{cl} \operatorname{coz} f_1$, что неверно. Следовательно, $s \in \operatorname{coz} vf_2$ влечёт $r_2 \in \operatorname{cl} \operatorname{coz} f_2$, но это тоже неверно. Таким образом, P_s состоит из одной точки. Поэтому мы можем корректно определить отображение $\gamma: \tilde{H} \to \hat{H}$, положив $\gamma s \equiv P_s$. Это отображение непрерывно.

Действительно, пусть G — открытая окрестность точки $r \equiv \gamma s$. Рассмотрим функцию $g_1 \in \hat{O}$ такую, что $0 \leqslant g_1 \leqslant 1$, $r \in \operatorname{int} \{s \in \hat{H} \mid g_1(s) = 1\}$ и $\operatorname{cl} \operatorname{coz} g_1 \subset G$. Пусть $g_2 \equiv 1 - g_1$. Предположим, что $s \in \operatorname{coz} vg_2$. Тогда $r \in \in \operatorname{cl} \operatorname{coz} g_2$, что неверно. Следовательно, $s \in U \equiv \operatorname{coz} vg_1$. Пусть $s_1 \in U$. Тогда $\gamma s_1 \in \operatorname{cl} \operatorname{coz} g_1 \subset G$. Из определения следует, что $\hat{\tau} \circ \gamma = \tilde{\tau}$. Отсюда в качестве следствия мы получаем, что γ является совершенным [12, гл. VI, § 2, п. 56].

Проверим, что $vf = f \circ \gamma$. Предположим, что существует точка s такая, что $(vf)(s) \neq (f \circ \gamma)(s)$. Если $(vf)(s) > (f \circ \gamma)(s)$, то рассмотрим функцию $g \equiv f$, в противном случае $g \equiv -f$. Обозначим число $((vg)(s) + (g \circ \gamma)(s))/ /2$ через x. Рассмотрим функцию $h \equiv (g - x1) \vee 0$. Возьмём окрестность G точки s такую, что $(vg)(r) > x$ для всех $r \in G$. Также возьмём окрестность U точки γs такую, что $g(r) < x$ для всех $r \in U$. Тогда получаем $U \subset \tilde{H} \setminus \setminus \operatorname{coz} h$ и $G \cap \gamma^{-1} U \subset \operatorname{coz} vh$. Поэтому $\gamma s \notin \operatorname{cl} \operatorname{coz} h$ и $\gamma s \in \operatorname{cl} \operatorname{coz} h$ одновременно. Из этого противоречия мы заключаем, что такая точка s не существует. Из этого свойства следует, что $\gamma^{-1} G \in \tilde{\mathscr{H}}$ для любого $G \in \hat{\mathscr{H}}$. Кроме того, отображение γ сюръективно. Действительно, в противном случае существует функция $0 < f \in \hat{O}$ такая, что $\operatorname{coz} f \subset \hat{H} \setminus \gamma \tilde{H}$. Но тогда $(vf)(\tilde{H}) = (f \circ \gamma)(\tilde{H}) = \{0\}$ влечёт $f = 0$, что неверно.

Предположим, что $\hat{H}_K \setminus \gamma \tilde{H}_K \neq \varnothing$. Тогда существует функция $0 \leqslant f \in \hat{O}$ с конульмножеством G такая, что $G \cap \hat{H}_K \neq \varnothing$ и $G \cap \gamma \tilde{H}_K = \varnothing$. Так как $f \notin \notin \hat{O}_K$, то $vf \notin \tilde{O}_K$ влечёт $\gamma^{-1} G \cap \tilde{H}_K \neq \varnothing$, что противоречит последнему равенству. Наоборот, предположим, что $\gamma \tilde{H}_K \setminus \hat{H}_K \neq \varnothing$. Тогда существует аналогичная функция такая, что $G \cap \gamma \tilde{H}_K \neq \varnothing$ и $G \cap \hat{H}_K = \varnothing$. В этом случае $f \in \hat{O}_K$ влечёт $vf \in \tilde{O}_K$. Поэтому $\gamma^{-1} G \cap \tilde{H}_K = \varnothing$, что неверно. Таким образом, $\gamma \tilde{H}_K = H_K$. Предложение доказано.

1.3.2. Реализация cr_μ-расширений. a-Прообраз $\tau: T \twoheadleftarrow H$ назовём *реализующим с-расширение* $u: C \rightarrowtail A$, если существует морфизм r, вкладывающий это c-расширение в c-расширение $u_\tau: C \rightarrowtail O$, так что $\mathcal{H} = \{\mathrm{coz}\, ra \mid a \in A\}$.

as_μ-Прообраз $\tau: T \twoheadleftarrow H$ назовём *реализующим* cr_μ*-расширение* $u: C \rightarrowtail A$, если существует морфизм r, вкладывающий это cr_μ-расширение в cr_μ-расширение $u_\tau: C \rightarrowtail O$, так что $\mathcal{H} = \{\mathrm{coz}\, ra \mid a \in A\}$ и $H_K = \{s \in H \mid \forall a \in A_K (ra(s) = 0)\}$. Этот морфизм r назовём *реализующим морфизмом*. Если $rA = O$ и $r^{-1}O_K = A_K$, то r называется *реализующим изоморфизмом*.

1.3.3. Существование и построение реализующего as_μ-прообраза.

Предложение 2. *Для любого* cr_μ*-расширения* $u: C \rightarrowtail A$ *существует реализующий* as_μ*-прообраз* $\tau: T \twoheadleftarrow H$.

Доказательство. Пусть $H_0 \equiv \mathrm{Max\,Spec}\, A$ и $T_0 \equiv \mathrm{Max\,Spec}\, C = \beta T$ — пространства максимальных идеалов колец A и C. По теореме Дельфосса существует кольцевой изоморфизм $r_0: A \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow C(H_0) \equiv O_0$. Рассмотрим кольцевой изоморфизм $e_0: C \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow C(T_0) \equiv C_0$ такой, что $e_0 f$ является продолжением функции $f \in C$ на T_0. Рассмотрим инъективный кольцевой гомоморфизм $v: C_0 \rightarrowtail O_0$ такой, что $v \equiv r_0 \circ u \circ e_0^{-1}$. Для точки $s \in H_0$ рассмотрим множество $\Gamma \equiv \{f \in C_0 \mid s \in \mathrm{coz}\, vf\}$. Пусть $\{f_i \mid i = 1, \ldots, k\} \subset \Gamma$. Тогда $f_1 \ldots f_k \neq 0$ влечёт $\bigcap \mathrm{cl\,coz}\, f_i \neq \varnothing$. Поэтому $P_s \equiv \bigcap \{\mathrm{cl\,coz}\, f \mid f \in \Gamma\} \neq \varnothing$ в силу компактности H_0. Так же, как и при доказательстве предложения 1, проверяется, что P_s состоит из одной точки, что можно корректно определить непрерывное отображение $\tau_0: H_0 \to T_0$, положив $\tau_0 s \equiv P_s$, что $vf = f \circ \tau_0$ и что τ_0 сюръективно.

Рассмотрим подпространство $H \equiv \tau_0^{-1} T$ и сюръективное совершенное отображение $\tau: H \twoheadrightarrow T$ такое, что $\tau \equiv \tau_0 | H$. Рассмотрим a-основы $\mathcal{H}_0 \equiv \{\mathrm{coz}\, f \mid f \in O_0\}$ и $\mathcal{H} \equiv \{G \cap H \mid G \in \mathcal{H}_0\}$. Рассмотрим гомоморфизм $r: A \to O(H, \mathcal{H}) \equiv O$ такой, что $ra \equiv r_0 a | H$. Тогда $\mathcal{H} = \{\mathrm{coz}\, ra \mid a \in A\}$. Если $f \in C$, то $ruf = f \circ \tau$. Рассмотрим замкнутые подмножества

$$H^0{}_K \equiv \{s \in H_0 \mid \forall a \in A_K \ (r_0 a(s) = 0)\} \text{ и } H_K \equiv H^0{}_K \cap H = \{s \in H \mid \forall a \in A_K \ (ra(s) = 0)\}.$$

Легко проверить, что $\bigcup H^0{}_K$ плотно в H_0 и $\tau_0 H^0{}_K = \mathrm{cl}\, T_K$. Следовательно, $\tau_0 H^0{}_K \cap T = T_K$. Если $H_K = \varnothing$, то $\tau_0 H^0{}_K \subset T_0 \setminus T$ влечёт $K = \varnothing$. Обратно, если $K = \varnothing$, то $H_K = \varnothing$.

Пусть $0 \leqslant f \in O_0$ и $f(H^0{}_K) = \{0\}$. Рассмотрим функцию $f_n \equiv (f - 1/n) \vee 0$ и компактное множество $Q_n \equiv \mathrm{cl\,coz}\, f_n$. Так как $H^0{}_K \cap Q_n = \varnothing$, то для любой точки $s \in Q_n$ существует функция $g_s \in r_0 A_K$ такая, что $g_s(s) \neq 0$. Беря в случае необходимости квадрат функции, умноженный на соответствующее натуральное число, можно считать, что $g_s \geqslant 0$ и $g_s(s) > 1$. Рассмотрим открытые множества $G_s \equiv g_s^{-1}(]1, +\infty[)$. Из покрытия $\{G_s \mid s \in Q_n\}$ множества Q_n выделим конечное подпокрытие $\{G_{s_i}\}$. Рассмотрим функцию $g \equiv \sum g_{s_i} \in r_0 A_K$ и множество $G \equiv g^{-1}(]1, +\infty[) \supset Q_n$. Определим функцию h, положив $h(s) \equiv f_n(s)/g(s)$ для любого $s \in G$ и $h(s) \equiv 0$ для любого $s \notin G$. Пусть $s \in \mathrm{cl}\, G \setminus G$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $s \in U \equiv f_n^{-1}([0, \varepsilon[)$ и $h(U) \subset]h(s) - \varepsilon, h(s) + \varepsilon[$. Значит, функция h непрерывна в точке s. Поэтому $h \in O_0$. Отсюда получаем $f_n = hg \in r_0 A_K$. Так как идеал $r_0 A_K$ является замкнутым относительно равномерной сходимости, то $f \in r_0 A_K$. Следовательно, $r_0 A_K = \{f \in O_0 \mid f(H^0{}_K) = \{0\}\}$.

Пусть $ra \in O_K$. Тогда $r_0 a \in r_0 A_K$ и, следовательно, $a \in A_K$. Обратная импликация следует непосредственно из определения.

Предположим, что существует функция $f \in O_0$ такая, что $Q \equiv \mathrm{cl}\,\mathrm{coz}\, f \subset H_0 \setminus \mathrm{cl}\, H$. Рассмотрим замкнутое множество $F \equiv \tau_0 Q \subset T_0 \setminus T$. Так как $F \cap \tau_0 H^\circ_K = F \cap K = \varnothing$, то $Q \cap H^\circ_K = \varnothing$. Поэтому $f \in r_0 A_K$ для любого K влечёт $f = 0$. Значит, $H_0 = \mathrm{cl}\, H$. Отсюда вытекает, что гомоморфизм r является инъективным.

Предположим, что $\mathrm{cl}\, H_K \neq H^\circ_K$. Тогда существует функция $f \in O_0$ такая, что $\mathrm{coz}\, f \cap H^\circ_K \neq \varnothing$ и $\mathrm{cl}\,\mathrm{coz}\, f \cap H_K = \varnothing$. Рассмотрим замкнутое множество

$$\varnothing \neq F \equiv \tau_0 (\mathrm{cl}\,\mathrm{coz}\, f \cap H^\circ_K) \subset \mathrm{cl}\, T_K \setminus T.$$

Тогда имеем $F \cap \tau_0 H^\circ_K = F \cap K = \varnothing$. Следовательно, $\mathrm{cl}\,\mathrm{coz}\, f \cap H^\circ_K = \varnothing$, что не так. Значит $\mathrm{cl}\, H_K = H^\circ_K$. Пусть $G \in \mathscr{H}$, т. е. $G = G_0 \cap H$ для некоторого $G_0 \in \mathscr{H}_0$. Тогда $G_0 \cap H^\circ_K \neq \varnothing$ **для некоторого** K **влечёт** $G \cap H_K \neq \varnothing$. Значит, $\bigcup H_K$ плотно в H.

Ясно, что $K_1 \subset K_2$ влечёт $H_{K_1} \subset H_{K_2}$. Пусть $K = \mathrm{top}\, K_\xi$. Тогда $H_{^\circ K} = \mathrm{cl} \bigcup\limits_\xi H_{^\circ K_\xi}$. Пусть $G_0 \in \mathscr{H}_0$, $G \equiv G_0 \cap H$ и $G \cap H_K \neq \varnothing$. Тогда $G_0 \cap H_{^\circ K_\xi} \neq \varnothing$ для некоторого ξ влечёт $G \cap H_{K_\xi} \neq \varnothing$. Значит, $\bigcup\limits_\xi H_{K_\xi}$ плотно в H_K. Таким образом, $\mathfrak{M} \equiv \{H_K\}$ является прикрытием. Далее, $\tau H_K = (\tau_0 H^\circ_K) \cap T = T_K$. Следовательно, $\tau : (T, \mathscr{T}, \mathfrak{T}_\mu) \twoheadleftarrow (H, \mathscr{H}, \mathfrak{M})$ является реализующим as_μ-прообразом. Предложение доказано.

Отметим, что не любое c-расширение имеет реализующий a-прообраз и именно наличие измельчения оказывается весьма существенным.

Таким образом, топологические cr_μ-расширения являются универсальными в том смысле, что все cr_μ-расширения вкладываются в них хорошим образом. Это вложение ($\equiv$*реализация*) является основным техническим средством при решении задач, сформулированных во введении.

1.4. Функционально-факторные cr_μ-расширения.

1.4.1. Эквивалентность функций на множестве по модулю идеала. Пусть $\mathscr{I}$ — некоторый идеал подмножеств [3, § 1, VII] множества T; $\mathbf{R}$-значные функции f и g на T называются *эквивалентными по модулю* $\mathscr{I}$ ($f \sim g \bmod \mathscr{I}$), если $\{t \in T \,\|\, f(t) - g(t) \,| \geqslant 1/n\} \in \mathscr{I}$ для любого $n \in \mathbf{N}$ [2, п. 15.1.3]. Если $\mathscr{G}$ и $\mathscr{K}$ — некоторые замкнутые относительно объединения семейства подмножеств в T, то через $\langle \mathscr{G}, \mathscr{K} \rangle$ обозначим идеал, состоящий из множеств P, для которых существуют множества $J \in \mathscr{G}$ и $K \in \mathscr{K}$ такие, что $P \subset J \cup K$.

1.4.2. Функционально-факторные c-кольца. Пусть F является c-подкольцом c-кольца всех ограниченных $\mathbf{R}$-значных функций на множестве T. Класс эквивалентности в F функции $f \in F$ по модулю $\mathscr{I}$ будем обозначать через $\bar{f} \bmod \mathscr{I}$ или просто $\bar{f}$, если ясно, какой идеал имеется в виду. Множество классов эквивалентности $\bar{f}$ всех функций $f \in F$ будем обозначать через $F/\mathscr{I}$. Легко проверить [2, п. 15.3.1], что $F/\mathscr{I}$ является c-кольцом. c-Кольцо $F/\mathscr{I}$ будем называть *функционально-факторным c-кольцом на множестве* T. При $\mathscr{I} = \{\varnothing\}$ слово «факторный» отбрасывается.

1.4.3. Тощие идеалы на a-пространстве и функционально-факторные c-расширения. Идеал $\mathscr{I}$ на a-пространстве T назовём *тощим*, если никакое открытое множество из T не принадлежит $\mathscr{I}$ (см. [2, п. 15.1.1], где используется термин «идеал пренебрежимых множеств»).

Пусть F — функциональное c-кольцо на a-пространстве T такое, что $C \subset F$. Рассмотрим гомоморфизм $u: C \to F/\mathcal{I}$ такой, что $uc \equiv \bar{c}$. Если идеал $\mathcal{I}$ является тощим, то $u: C \to F/\mathcal{I}$ является c-расширением. c-Расширение $u: C \rangle\!\!\to F/\mathcal{I}$, соответствующее тощему идеалу $\mathcal{I}$, будем называть *функционально-факторным c-расширением*. При $\mathcal{I} = \{\varnothing\}$ слово «факторный» отбрасывается.

1.4.4. Функционально-факторные cr_μ-кольца. Пусть T — as_μ-пространство и $F/\mathcal{I}$ — функционально-факторное c-кольцо на T. Тройку $(\mathfrak{T}_\mu, F, \mathcal{I})$ назовём *согласованной*, если:

а) $T_K \notin \mathcal{I}$ для любого $\varnothing \neq K \in \mathcal{A}_\mu$;

б) для любых $n \in \mathbf{N}$ и $f \in F$ таких, что $P_n \equiv \{t \in T \mid |f(t)| > 1/n\} \notin \mathcal{I}$, существует $K \in \mathcal{A}_\mu$ такое, что $T_K \cap P_n \notin \mathcal{I}$;

в) для любых $n \in \mathbf{N}$, $K \in \mathcal{A}_\mu$ и $f \in F$ таких, что $T_K \cap P_n \notin \mathcal{I}$, существует $\varnothing \neq L \in \mathcal{A}_\mu$ такое, что $L \subset K$ и $T_L \setminus P_n \in \mathcal{I}$.

Рассмотрим отображение $\mathfrak{A}: \mathcal{A}_\mu \to \mathscr{C}(F/\mathcal{I})$ такое, что

$$\mathfrak{A}(K) \equiv \{\bar{f} \in F/\mathcal{I} \mid f \mid T_K \sim 0 \mid T_K \mod \mathcal{I} \mid T_K\},$$

где $\mathcal{I} \mid T_K$ обозначает след $\{I \cap T_K \mid I \in \mathcal{I}\}$ идеала $\mathcal{I}$ на T_K.

ЛЕММА 2. *Пусть $(\mathfrak{T}_\mu, F, \mathcal{I})$ — согласованная тройка. Тогда отображение $\mathfrak{A}$ является насыщенным измельчением c-кольца $F/\mathcal{I}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}(K) = F/\mathcal{I}$. Тогда $\bar{1} \in \mathfrak{A}(K)$ влечёт $T_K = \{t \in T_K \mid |1(t)| > 1/n\} \mathcal{I}$. Следовательно, $K = \varnothing$. Пусть $q \equiv \bar{f} \in \bigcap \mathfrak{A}(K)$ и предположим, что $q \neq 0$. Тогда существует n такое, что $P_n \equiv \{t \in T \mid |f(t)| > 1/n\} \notin \mathcal{I}$. Поэтому существует $L \in \mathcal{A}_\mu$ такое, что $T_L \setminus P_n \in \mathcal{I}$. Отсюда следует $q \notin \mathfrak{A}(L)$, что не так. Значит, $q = 0$.

Пусть $K = \operatorname{top} K_\xi$. Тогда $\mathfrak{A}(K) \subset \bigcap \mathfrak{A}(K_\xi)$. Предположим, что существует элемент $q \equiv \bar{f}$, принадлежащий разности этих множеств. Тогда $Q_n \equiv P_n \cap T_K \notin \mathcal{I}$ для некоторого n. По условию существует $\varnothing \neq L \subset K$ такое, что $T_L \setminus Q_n \in \mathcal{I}$. Поэтому найдутся ξ и $M \in \mathcal{A}_\mu$ такие, что $\varnothing \neq M \subset L \cap K_\xi$. Отсюда следует $q \notin \mathfrak{A}(M) \supset \mathfrak{A}(K_\xi)$, что не так. Значит, $\mathfrak{A}(K) = \bigcap \mathfrak{A}(K_\xi)$. Проверим насыщенность. Пусть $E = E^{**}$ и $E^* \not\subset \mathfrak{A}(K)$. Тогда существует элемент $\bar{f} \in E^* \setminus \mathfrak{A}(K)$. Для него существует число m такое, что

$$P_m \cap T_K \equiv \{t \in T_K \mid |f(t)| > 1/m\} \notin \mathcal{I}.$$

По условию существует $\varnothing \neq L \in \mathcal{A}_\mu$ такое, что $L \subset K$ и $T_L \setminus P_m \in \mathcal{I}$. Пусть $\bar{g} \in E$. Тогда $\bar{g}\bar{f} = \bar{0}$ означает, что $I_n \equiv \{t \in T \mid |g(t) f(t)| > 1/n\} \in \mathcal{I}$. Рассмотрим множество $J_n \equiv \{t \in T_L \mid |g(t)| > 1/n\}$. Если $t \in J_n \cap P_m$, то $|g(t) f(t)| > 1/(mn)$ означает, что $t \in I_{mn}$. Следовательно, $J_n \in \mathcal{I}$. Поэтому $\bar{g} \in \mathfrak{A}(L)$. Лемма доказана.

cr_μ-Кольцо $(F/\mathcal{I}, \mathfrak{A})$, соответствующее согласованной тройке $(\mathfrak{T}_\mu, F, \mathcal{I})$, будем называть *функционально-факторным cr_μ-кольцом на as_μ-пространстве T*. При $\mathcal{I} = \{\varnothing\}$ слово «факторный» опускается.

1.4.5. s-Тощие идеалы на as_μ-пространстве и функционально-факторные cr_μ-расширения. Идеал $\mathcal{I}$ на as_μ-пространстве T назовём *s-тощим*, если никакое открытое множество из подпространства T_K не принадлежит следу $\mathcal{I} \mid T_K$ идеала $\mathcal{I}$ на T_K. s-Тощий идеал является тощим. Если идеал $\mathcal{I}$ является s-тощим и тройка $(\mathfrak{T}_\mu, F, \mathcal{I})$ является согласованной, то гомоморфизм $u: (C, \mathfrak{C}_\mu) \to (F/\mathcal{I}, \mathfrak{A})$ такой, что $uc \equiv \bar{c}$, является cr_μ-расширением. cr_μ-Расширение $u: (C, \mathfrak{C}_\mu) \rangle\!\!\to (F/\mathcal{I}, \mathfrak{A})$, соответствующее согласованной тройке $(\mathfrak{T}_\mu, f, \mathcal{I})$ и s-тощему идеалу $\mathcal{I}$, будем называть *функционально-факторным* cr_μ*-расширением*. При $\mathcal{I}=\{\varnothing\}$ слово «факторный» опускается.

1.4.6. Топологическая связь элементов функционально-факторных и топологических cr_μ-расширений. В пп. 1.3.1 и 1.4.5 мы описали два конкретных типа cr_μ-расширений: топологические и функционально-факторные cr_μ-расширения. Введём теперь важнейшее для доказательства всех последующих результатов понятие *топологической связи* между элементами этих расширений.

Пусть $u_\tau: C\rangle\to O$ — cr_μ-расширение, соответствующее as_μ-прообразу $\tau: T\leftarrow\!\!\leftarrow H$, $u: C\rangle\to F/\mathcal{I}$ — функционально-факторное cr_μ-расширение и $\mathcal{G}$ — идеал на H. Функцию $a\in O$ и элемент $q\in F/\mathcal{I}$ назовём *топологически связанными по модулю* $\mathcal{G}$ ($a\,|\!-\!|\,q \bmod \mathcal{I}$), если $a\sim f\circ\tau \bmod \langle\tau^{-1}\mathcal{I}, \mathcal{G}\rangle$ для любого $f\in q$.

ЛЕММА 3. *Пусть идеал* $\langle\tau^{-1}\mathcal{I}, \mathcal{G}\rangle$ *является s-тощим. Тогда связь* $a\,|\!-\!|\,q \bmod \mathcal{G}$ *между некоторыми элементами* $a\in O$ *и* $q\in F/\mathcal{I}$ *является взаимно однозначной и* $a\in O_K$, *если и только если* $q\in(F/\mathcal{I})_K$.

Доказательство. По условию существуют последовательности $I_n\in\mathcal{I}$ и $J_n\in\mathcal{G}$ такие, что

$$R_n\equiv\{s\in H\,|\,|a(s)-f(\tau s)|\geqslant 1/n\}\subset\tau^{-1}I_n\cup J_n$$

для некоторого $f\in q$. Пусть $q\in\mathfrak{A}(K)$, т. е. $Q_n\equiv\{t\in T_K\,|\,|f(t)|\geqslant 1/n\}\in\mathcal{I}$. Рассмотрим множество $S_n\equiv\{s\in H_K\,|\,|a(s)|\geqslant 1/n\}$. Так как

$$S_n=(S_n\cap R_{2n})\cup(S_n\setminus R_{2n})\subset(H_K\cap(\tau^{-1}I_n\cup J_n))\cup\tau^{-1}Q_{2n},$$

то $a|H_K\sim 0|H_K$. Отсюда следует $a(H_K)=\{0\}$, т. е. $a\in O_K$. Обратно, пусть $a\in O_K$ и предположим, что $q\notin\mathfrak{A}(K)$, т. е. $Q_n\notin\mathcal{I}$ для некоторого n. По условию согласования существует непустое μ-компактное множество $L\subset K$ такое, что $T_L\subset Q_n$. Если $s\in H_L$, то $a(s)=0$ влечёт $|a(s)-f(\tau s)|\geqslant$ $\geqslant 1/n$. Следовательно, $H_L\subset R_n$. Но это невозможно, поскольку используемый идеал является s-тощим.

Если $a\,|\!-\!|\,p$ и $b\,|\!-\!|\,p$, то $a=b$, поскольку идеал $\langle\tau^{-1}\mathcal{I}, \mathcal{G}\rangle$ является тощим. Если $a\,|\!-\!|\,p\equiv\bar{f}$ и $a\,|\!-\!|\,q\equiv\bar{g}$, то $0\,|\!-\!|\,(p-q)$. Так как $0\in O_K$ для любого K, то по доказанному выше $p-q\in\bigcap\mathfrak{A}(K)=\{0\}$. Лемма доказана.

Частично заданные отображения $a\mapsto q$ и $q\mapsto a$, существующие согласно предыдущей лемме, будем называть *топологически связывающими по модулю* $\mathcal{G}$. Они сохраняют кольцевые операции.

1.4.7. Конкретные s-тощие идеалы в as_μ-прообразах.

Пусть $\tau: T\leftarrow\!\!\leftarrow H$ — as_μ-прообраз. Через $\mathcal{R}_s^0(H)$ ($\mathcal{R}_s(H)$) обозначим идеал всех множеств R из H, для которых существует s-плотное множество $U\in\mathcal{H}$ (соответственно $U\in\mathcal{G}(H)$) такое, что $R\subset H\setminus U$. Ясно, что эти идеалы являются s-тощими.

ЛЕММА. *σ-Идеалы* $\tau^{-1}\mathcal{L}N_\mu$, $\mathcal{R}_s^0(H)\rangle$ *и* $\langle\tau^{-1}\mathcal{L}\mathcal{N}_\mu, \mathcal{R}_s(H)\rangle$ *являются s-тощими.*

Доказательство. Пусть $G\in\mathcal{H}$ и $G\cap H_K\subset M\cup\tau^{-1}N\cap H_K$. Для μ-измеримого множества $K\setminus N$ существует последовательность μ-компактных множеств K_n таких, что $\bigcup K_n\subset K\setminus N$ и $(K\setminus N)\setminus\bigcup K_n\in\mathcal{L}\mathcal{N}_\mu$. Так как $K=\operatorname{top}K_n$, то $\bigcup H_{K_n}$ плотно в H_K. Но $H_{K_n}\subset H_K\cap(H\setminus\tau^{-1}N)$ влечёт $G\cap H_{K_n}\subset M\cap H_{K_n}$. Тогда $G\cap H_{K_n}=\varnothing$. Следовательно, $G\cap H_K=$ $=\varnothing$. Лемма доказана.

§ 2. Описание расширения Лебега и расширений Бэра и Бореля первого класса

2.1. Определение расширения Лебега. Пусть T, C, μ и $\mathcal{LN}_\mu$ такие же, как в п. 1.1.2. За определением μ-измеримых множеств мы отсылаем читателя к [1]. Мы будем использовать следующее эквивалентное определению свойство: множество S из T является *μ-измеримым*, если и только если $S=R\bigcup N$ для некоторых множеств $R\in\mathcal{C}_\sigma$ и $N\in\mathcal{LN}_\mu$, где через $\mathcal{C}_\sigma$ обозначено семейство всех подмножеств из T, представимых в виде счётного объединения компактных подмножеств. Семейство всех μ-измеримых множеств из T обозначим через $\mathcal{LM}_\mu$. Для того чтобы сделать все доказательства пригодными и для семейств множеств первого класса Бэра или Бореля, мы будем использовать только то, что $\mathcal{LM}_\mu$ является решёткой, замкнутой относительно пересечения счётного числа элементов. Мера μ имеет единственное продолжение на $\mathcal{LM}_\mu$.

Функция $f:T\to\mathbf{R}$ является *μ-измеримой*, если и только если $f^{-1}(]x, y[)\in\mathcal{LM}_\mu$ для любого интервала $]x, y[$. c-Кольцо всех ограниченных μ-измеримых функций на T обозначим через LM_μ. Рассмотрим c-кольцо $L_\mu\equiv LM_\mu/\mathcal{LN}_\mu$ [2]). Функционально-факторное c-расширение $u: C\rangle\!\to L_\mu$ называется *расширением Лебега кольца* C. Оно изучалось в [19].

2.2. Характеристические свойства расширения Лебега. Легко проверить, что тройка $(\mathfrak{T}_\mu, LM_\mu, \mathcal{LN}_\mu)$ является согласованной и идеал $\mathcal{LN}_\mu$ является s-тощим. Поэтому согласно пп. 1.4.4 и 1.4.5 отображение $\mathfrak{A}: \mathcal{A}_\mu\to\mathcal{C}(L_\mu)$ такое, что

$$\mathfrak{A}(K)\equiv\{\bar{f}\in L_\mu | f|T_K\sim 0|T_K \operatorname{mod} \mathcal{LN}_\mu|T_K\},$$

является измельчением c-кольца L_μ и $u: (C, \mathfrak{C}_\mu)\rangle\!\to(L_\mu, \mathfrak{A})$ является функционально факторным cr_μ-расширением.

Обозначим через $\hat{\mathcal{E}}_0(\hat{\mathcal{E}})$ класс всех cr_μ-колец частных $\hat{u}: C\rangle\!\to\hat{A}$ типа Z^0Z^{c0} (соответственно ZZ^{c0}) и через $\tilde{\mathcal{E}}_0(\tilde{\mathcal{E}})$ класс всех Z^0Z^{c0}-делимых (соответственно ZZ^{c0}-делимых) cr_μ-расширений $\tilde{u}: C\rangle\!\to\tilde{A}$. Ясно, что $\hat{\mathcal{E}}_0\subset\hat{\mathcal{E}}$ и $\tilde{\mathcal{E}}\subset\tilde{\mathcal{E}}_0$.

Предложение 3. *Расширение Лебега $u: C\rangle\!\to L_\mu$ принадлежит классу $\hat{\mathcal{E}}_0\bigcap\tilde{\mathcal{E}}$. Более того, cr_μ-кольцо L_μ является ${}^aZ^{c0}$-делимым.*

Доказательство. Обозначим L_μ через A, $Z^0(uC)$ через B_1 и $Z^{c0}(B_1)$ через B_2. Пусть D — конульмножество функции $c\in C$, $g\equiv\chi(D)$ и $q\equiv\bar{g}$. Рассмотрим идеал $E\equiv\langle\bar{c}\rangle$ и гомоморфизм $\varphi\in\operatorname{hom}_A(E, A)$ такой, что $\varphi e\equiv e$. Пусть $p\equiv\bar{f}\in A$ и $p\varphi E\subset A_K$. Тогда $p\bar{c}\in A_K$ влечёт $K\bigcap\operatorname{coz} f\bigcap G\in\mathcal{LN}_\mu$. Следовательно, $pq\in A_K$, и поэтому $p\psi_q A\subset A_K$. Так как $\bar{c}q=\bar{c}$, то ψ_q является r-плотным продолжением φ. Значит, $q\in B_1$. Пусть G — открытое множество. Рассмотрим конульмножество $D\subset G$ такое, что $G\setminus D\in\mathcal{LN}_\mu$. Из предыдущего свойства следует, что $\overline{\chi(G)}\in B_1$. Следовательно, $\overline{\chi(F)}\in B_1$ для любого замкнутого множества F.

Пусть S — μ-измеримое множество, $h\equiv\chi(S)$ и $r\equiv\bar{h}$. Рассмотрим последовательности компактных множеств $\{R_m\}$, $\{S_n\}$ такие, что $\bigcup R_m\subset S\subset T\setminus\bigcup S_n$, $S\setminus(\bigcup R_m\bigcup S_n)\in\mathcal{LN}_\mu$, функции $f_m\equiv\chi(R_m)$, $g_n\equiv\chi(S_n)$ и элементы $p_m\equiv\bar{f}_m$, $q_n\equiv\bar{g}_n$. Рассмотрим в A идеалы $E\equiv\langle\{p_m\}\rangle$ и $F\equiv\langle\{q_n\}\rangle$. Пусть $p\equiv\bar{f}\in A$ и $p(E\oplus F)\subset A_K$. Тогда $K\bigcap\operatorname{coz}(f(f_m+g_n))\in\mathcal{LN}_\mu$ влечёт

---

[2]) При рассмотрении на L_μ нормы $\|\ \|_\infty$ пишут L_μ^∞.

$K\cap \operatorname{coz} f\in\mathcal{L}\mathcal{N}_\mu$, т. е. $p\in A_K$. Следовательно, идеал $E\oplus F$ является r-плотным.

Рассмотрим гомоморфизм $\varphi\in\operatorname{hom}_A(E, A)$ такой, что $\varphi e\equiv e$. Пусть $p\equiv\bar f\in A$ и $p\varphi E\subset A_K$. Тогда $p\{p_m\}\subset A_K$ влечёт $K\cap\operatorname{coz} f\cap S\in\mathcal{L}\mathcal{N}_\mu$. Поэтому $pr\in A_K$ и, следовательно, $p\psi_r A\subset A_K$. Так как $er=e$, то ψ_r является r-плотным продолжением φ. Значит, $r\in B_2$. Аналогичным образом $xr\in B_2$ для любого $x\in\mathbf{R}$. Поэтому $\sum x_i\overline{\chi(S_i)}\in B_2$ для любого конечного семейства $\{S_i\}$ μ-измеримых множеств и любых чисел x_i. Следовательно, c-подкольцо в A, порождённое кольцом B_2, совпадает с A. Значит, $u: C\rangle\!\!\to A\in\hat{\mathscr{E}}_0$.

Пусть $\{c_j\}\subset C$, $e_j\equiv uc_j$, $E\equiv\langle\{e_j\}\rangle$, $\varphi\in\operatorname{hom}_A(E, A)$ и $\varphi\{e_j\}\subset uC$. Рассмотрим функции $d_j\equiv c_j u^{-1}\varphi e_j\in C$. Определим функцию $f\in LM_\mu$, положив $f(t)\equiv d_j(t)/c_j^2(t)$ для любого $t\in G_j\equiv\operatorname{coz} c_j$ и $f(t)\equiv 0$ для любого $t\notin G\equiv\equiv\bigcup G_j$. Рассмотрим элемент $p\equiv\bar f$ и гомоморфизм $\psi\equiv\psi_p$. Пусть $t\in G$. Тогда $t\in G_k$ для некоторого k. Поэтому $(c_k^2 c_j f)(t)=(c_k^2 u^{-1}\varphi e_j)(t)$ влечёт $(c_j f)(t)=(u^{-1}\varphi e_j)(t)$. Если $t\notin F\equiv\operatorname{cl} G$, то $t\in\operatorname{coz} c\subset T\setminus F$ для некоторого $c\in C$. Поэтому $(cc_j f)(t)=0=u^{-1}\varphi(uce_j)(t)=(cu^{-1}\varphi e_j)(t)$ влечёт $(c_j f)(t)= =(u^{-1}\varphi e_j)(t)$. Таким образом, функция $c_j f$ непрерывна во всех точках множества $G\bigcup(T\setminus F)$.

Пусть $t\in F\setminus G$ и $\varepsilon>0$. Рассмотрим открытое множество $U\equiv c_j^{-1}(]-\varepsilon/ /n, \varepsilon/n[)$, где $n=n(\varphi)$ — число такое, что $ne-\varphi e$ и $ne+\varphi e$ являются квадратами в A для любого $e\in E$. Если $s\in U$, то $(c_j f)(s)\in]-\varepsilon, \varepsilon[$, поскольку $|f|\leqslant n\mathbf{1}$. Так как $t\in U$, то тем самым функция $c_j f$ непрерывна в точке t. Значит, $c_j f\in C$. Из равенства двух непрерывных функций на плотном множестве теперь следует, что $c_j f=u^{-1}\varphi e_j$. Поэтому $e_j p=\varphi e_j$. Пусть

$$e=\sum p_{j_1\ldots j_m} e_{j_1}\ldots e_{j_m}$$

— произвольный элемент из E. Тогда имеем

$$\psi e=\sum p_{j_1\ldots j_m} e_{j_1}\ldots e_{j_{m-1}}(e_{j_m}p)=\varphi e.$$

Значит, ψ является тотальным продолжением φ.

Пусть $q\equiv\bar g\in A$ и $q\varphi E\subset A_K$. Тогда $K\cap\operatorname{coz}(gc_j f)\in\mathcal{L}\mathcal{N}_\mu$. Беря объединение по всем j, получаем $qp\in A_K$. Следовательно, ψ является r-плотным продолжением φ. Таким образом, A является Z^0-делимым относительно кольца uC.

Пусть идеал $E\equiv\langle\{p_i\}\rangle$ дополняется идеалом $F\equiv\langle\{q_j\}\rangle$, где счётные множества $p_i\equiv\bar f_i$ и $q_j\equiv\bar g_j$ содержатся в A. Пусть $\varphi\in\operatorname{hom}_A(E, A)$. В каждом классе φp_i выберем по представителю h_i. Определим функции $w_i: T\to \to\mathbf{R}$, положив $w_i(t)\equiv h_i(t)/f_i(t)$ для любого $t\in U_i\equiv\operatorname{coz} f_i\in\mathcal{L}\mathcal{M}_\mu$ и $w_i(t)\equiv \equiv 0$ для любого $t\notin U_i$. Тогда $f_i^2 w_i=f_i h_i$. Далее, $p_k\varphi p_i=p_i\varphi p_k$ означает, что существует μ-пренебрежимое множество N_{ik} такое, что $f_k(t)h_i(t)= =f_i(t)h_k(t)$ для любого $t\notin N_{ik}$. Отсюда получаем $(f_i f_k)^2(t)w_i(t)= =(f_i f_k)^2(t)w_k(t)$ для $t\notin N_{ik}$. Поэтому $w_i(t)=w_k(t)$ для любого $t\in U_i\cap \cap U_k\setminus N_{ik}$.

Рассмотрим новое μ-измеримое множество $V_i\equiv U_i\setminus\bigcup\{N_{ik}|k\}$. Если $t\in V_i\cap V_k$, то $w_i(t)=w_k(t)$. Рассмотрим μ-измеримые множества $U\equiv \equiv\bigcup U_i$, $V\equiv\bigcup V_i$ и $W\equiv\bigcup\operatorname{coz} g_j$. Ясно, что $N\equiv U\setminus V\in\mathcal{L}\mathcal{N}_\mu$. Предположим, что $M\equiv T\setminus(U\bigcup W)\notin\mathcal{L}\mathcal{N}_\mu$. Рассмотрим элемент $r\equiv\overline{\chi(M)}$ и μ-компактное множество $K\subset M$. Так как $K\cap M\cap\operatorname{coz}(f_i+g_j)=\varnothing$, то $r(E\oplus F)\subset \subset A_K$. Отсюда должно следовать $r\in A_K$, что не так. Значит, $M\in\mathcal{L}\mathcal{N}_\mu$.

Определим функцию $f: T \to \mathbf{R}$, положив $f(t) \equiv w_i(t)$ для любого $t \in V_i$ и $f(t) = 0$ для любого $t \notin V$. Если $0 \notin]x, y[$, то $f^{-1}(]x, y[) = \bigcup (w_i^{-1}(]x, y[) \cap V_i)$. Если $x < 0 < y$, то $f^{-1}(]x, y[) = \bigcup (w_i^{-1}(]x, y[) \cap V_i) \cup N \cup M \cup W$. Множество $w_i^{-1}(]x, y[) \cap V_i$ во всех случаях представляет собой счётное объединение μ-измеримых множеств. Например, если $0 < x < y$, то

$$w_i^{-1}(]x, y[) \cap V_i = V_i \cap (\bigcup \{h_i^{-1}(]z, +\infty[) \cap f_i^{-1}(]-\infty, z/x[) \mid z \in \mathbf{Q}\}) \cap \\ \cap (\bigcup \{h_i^{-1}(]-\infty, z[) \cap f_i^{-1}(]z/y, +\infty[) \mid z \in \mathbf{Q}\}),$$

где $\mathbf{Q}$ обозначает множество всех рациональных чисел. Следовательно, $f \in LM_\mu$.

Рассмотрим элемент $p \equiv \bar{f}$ и гомоморфизм $\psi \equiv \psi_p$. Имеем $p_i \psi p_i = p_i \varphi p_i$. Если же $q \in p_i^*$, то $q(\psi p_i - \varphi p_i) = 0$. Следовательно, $\psi p_i - \varphi p_i \in p_i^* \cap p_i^{**} = \{0\}$. Отсюда следует, что ψ является тотальным продолжением φ. Пусть $q \equiv \bar{g} \in A$ и $q\varphi E \subset A_K$. Тогда $K \cap \operatorname{coz}(g w_i) \in \mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$ влечёт $K \cap \operatorname{coz}(gf) \in \mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$, т. е. $qp \in A_K$. Значит, ψ является r-плотным продолжением. Таким образом, A является ${}^aZ^{c0}$-делимым. Предложение доказано.

2.3. Расширения из $\widehat{\mathscr{E}}_0$ и $\widehat{\mathscr{E}}$ и соответствующие реализующие прообразы.

Предложение 4. *Пусть cr_μ-расширение $\hat{u}: C \rightarrowtail \hat{A}$ из $\widehat{\mathscr{E}}_0(\widehat{\mathscr{E}})$ реализовано на as_μ-прообразе $\tau: T \twoheadleftarrow H$. Тогда для любой функции $a \in \hat{A}$ существует элемент $q \in L_\mu$ такой, что a и q топологически связаны по модулю $\mathscr{R}_s^0(H)$ (соответственно $\mathscr{R}_s(H)$).*

Доказательство. Будем использовать метод построения гомоморфизма из [20]. Обозначим $Z^0(\hat{u}C)$ через B_1 и $Z^{c0}(B_1)$ через B_2.

Пусть a — элемент из B_1, для которого существуют идеал $\hat{E} \equiv \langle \{\hat{e}_i\} \rangle$, порождённый элементами $e_i \equiv \hat{u} c_i$ для некоторого счётного множества $\{c_i\} \subset C$, и гомоморфизм $\hat{\varphi} \in \hom_{\hat{A}}(\hat{E}, \hat{A})$ такие, что $\hat{\varphi}\{\hat{e}_i\} \subset \hat{u}C$ и $\hat{\psi} \equiv \hat{\psi}_a$ является r-плотным продолжением $\hat{\varphi}$. Рассмотрим идеал E в $A \equiv L_\mu$, порождённый элементами $e_i \equiv uc_i$. Вместо $u\hat{u}^{-1}\hat{\varphi}\hat{e}_i$ будем писать $\mathring{e}_i$. Пусть $e \equiv \sum p_{i_1 \ldots i_k} e_{i_1} \ldots e_{i_k}$ — произвольный элемент из E. Рассмотрим элемент $\varepsilon \equiv \sum p_{i_1 \ldots i_k} e_{i_2} \ldots e_{i_k} \mathring{e}_{i_1}$. Так как $e_i \mathring{e}_j = e_j \mathring{e}_i$, то $e_i \varepsilon = e\mathring{e}_i$. Пусть элемент e имеет другое представление: $e = \sum p_{j_1 \ldots j_l} e_{j_1} \ldots e_{j_l}$. Рассмотрим элемент $\delta \equiv \sum p_{j_1, \ldots, j_l} e_{j_2} \ldots e_{j_l} \mathring{e}_{j_1}$. Тогда $e_i \delta = e\mathring{e}_i$ влечёт $e_i(\varepsilon - \delta) = 0$. Так как $\hat{\varphi}\hat{e}_i = \hat{e}_i a$, то $\operatorname{coz} \hat{\varphi}\hat{e}_i \subset \operatorname{coz} \hat{e}_i$. Поэтому $\operatorname{coz} \hat{u}^{-1}\hat{\varphi}\hat{e}_i \subset \operatorname{coz} c_i$. Отсюда следует, что если $q \in A$ и $q \in \{e_i \mid i\}^*$, то $q\mathring{e}_i = 0$. Значит, $\mathring{e}_i \in \{e_i \mid i\}^{**}$. Таким образом, $\varepsilon - \delta \in \{e_i \mid i\}^* \cap \{e_i \mid i\}^{**} = \{0\}$, т. е. элемент ε, сопоставляемый элементу e, не зависит от представления e. Из этого следует, что мы можем корректно определить гомоморфизм $\varphi \in \hom_A(E, A)$, положив $\varphi e \equiv \varepsilon$. Тогда $\varphi e_i = \mathring{e}_i$.

Рассмотрим элемент $p = \bar{f} \in A$, множество G и гомоморфизм $\psi \equiv \psi_p$, построенные по φ в предыдущем предложении. Рассмотрим конульмножества $Q \equiv \tau^{-1}G$, $P_n \equiv a^{-1}(]-1/n, 1/n[)$ и $V_n \equiv Q \cup P_n$. Пусть $D \in \mathscr{H}$ и $D \cap V_n \cap H_K = \varnothing$. По определению реализующего прообраза $D = \operatorname{coz} b$ для некоторого $b \in \hat{A}$. Из $H_K \cap \operatorname{coz} b \cap Q = \varnothing$ следует $H_K \cap \operatorname{coz}(b\hat{\varphi}\hat{e}_i) = \varnothing$, ибо $\operatorname{coz} \hat{\varphi}\hat{e}_i \subset Q$. Поэтому $b\hat{\varphi}\hat{e}_i \in O_K$. По определению реализующего прообраза

$b\hat{\varphi}\hat{e}_i \in \hat{A}_K$. Отсюда в силу r-плотного продолжения следует $ba \in \hat{A}_K$, т. е. $H_K \cap \operatorname{coz}(ba) = \varnothing$. Так как одновременно с этим $H_K \cap \operatorname{coz} b \cap P_n = \varnothing$, то $H_K \cap D = \varnothing$. Это означает, что множество V_n является s-плотным.

Если $s \in Q$, то $\tau s \in G_j$ для некоторого j. Поэтому с учётом доказательства предыдущего предложения получаем

$$c_j(\tau s)\, a(s) = (\hat{\psi}\hat{e}_j)(s) = (\hat{u}^{-1}\hat{\varphi}\hat{e}_j)(\tau s) = (u^{-1}\overset{\circ}{e}_j)(\tau s) = (u^{-1}\varphi e_j)(\tau s) = (c_j f)(\tau s).$$

Следовательно, $a(s) = (f \circ \tau)(s)$. Если же $s \in P_n \setminus Q$, то $(f\circ\tau)(s) = 0$. Таким образом, $|a(s) - (f\circ\tau)(s)| < 1/n$ для любого $s \in V_n$. Значит, a и p связаны по модулю $\mathscr{R}_s{}^0(H)$.

Из описания подкольца, порождённого подмножеством, следует, что для любого элемента $a \in B_1$ существует элемент $p \in A$ такой, что $a \,|\!\!-\!\!|\, p \operatorname{mod} \mathscr{R}_s{}^0(H)$. Пусть теперь a — элемент из B_2, для которого существуют идеал $\hat{E} \equiv \langle\{a_i\}\rangle$ и дополняющий его идеал $\hat{F} \equiv \langle\{b_j\}\rangle$, порождённые некоторыми счётными множествами $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ из B_1, а также гомоморфизм $\hat{\varphi} \in \operatorname{hom}(\hat{E}, \hat{A})$ такой, что $\hat{\varphi}\{a_i\} \subset B_1$ и $\hat{\psi} \equiv \hat{\psi}_a$ является r-плотным продолжением $\hat{\varphi}$. По доказанному выше существуют элементы $p_i \equiv \bar{f}_i$ и $q_j \equiv \bar{g}_j$ в A такие, что $a_i \,|\!\!-\!\!|\, p_i$ и $b_j \,|\!\!-\!\!|\, q_j$, т. е. существуют последовательности s-плотных множеств $\{U_{in} | n\}$ и $\{V_{jn} | n\}$ из $\mathscr{H}$ и множеств $\{M_{in} | n\}$ и $\{N_{jn} | n\}$ из $\mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$ такие, что $|a_i(s) - f_i(\tau s)| < 1/n$ для любого $s \in U_{in} \setminus \tau^{-1}M_{in}$ и $|b_j(s) - g_j(\tau s)| < 1/n$ для любого $s \in V_{jn} \setminus \tau^{-1}N_{jn}$.

Рассмотрим конульмножества $Q_{in} \equiv |a_i|^{-1}(]1/n, +\infty[)$, $P_{jn} \equiv |b_j|^{-1}(]1/n, +\infty[)$ и $Q \equiv \bigcup \operatorname{coz} a_i \bigcup \bigcup \operatorname{coz} b_j$. Пусть $G \in \mathscr{H}$ и $G \cap Q \cap H_K = \varnothing$. Тогда $G = \operatorname{coz} b$ для некоторого $b \in A$. Поэтому $H_K \cap \operatorname{coz}(b(a_i + b_j)) = \varnothing$ влечёт $b(\hat{E} \oplus \hat{F}) \subset O_K$. По определению реализующего прообраза $b(\hat{E} \oplus \hat{F}) \subset \hat{A}_K$. Отсюда в силу r-плотности следует $b \in \hat{A}_K$, т. е. $G \cap H_K = \varnothing$. Значит, множество Q является s-плотным.

С помощью этого свойства докажем, что идеал $E \oplus F$ является r-плотным для идеалов $E = \langle\{p_i\}\rangle$ и $F = \langle\{q_j\}\rangle$. Пусть $q \equiv \bar{g} \in A$ и $q(E \oplus F) \subset A_K$. Предположим, что $q \notin A_K$, т. е. $S \equiv K \cap \operatorname{coz} g \notin \mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$. Тогда существует непустое μ-компактное множество $L \subset S$. Из условия следует, что $S \cap \cap \operatorname{coz}(f_i + g_j) \in \mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$. Поэтому $P \equiv L \cap \operatorname{coz}(f_i + g_j) \in \mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$. Из s-плотности Q следует, что $Q \cap H_L \neq \varnothing$. Значит, $(Q_{in} \cup P_{jn}) \cap H_L \neq \varnothing$ для некоторых i, j и n. По следствию к лемме 5 существует точка

$$s \in ((Q_{in} \cup P_{jn}) \cap U_{in} \cap V_{jn} \setminus \tau^{-1}(P \cup M_{in} \cup N_{jn})) \cap H_L.$$

Для неё имеем $|a_i(s) + b_j(s)| > 2/n$. Но $(f_i + g_j)(\tau s) = 0$. Кроме того, $|a_i(s) - f_i(\tau s)| < 1/n$ и $|b_j(s) - g_j(\tau s)| < 1/n$. Поэтому $|a_i(s) + b_j(s)| < 2/n$, что противоречит первому неравенству. Значит, наше предположение неверно и $q \in A$.

По доказанному выше существуют элементы $\overset{\circ}{p}_i \equiv \bar{h}_i$ в A такие, что $\hat{\varphi} a_i \,|\!\!-\!\!|\, \overset{\circ}{p}_i$, т. е. существуют последовательности $\{W_{in} | n\}$ и $\{R_{in} | n\}$ такие, что $|\hat{\varphi} a_i(s) - h_i(\tau s)| < 1/n$ для любого $s \in W_{in} \setminus \tau^{-1}R_{in}$. Установим, что $\overset{\circ}{p}_i \in p_i^{**}$. Пусть $q \equiv \bar{g} \in A$ и $qp_i = 0$. Предположим, что $q\overset{\circ}{p}_i \neq 0$. Тогда существует непустое μ-компактное множество $K \subset \operatorname{coz}(gh_i)$. Так как $\operatorname{coz}(gf_i) \in \mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$, то $K \cap \operatorname{coz} f_i \in \mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$ означает, что $p_i \in A_K$. По лемме 4 тогда $a_i \in O_K$. Так как $\overset{\circ}{\varphi} a_i = a_i a$, то $\operatorname{coz} \overset{\circ}{\varphi} a_i \subset \operatorname{coz} a_i$. Поэтому $\overset{\circ}{\varphi} a_i \in O_K$. Далее, $K \cap$

$\bigcap \operatorname{coz} h_i = K \notin \mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$ влечёт $\overset{\circ}{p}_i \notin A_K$. По той же лемме тогда $\overset{\circ}{\varphi a_i} \notin O_K$. Из полученного противоречия и следует искомое утверждение.

Пусть $e \equiv \sum p_{i_1 \ldots i_k} p_{i_1} \ldots p_{i_k}$ — произвольный элемент из E. Рассмотрим элемент $\varepsilon \equiv \sum p_{i_1 \ldots i_k} p_{i_2} \ldots p_{i_k} \overset{\circ}{p}_{i_1}$. Так как $a_i \widehat{\varphi a_j} = a_j \widehat{\varphi a_i}$ и топологическая связь сохраняет кольцевые операции, то $p_i \overset{\circ}{p}_j = p_j \overset{\circ}{p}_i$. Поэтому $p_i \varepsilon = = e \overset{\circ}{p}_i$. Пусть элемент e имеет другое представление: $e = \sum p_{j_1 \ldots j_l} p_{j_1} \ldots p_{j_l}$. Рассмотрим элемент $\delta \equiv \sum p_{j_1 \ldots j_l} p_{j_2} \ldots p_{j_l} \overset{\circ}{p}_{j_1}$. Тогда $p_i \delta = e \overset{\circ}{p}_i$ влечёт $p_i(\varepsilon - \delta) = 0$. Из предыдущего абзаца следует, что $\varepsilon - \delta \in \{p_i \mid i\}^{**}$. Это означает, что $\varepsilon = \delta$. Поэтому мы можем корректно определить гомоморфизм $\varphi \in \hom_A(E, A)$, положив $\varphi e \equiv \varepsilon$. Тогда $\varphi p_i = \overset{\circ}{p}_i$. Так как A является $Z^{c)}$-делимым, то существует гомоморфизм $\psi \in \hom_A(A, A)$, r-плотно продолжающий φ.

Рассмотрим элемент $p \equiv \bar{f} \equiv \psi 1$. Пусть $\lambda \equiv \sup \{ |f(t)| \mid t \in T \}$. Рассмотрим конульмножества

$$X_{i(mn)} \equiv U_{i(mn)} \cap W_{i(mn)} \cap Q_{im}, \qquad Y_{j(mn)} \equiv V_{j(mn)} \cap P_{jm},$$
$$U_n \equiv \bigcup \{ X_{i(mn)} \mid m, i \} \cup \bigcup \{ Y_{j(mn)} \mid m, j \},$$

где (mn) обозначает произведение. Так как $p_i p = \overset{\circ}{p}_i$, то существует множество $S_i \in \mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$ такое, что $(f_i f)(t) = h_i(t)$ для любого $t \notin S_i$. Из $b_j \widehat{\varphi a_i} = 0$ и плотности продолжения следует, что $b_j a = 0$. Аналогичным образом $q_j p = 0$. Поэтому $g_j(t) f(t) = 0$ для любой точки t, не принадлежащей некоторому множеству $T_j \in \mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$.

Рассмотрим μ-пренебрежимое множество

$$L_n \equiv \bigcup \{ M_{in} \mid i \} \cup \bigcup \{ N_{jn} \mid j \} \cup \bigcup \{ R_{in} \mid i \} \cup \bigcup \{ S_i \mid i \} \cup \bigcup \{ T_j \mid j \}.$$

Пусть $s \in X_{i(mn)} \setminus \tau^{-1} L_n$. Тогда из $\widehat{\varphi a_i} = a_i a$ следует, что $a(s) = (\widehat{\varphi a_i})(s) / /a_i(s)$. Поэтому

$$|a(s) - f(\tau s)| = |\widehat{\varphi a_i}(s) - a_i(s) f(\tau s)| / |a_i(s)| \leqslant$$
$$\leqslant m (|\widehat{\varphi a_i}(s) - (f_i f)(\tau s)| + |(f_i f)(\tau s) - a_i(s) f(\tau s)|) \leqslant$$
$$\leqslant m (|\widehat{\varphi a_i}(s) - h_i(\tau s)| + \lambda |f_i(\tau s) - a_i(s)|) \leqslant (\lambda + 1)/n.$$

Пусть $s \in Y_{j(mn)} \setminus \tau^{-1} L_n$. Тогда из $b_j a = 0$ следует $a(s) = 0$. Так как $|b_j(s)| > 1/m$ и $|b_j(s) - g_j(\tau s)| < 1/(mn)$, то $g_j(\tau s) \neq 0$. Поэтому $f(\tau s) = 0$. Таким образом, $|a(s) - f(\tau s)| < (\lambda + 1)/n$ для любого $s \in U_n \setminus \tau^{-1} L_n$.

Проверим, что U_n является s-плотным. Пусть $G \in \mathscr{H}$, $G \cap U_n \cap H_K = \varnothing$ и предположим, что $Z \equiv G \cap H_K \neq \varnothing$. Тогда $Z \cap Q \neq \varnothing$ влечёт $Z \cap (Q_{im} \cup P_{jm}) \neq \neq \varnothing$ для некоторых i, j и m. Отсюда либо $Z \cap X_{i(mn)} \neq \varnothing$, либо $Z \cap Y_{j(mn)} \neq \neq \varnothing$, что противоречит условию.

Итак, мы установили, что $a \vdash\!\dashv p \bmod \mathscr{R}_s^0(H)$. Значит, и для любого элемента $a \in B_2$ существует соответствующий элемент $p \in A$. Более того, из описания в п. 1.1.1 c-подкольца, порождённого подмножеством, следует, что и для любого элемента $a \in \hat{A}$ существует соответствующий элемент $p \in A$. Предложение доказано.

Следствие 1. *Пусть cr_μ-расширение $\hat{u} : C \rightarrowtail \hat{A}$ из $\hat{\mathscr{E}}_0(\hat{\mathscr{E}})$ реализовано на as_μ-прообразе $\hat{\tau} : T \twoheadleftarrow \hat{H}$. Тогда существует топологически связывающий по модулю $\mathscr{R}_s^0(\hat{H})$ (соответственно $\mathscr{R}_s(\hat{H})$) морфизм $\hat{v}$ из*

cr_μ-расширения $u: C\rangle\!\!\to A^{\wedge}$ в cr_μ-расширение $u: C\rangle\!\!\to L_\mu$, относительно которого первое cr_μ-расширение меньше второго.

Справедливость этого утверждения вытекает из пп. 1.4.6, 1.4.7 и данного предложения.

Следствие 2. *cr_μ-Расширение Лебега $u: C\rangle\!\!\to L_\mu$ является наибольшим в классах $\hat{\hat{\mathscr{E}}}_0$ и $\hat{\hat{\mathscr{E}}}$.*

2.4. Расширения из $\hat{\hat{\mathscr{E}}}_0$ и $\hat{\hat{\mathscr{E}}}$ и соответствующие реализующие прообразы.

Предложение 5. *Пусть cr_μ-расширение $\tilde{u}: C\rangle\!\!\to \tilde{A}$ из $\hat{\hat{\mathscr{E}}}_0(\hat{\hat{\mathscr{E}}})$ реализовано на as_μ-прообразе $\tau: T \twoheadleftarrow H$. Тогда для любого элемента $q\in L_\mu$ существует функция $a\in\tilde{A}$ такая, что $q|\!-\!\!|a \bmod \mathscr{R}_s{}^0(H)$ (соответственно $\mathscr{R}_s(H)$).*

Доказательство. Обозначим $Z^0(\tilde{u}C)$ через B_1. Пусть Q — открытое множество в T. Рассмотрим конульмножество $Q'\equiv\operatorname{coz} c\subset Q$ такое, что $Q\diagdown Q'\in\mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$. Рассмотрим идеал $E\equiv\langle\tilde{u}c\rangle$ в $\tilde{A}$ и определим гомоморфизм $\varphi\in\hom_{\tilde{A}}(E,\tilde{A})$, положив $\varphi\tilde{u}c\equiv\tilde{u}c$. По условию существует гомоморфизм $\psi\in\hom(\tilde{A},\tilde{A})$, r-плотно продолжающий φ. Рассмотрим элемент $a\equiv\psi 1\in B_1$ и множество $U\equiv\operatorname{cl}\tau^{-1}Q'$. Пусть $b\in E^*$. Тогда $b\varphi E=\{0\}$ влечёт $ba=0$. Следовательно, $\operatorname{coz} a\subset U$. Пусть $s\in\tau^{-1}Q$. Тогда $(\tilde{u}c)a=\tilde{u}c$ влечёт $a(s)=1$. Поэтому $a=\chi(U)$ и $U\in\mathscr{H}\cap\text{co-}\mathscr{H}$.

Предположим, что существует открытое множество G такое, что $G\subset\tau^{-1}Q\diagdown U$. Тогда $G\cap H_K\neq\varnothing$ для некоторого K. Возьмём последовательности компактов $\{K_i'\}$ и $\{L_j'\}$ такие, что $\bigcup K_i'\subset K\cap Q'$, $\bigcup L_j'\subset K\diagdown Q$, $K\cap Q'\diagdown\bigcup K_i'\in\mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$ и $K\diagdown Q\diagdown\bigcup L_j'\in\mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$. Возьмём μ-компактные множества $K_i\subset K_i'$ и $L_j\subset L_j'$ такие, что $(K_i'\diagdown K_i)\bigcup(L_j'\diagdown L_j)\in\mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$. Тогда $K=\operatorname{top}\{K_i, L_j|i,j\}$ означает, что $\bigcup H_{K_i}\bigcup\bigcup H_{L_j}$ плотно в H_K. При этом $H_{K_i}\cap G=\varnothing$ и $H_{L_j}\cap G=\varnothing$. Поэтому $H_K\cap G=\varnothing$, что не так. Следовательно, $U=\operatorname{cl}\tau^{-1}Q$. Пусть $D\in\mathscr{H}$ и $D\cap\tau^{-1}Q\cap H_L=\varnothing$. Так как $D=\operatorname{coz} d$ для некоторого $d\in A$, то $d\tilde{u}c\in\tilde{A}_L$ влечёт $d\psi\tilde{A}\subset\tilde{A}_L$. Поэтому $D\cap U\cap H_L=\varnothing$. Значит, $\tau^{-1}Q$ является s-плотным в U.

Из всего этого следует, что для замкнутого множества $R\equiv T\diagdown Q$ выполнено $V\equiv\operatorname{int}\tau^{-1}R\in\mathscr{H}\cap\text{co-}\mathscr{H}$, $b\equiv\chi(V)\in B_1$ и $H_K\subset\tau^{-1}R$ влечёт $H_K\subset V$.

Пусть S — μ-измеримое множество, $f\equiv\chi(S)$ и $q\equiv\bar{f}$. Рассмотрим последовательности компактных множеств $\{R_i\}$ и $\{S_j\}$ такие, что $\bigcup R_i\subset S\subset T\diagdown\bigcup S_j$ и $S\diagdown(\bigcup R_i\bigcup\bigcup S_j)\in\mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$. Рассмотрим множества $V_i\equiv\operatorname{int}\tau^{-1}R_i$, $W_j\equiv\operatorname{int}\tau^{-1}S_j$, функции $a_i\equiv\chi(V_i)$, $b_j\equiv\chi(W_j)$ из B_1 и идеалы $E\equiv\langle\{a_i\}\rangle$, $F\equiv\langle\{b_j\}\rangle$ в $\tilde{A}$. Пусть $b\in\tilde{A}$ и $b(E\oplus F)\subset\tilde{A}_K$. Рассмотрим μ-компактные множества $K_i\subset K\cap R_i$ и $L_j\subset K\cap S_j$ такие, что $(K\cap R_i\diagdown K_i)\bigcup\bigcup(K\cap S_j\diagdown L_j)\in\mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$. Так как $K=\operatorname{top}\{K_i, L_j|i,j\}$, то $\bigcup H_{K_i}\bigcup\bigcup H_{L_j}$ плотно в H_K. Из $H_{K_i}\subset\tau^{-1}R_i$ следует, что $H_{K_i}\subset V_i$. Аналогично, $H_{L_j}\subset W_j$. Следовательно, $\operatorname{coz} b\cap\bigcap(H_{K_i}\bigcup H_{L_j})\cap H_K=\varnothing$ влечёт $\operatorname{coz} b\cap\cap H_K=\varnothing$. Значит, $b\in\tilde{A}_K$. Таким образом, идеал $E\oplus F$ является r-плотным.

Определим гомоморфизм $\varphi\in\hom(E,\tilde{A})$, положив $\varphi e\equiv e$ для любого $e\in E$. Тогда $\varphi(\{a_i\})\subset B_1$. По условию существует гомоморфизм ψ, r-плотно продолжающий φ. Рассмотрим элемент $a\equiv\psi 1$ и множество $U\equiv\bigcup V_i\bigcup\bigcup W_j$. Пусть $G\in\mathscr{H}$ и $G\cap U\cap H_K=\varnothing$. Тогда по предыдущему абзацу $G\cap(\bigcup H_{K_i}\bigcup\bigcup H_{L_j})=\varnothing$ влечёт $G\cap H_K=\varnothing$. Следовательно, U является s-плотным. Так как $a_i a=a_i$, то $a(s)=1=f(\tau s)$ для любого $s\in V_i$.

Так как $b_j\varphi E=\{0\}$, то $b_ja=0$. Поэтому $a(s)=0=f(\tau s)$ для любого $s\in\in W_j$. Значит, $a\sim f\circ\tau$. Таким образом, для q существует a такое, что $g|$—$|a$.

Так как $\tilde{A}$ является алгеброй, то для любого ступенчатого элемента $q\equiv\sum_1 x_k\chi(S_k)$ существует соответствующая функция a. Так как произвольный элемент $q\in L_\mu$ равномерно приближается ступенчатыми элементами, то и для q существует соответствующее a. Предложение доказано.

Следствие 1. *Пусть cr_μ-расширение $\tilde{u}:C\rangle\!\!\to\tilde{A}$ из $\hat{\mathscr{E}}_0(\hat{\mathscr{E}})$ реализовано на as_μ-прообразе $\hat{\tau}:T\twoheadleftarrow\tilde{H}$. Тогда существует топологически связывающий по модулю $\mathscr{R}_s{}^0(\tilde{H})$ (соответственно $\mathscr{R}_s(\tilde{H})$) морфизм $\tilde{v}$ из cr_μ-расширения $u:C\rangle\!\!\to L_\mu$ в cr_μ-расширение $\tilde{u}:C\rangle\!\!\to\tilde{A}$, относительно которого первое cr_μ-расширение меньше второго.*

Следствие 2. *cr_μ-Расширение Лебега $u:C\rangle\!\!\to L_\mu$ является наименьшим в классах $\mathscr{E}_0$ и $\tilde{\mathscr{E}}$.*

2.5. Описание расширения Лебега и расширений Бэра и Бореля первого класса. Из предыдущих утверждений вытекает следующая

ТЕОРЕМА 1. *Расширение Лебега $C\rangle\!\!\to L_\mu$ является делимой cr_μ-оболочкой типа $Z^0Z^{c0}|^aZ^{c0}$ и типа $ZZ^{c0}|^aZ^{c0}$.*

Через $\mathscr{B}^0(\mathscr{B})$ обозначим σ-поле всех *бэровских* (соответственно *борелевских*) *множеств* пространства T, т. е. наименьшее семейство подмножеств из T, содержащее подсемейство $\mathscr{G}^0$ всех конульмножеств (соответственно $\mathscr{G}$ всех открытых множеств) и замкнутое относительно операций счётного объединения и дополнения [2, п. 18.1.2; 3, 21]. Напомним классификацию Юнга бэровских множеств (см. [3] или [21]):

$$\mathscr{B}^0=\bigcup\{\mathscr{F}^0_\alpha|\alpha\in[1,\omega_1[\}=\bigcup\{\mathscr{G}^0_\alpha|\in[1,\omega_1[\},$$

где
$$\mathscr{F}^0\subset\mathscr{F}^0_1\equiv\mathscr{F}^0_\sigma\subset\mathscr{F}^0_2\equiv\mathscr{F}^0_{\sigma\delta}\subset\ldots,$$
$$\mathscr{G}^0\subset\mathscr{G}^0_1\equiv\mathscr{G}^0_\delta\subset\mathscr{G}^0_2\equiv\mathscr{G}^0_{\delta\sigma}\subset\ldots$$

Функция $f:T\to\mathbf{R}$ называется *измеримой по Бэру первого класса*, если $f^{-1}(]x,y[)\in\mathscr{F}_\sigma{}^0$ для любого интервала $]x,y[$. c-Кольцо всех таких ограниченных функций обозначим через $BM_1{}^0$. Функциональное c-расширение $u:C\rangle\!\!\to BM_1{}^0$ называется *расширением Бэра первого класса кольца C*. В категории векторных решёток оно было охарактеризовано в [19].

К сожалению, приведённые определения переносятся на борелевские множества и функции, измеримые по Борелю, только для совершенных пространств, в которых открытые множества имеют тип F_σ. Поэтому для произвольных пространств введём следующую классификацию борелевских множеств, которая для совершенных пространств совпадает с классификацией Юнга. Рассмотрим семейства

$$\mathscr{K}\equiv\{F\cap G|F\in\mathscr{F}\&G\in\mathscr{G}\}\text{ и }\mathscr{L}\equiv\{F\cup G|F\in\mathscr{F}\&G\in\mathscr{G}\}.$$

Исходя из этих семейств определим методом Юнга *семейства борелевских множеств классов* α:

$$\mathscr{K}\subset\mathscr{K}_1\equiv\mathscr{K}_\sigma\subset\mathscr{K}_2\equiv\mathscr{K}_{\sigma\delta}\subset\ldots,$$
$$\mathscr{L}\subset\mathscr{L}_1\equiv\mathscr{L}_\delta\subset\mathscr{L}_2\equiv\mathscr{L}_{\delta\sigma}\subset\ldots$$

Тогда $\mathscr{B}=\bigcup\{\mathscr{K}_\alpha|\alpha\in[1,\omega_1[\}=\bigcup\{\mathscr{L}_\alpha|\alpha\in[1,\omega_1[\}$.

Функцию $f:T\to\mathbf{R}$ назовём *измеримой по Борелю первого класса*, если $f^{-1}(]x,y[)\in\mathscr{K}_\sigma$. c-Кольцо всех таких ограниченных функций обозначим через BM_1. Функциональное c-расширение $u: C\rangle\!\!\rightarrow BM_1$ назовём *расширением Бореля первого класса кольца* C.

μ-Измеримые множества S_1 и S_2 называются *эквивалентными*, если $S_1 \triangle S_2 \in \mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$. Так как для любого компактного множества R существует нульмножество $S \in \mathscr{F}^0$ такое, что $R \subset S$ и $S \setminus R \in \mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$, то любое μ-измеримое множество эквивалентно бэровскому (а значит, и борелевскому) множеству первого класса. Сказанное наводит на мысль, что расширения $C\rangle\!\!\rightarrow L_\mu$, $C\rangle\!\!\rightarrow BM_1^0$ и $C\rangle\!\!\rightarrow BM_1$ должны, по-видимому, обладать сходными свойствами. Развитая выше теория позволяет в точности подтвердить эту гипотезу.

Через $\mathscr{A}_p$ обозначим семейство всех одноточечных подмножеств пространства T. На c-кольце C рассмотрим новое фиксированное измельчение $\mathfrak{C}_p: \mathscr{A}_p \to \mathscr{C}(C)$ такое, что $\mathfrak{C}_p(t) \equiv \{c \in C \mid c(t) = 0\}$. Так же, как в п. 1.1.2, определяется категория *cr_p-расширений* $u: (C, \mathfrak{C}_p)\rangle\!\!\rightarrow (A, \mathfrak{A})$ *кольца* C. Отображение $\mathfrak{A}: \mathscr{A}_p \to \mathscr{C}(BM_1^0)$ такое, что $\mathfrak{A}(t) \equiv \{f \in BM_1^0 \mid f(t) = 0\}$, является измельчением c-кольца BM_1^0 и $u: (C, \mathfrak{C}_p)\rangle\!\!\rightarrow (BM_1^0, \mathfrak{A})$ является cr_p-расширением C. Аналогично определяется cr_p-расширение $u: (C, \mathfrak{C}_p)\rangle\!\!\rightarrow (BM_1, \mathfrak{A})$.

Согласно [3, § 31.VIII] каждая функция $f \in BM_1^0$ является пределом равномерно сходящейся последовательности функций из BM_1^0, каждая из которых принимает только конечное число значений. Поэтому в вышеприведённых рассуждениях μ-измеримые множества заменяются на множества из $\mathscr{F}_\sigma^0$, дополнение к которым тоже из $\mathscr{F}_\sigma^0$. Для BM_1 используются двусторонние множества из $\mathscr{K}_\sigma$. Таким образом, почти полностью аналогично теореме 1 доказывается

ТЕОРЕМА 1′. *Расширеие Бэра первого класса $C\rangle\!\!\rightarrow BM_1^0$ является делимой cr_p-оболочкой типа $Z^0Z^{c0} \mid {}^aZ^{c0}$. Расширение Бореля первого класса $C\rangle\!\!\rightarrow BM_1$ является делимой cr_p-оболочкой типа $ZZ^{c0} \mid {}^aZ^{c0}$ кольца C.*

Таким образом, делимые оболочки $C\rangle\!\!\rightarrow L_\mu$ и $C\rangle\!\!\rightarrow BM_1^0$ (или $C\rangle\!\!\rightarrow BM_1$) имеют одинаковый тип. Их удалось различить только благодаря выбору различных измельчений $\mathfrak{C}_\mu$ и $\mathfrak{C}_p$ на кольце C. И, наконец, отметим, что именно использование топологической связи на реализующих прообразах позволило построить соответствующие морфизмы $\hat{v}$ и $\tilde{v}$. Возможность чисто алгебраического доказательства остаётся совершенно неясной.

§ 3. Описание прообраза Ионеску Тулча и бэровского и борелевского прообразов первого класса

3.1. Определение прообраза Ионеску Тулча. a-Прообраз $\tau: (T, \mathscr{T}) \twoheadleftarrow (i_\mu T, \mathscr{H})$, реализующий c-расширение Лебега $u: C\rangle\!\!\rightarrow L_\mu$, назовём *прообразом Ионеску Тулча пространства* T. Для случая компактного пространства он был описан Ионеску Тулча через поднятие меры [16, гл. X]. Наша цель — дать его топологическое описание.

Рассмотрение расширения Лебега как cr_μ-расширения $u: (C, \mathfrak{C}_\mu)\rangle\!\!\rightarrow (L_\mu, \mathfrak{A})$ даёт согласно п. 1.3.3 возможность рассматривать прообраз Ионеску Тулча как as_μ-прообраз $\tau: (T, \mathscr{T}, \mathfrak{T}_\mu) \twoheadleftarrow (i_\mu T, \mathscr{H}, \mathfrak{M})$. Обозначим через $\hat{\mathscr{P}}_0(\mathscr{P})$ класс всех Z^0Z^{c0}-порождённых (соответственно ZZ^{c0}-порождённых) as_μ-прообразов $\tau: \hat{T} \twoheadleftarrow \hat{H}$ и через $\tilde{\mathscr{P}}_0(\mathscr{P})$ класс всех Z^0Z^{c0}-несвязных (соответственно ZZ^{c0}-несвязных) as_μ-прообразов $\tau: T \twoheadleftarrow \tilde{H}$. Пусть $\hat{u}: C\rangle\!\!\rightarrow \hat{O}$ и $\tilde{u}: C\rangle\!\!\rightarrow \tilde{O}$ обозначают cr_μ-расширения, соответствующие as_μ-прообразам.

3.2. Построение as_μ-прообраза из $\hat{\mathscr{P}}_0 \cap \tilde{\mathscr{P}}$. Семейство классов эквивалентности $\bar{S}$ всех μ-измеримых множеств S обозначим через $\mathscr{L}_\mu$. Для того чтобы сделать все доказательства пригодными и для семейств $\mathscr{F}_\sigma^0$ и $\mathscr{K}_\sigma$ множеств первого класса Бэра или Бореля, мы будем использовать только то, что $\mathscr{L}_\mu$ является решёткой с нулём $\varnothing$ и единицей $\bar{T}$, замкнутой относительно инфимумов счётных множеств. Можно только на семействах $\mathscr{F}_\sigma^0$ или $\mathscr{K}_\sigma$ ввести данное отношение эквивалентности и получить снова $\mathscr{L}_\mu$.

Рассмотрим в $\mathscr{L}_\mu$ множество H_0 всех максимальных идеалов θ, не содержащих единицы. С каждым элементом $\bar{S}$ свяжем множество $i_0\bar{S}$ всех максимальных идеалов θ таких, что $\bar{S}\notin\theta$. Введём на H_0 топологию, приняв семейство $\{i_0\bar{S}\,|\,\bar{S}\in\mathscr{L}_\mu\}$ за базу открытых множеств. Будем далее обозначать $\mathscr{L}\mathscr{M}_\mu$ через $\mathscr{S}$ и $\mathscr{L}\mathscr{N}_\mu$ через $\mathscr{Y}$. Доказательства приводимых далее утверждений можно найти в [22, 23]. Пространство H_0 является компактным. Если $\bar{S}\neq\varnothing$, то $i_0\bar{S}\neq\varnothing$. Обозначим βT через T_0 и $\mathrm{cl}_{T_0} T_K$ через T^0_K. Для точки $s\in H_0$, соответствующей максимальному идеалу θ_s, рассмотрим множества $P_{0s}\equiv\bigcap\{\mathrm{cl}_{T_0}S\,|\,\bar{S}\notin\theta_s\}$ и $P_s\equiv\bigcap\{\mathrm{cl}\, S\,|\,\bar{S}\notin\theta_s\}$. Множество P_{0s} содержит только одну точку, а множество P_s — не более одной. Рассмотрим подпространство $H\equiv\{s\in H_0\,|\,P_s\neq\varnothing\}$, в котором множества $i\bar{S}\equiv H\cap i_0\bar{S}$ составляют базу открытых множеств.

Рассмотрим на H_0 a-основу $\mathscr{H}_0$, состоящую из конульмножеств всех непрерывных функций на H_0, а на H рассмотрим a-основу $\mathscr{H}\equiv\{G\cap H\,|\, G\in\mathscr{H}_0\}$. Тогда $(H_0, \mathscr{H}_0)$ и $(H, \mathscr{H})$ являются a-пространствами. Определим отображения $\tau_0: H_0\to T_0$ и $\tau: H\to T$, полагая $\tau_0 s\equiv P_{0s}$ и $\tau s\equiv P_s$. Они являются сюръективными и совершенными, $\tau=\tau_0|H$ и $H=\tau_0^{-1}T$. Следовательно, $\tau_0: (T_0, \mathscr{T}_0)\twoheadleftarrow(H_0, \mathscr{H}_0)$ и $\tau: (T, \mathscr{T})\twoheadleftarrow(H, \mathscr{H})$ являются a-прообразами.

Рассмотрим отображения $\mathfrak{M}_0: \mathscr{A}_\mu\to\mathscr{F}(H_0)$ и $\mathfrak{M}: \mathscr{A}_\mu\to\mathscr{F}(H)$ такие, что

$$\mathfrak{M}_0(K)\equiv H_0\setminus\bigcup\{i_0\bar{S}\,|\,S\cap T_K\in\mathscr{Y}\} \text{ и } \mathfrak{M}(K)\equiv H\setminus\{i\bar{S}\,|\,S\cap T_K\in\mathscr{Y}\}.$$

Они являются насыщенными и отображение $\mathfrak{M}_0$ является прикрытием. Так как $\tau_0 H^0_K=T^0_K$, то $\tau H_K=T_K$ и $H_K=\varnothing$, если и только если $K=\varnothing$. Далее, H_K плотно в H^0_K, H плотно в H_0 и отображение $\mathfrak{M}$ является прикрытием. Поэтому $\bar{S}\neq\bar{\varnothing}$ влечёт $i\bar{S}\neq\varnothing$. Таким образом, $\tau: (T, \mathscr{T}, \mathfrak{T}_\mu)\twoheadleftarrow$ $\twoheadleftarrow(H, \mathscr{H}, \mathfrak{M})$ является as_μ-прообразом T.

Если $G\in\mathscr{G}$, то $i\bar{G}\in\mathscr{H}\cap\text{co-}\mathscr{H}$ и $i\bar{G}=s\tau^{-1}G$. Следовательно, as_μ-пространство H является Z-окружаемым и Z^0-окружаемым относительно подосновы $\tau^{-1}\mathscr{T}$. Кроме того, из $F\in\mathscr{F}$ следует $i\bar{F}\in Z^0(\tau^{-1}\mathscr{T})\subset Z(\tau^{-1}\mathscr{T})$. Если $K\in\mathscr{A}_\mu$, $S\in\mathscr{S}$ и $S\cap T_K\notin\mathscr{Y}$, то $i\bar{S}\cap H_K\neq\varnothing$. Для любого конечного семейства $\{Q_j\}$ из $\mathscr{H}$ такого, что $H=s\bigcup Q_j$, существует семейство $\{\bar{S}_j\}\subset$ $\subset\mathscr{L}_\mu$ такое, что $\bigcup\{i\bar{S}_j\}=H$ и $i\bar{S}_j=sQ_j$.

Предложение 6. *as_μ-Прообраз $\tau: T\twoheadleftarrow H$ принадлежит $\hat{\mathscr{P}}\cap\tilde{\mathscr{P}}$.*

Доказательство. Для множества $U\in\mathscr{H}$ определим семейство $O(U, \mathscr{H})$ функций $d: U\to\mathbf{R}$ таких, что $d^{-1}(]x, y[)\in\mathscr{H}$ для любого интервала. Пусть $H=sU$ и $d\in O(U, \mathscr{H})$. Разобьём интервал $]-x, x[$, содержащий множество значений функции d, точками x_{nj} так, что $x_{nj+1}-x_{nj}=$ $=1/n$. Рассмотрим множества

$$Q_{nj}\equiv d^{-1}(]x_{nj-1}, x_{nj+1}[)\in\mathscr{H}.$$

Для них рассмотрим указанные множества $D_{nj}\equiv i\bar{S}_{nj}$. Рассмотрим функции f_{nj} и g_{nj} на H такие, что $f_{nj}(s)\equiv -x$ и $g_{nj}(s)\equiv x$ для любого $s\notin D_{nj}$ и $f_{nj}(s)\equiv x_{nj-1}$ и $g_{nj}(s)\equiv x_{nj+1}$ для любого $s\in D_{nj}$. Определим функции f_n и g_n, положив $f_n(s)\equiv \sup\{f_{nj}(s)\}$ и $g_n\equiv \inf\{g_{nj}(s)\}$. Тогда существует функция c на H такая, что $|c(s)-f_n(s)|<16/n$ и $|c(s)-g_n(s)|<16/n$ для любого $s\in H$. Рассмотрим множества $D_{0nj}\equiv i_0\bar{S}_{nj}$. Они покрывают H_0. По ним аналогичным образом определим функции f_{0n}, g_{0n} и c_0 на H_0. Тогда функция c_0 является продолжением функции c. Так как

$$c_0^{-1}(]x, y[) = (\bigcup\{f_{0n}^{-1}(]x+16/n, +\infty[)\,|\,n\})\cap$$
$$\cap(\bigcup\{g_{0n}^{-1}(]-\infty, y-16/n[)\,|\,n\})\in\mathscr{H}_0,$$

то $c\in O(H, \mathscr{H})$. Ясно, что $c(s)=d(s)$ для любого $s\in U$.

Пусть семейство $\varkappa\equiv\{Q_j\,|\,j=1, \ldots, k\}\subset\mathscr{H}$ дополняется множеством $Q_{k+1}\in\mathscr{H}$. Рассмотрим множества $V\equiv\operatorname{bod}\varkappa$ и $U\equiv V\bigcup Q_{k+1}$. Тогда $H=sU$. По определению $Q_j=Q_{0j}\cap H$ для конульмножеств $Q_{0j}\equiv\operatorname{coz} c_{0i}$ некоторых непрерывных функций c_{0j} на H_0. Рассмотрим функцию $e_j\in O(U, \mathscr{H})$ такую, что $e_j(s)\equiv c_j(s)/\sum_i\{c_i(s)\,|\,j=1, \ldots, k+1\}$. По доказанному выше существуют функции $f_j\in O(H, \mathscr{H})$, продолжающие функции e_j. Рассмотрим множества $Q_j'\equiv\operatorname{coz} f_j\in\mathscr{H}$. Так как $\sum_j f_j(s)=1$ для любого $s\in U$, то $\bigcup\{Q_j'\,|\,j=1, \ldots, k+1\}=H$. Рассмотрим семейства $\varkappa'\equiv\{Q_j'\,|\,j=1, \ldots, k\}$ и $\rho'\equiv\{Q_{k+1}'\}$. Тогда $\operatorname{bod}\varkappa'\in\mathscr{H}\cap\text{co-}\mathscr{H}$. Кроме того, $Q_j'=sQ_j$. Следовательно, as_μ-пространство H является ${}^aZ^{c0}$-окружаемым.

Пусть $\bar{S}\in\mathscr{L}_\mu$. Рассмотрим последовательность $\{F_m\}\subset\mathscr{F}$ такую, что $\bigcup F_m\sim S$. Тогда $Q_m\equiv i\bar{F}_m\in Z^0(\tau^{-1}\mathscr{T})\equiv\mathscr{K}_1$. Рассмотрим множество $Q\equiv\bigcup Q_m\in\mathscr{K}_1$. Тогда $i\bar{S}=sQ$.

Пусть $Q\in\mathscr{H}$. Тогда $Q=\operatorname{coz} a$ для некоторой функции $a\in O(H, \mathscr{H})$. Поэтому существует последовательность покрытий $\varkappa_n'\equiv\{Q_{nj}'\,|\,j\in J_n\}\subset\mathscr{H}$ такая, что $\omega(a, Q_{nj}')<1/n$. По определению $Q_{nj}'=\bigcup\{i\bar{S}_{njl}\,|\,l\}$ для некоторой последовательности $\{S_{njl}\,|\,l\}\subset\mathscr{S}$. По предыдущему свойству найдутся множества $Q_{njl}\in\mathscr{K}_1$ такие, что $i\bar{S}_{njl}=sQ_{njl}$. Поэтому $Q_{nj}'=s\bigcup\bigcup Q_{njl}$. Значит, $\varkappa_n'=s\varkappa_n$, где $\varkappa_n\equiv\{Q_{nj}\}$. Так как $H=s\operatorname{bod}\varkappa_n$, то $\varkappa_n'\in\in C^{c0}(\mathscr{K}_1)$. Значит, $a\in O(H, C^{c0}(\mathscr{K}_1))$. Поэтому $Q\in Z^{c0}(\mathscr{K}_1)$. Следовательно, as_μ-прообраз $\tau: T \twoheadleftarrow H$ является пространством окружений типа Z^0Z^{c0} и типа ZZ^{c0} as_μ-пространства T. Предложение доказано.

3.3. Прообразы из $\hat{\mathscr{P}}$ и соответствующие расширения.

Предложение 7. *Пусть $\tau: T\twoheadleftarrow H\in\hat{\mathscr{P}}_0(\hat{\mathscr{P}})$. Тогда для любой функции $a\in O(H, C^{c0}(Z^0(\tau^{-1}\mathscr{T})))$ существует элемент $q\in L_\mu$ такой, что $a|\!-\!\!-|q \bmod \mathscr{R}_s^0(H)$ (соответственно для $a\in O(H, C^{c0}(Z(\tau^{-1}\mathscr{T}))$ существует $q\in L_\mu$ такой, что $a|\!-\!\!-|q\bmod\mathscr{R}_s(H)$).*

Доказательство. Обозначим $\tau^{-1}\mathscr{T}$ через $\mathscr{K}_0$, $Z^0(\mathscr{K}_0)$ через $\mathscr{K}_1$, $O(H, C^0(\mathscr{K}_0))$ через O_0 и $O(H, C^{c0}(\mathscr{K}_1))$ через O_1.

Пусть $a\in O_0$. Тогда существует последовательность покрытий $\{\rho_m'\}\subset\subset C^0(\mathscr{K}_0)$ такая, что $\omega(a, Q)<1/m$ для любого $Q\in\rho_m'$. По определению для ρ_m' существует конечное множество покрытий $\{\rho_{mk}'\,|\,k\in K_m\}$ такое, что $\rho_{mk}'=\varkappa_{mk}'\bigcup\{R_{mk}'\}$, $R_{mk}'=\operatorname{cobod}\varkappa_{mk}'$ и $\rho_m'=\bigwedge\rho_{mk}'$. Далее, $\varkappa_{mk}'$ является s-плотным окружением некоторого семейства $\varkappa_{mk}\in K^0(\mathscr{K}_0)$. Обозначим множество всех подмножеств p в K_m через P_m. Пусть $\varkappa_{mk}'=\{Q_{mk\gamma}'\,|\,\gamma\in\Gamma_{mk}\}$, $\varkappa_{mk}=\{Q_{mk\gamma}\,|\,\gamma\in\Gamma_{mk}\}$, $Q_{mk\gamma}=\tau^{-1}G_{mk\gamma}$ для некоторого $G_{mk\gamma}\in\mathscr{T}$ и $F_{mk}\equiv T\setminus\bigcup\{G_{mk\gamma}\,|\,\gamma\}$. Обозначим через I_{mp} множество всех отображений $i: p\to\bigcup\{\Gamma_{mk}|k\in p\}$ таких, что $i(k)\in\Gamma'_{mk}$. Рассмотрим множества

$$Q'_{mpi}\equiv\bigcap\{Q'_{mki(k)}\,|\,k\in p\},\quad Q_{mpi}\equiv\bigcap\{Q_{mki(k)}\,|\,k\in p\},$$
$$G_{mpi}\equiv\bigcap\{G_{mki(k)}\,|\,k\in p\},\quad R'_{mp}\equiv\bigcap\{R'_{mk}\,|\,k\in K_m\setminus p\},$$
$$F_{mp}\equiv\bigcap\{F_{mk}\,|\,k\in K_m\setminus p\}$$

для всех $p\in P_m$. Рассмотрим μ-измеримые множества $S_{mpi}\equiv G_{mpi}\bigcap F_{mp}$ и множества $H_{mpi}\equiv Q'_{mpi}\bigcap R'_{mp}\in\mathscr{H}$. Тогда $Q'_{mpi}=sQ_{mpi}$, $Q_{mpi}=\tau^{-1}G_{mpi}$, $H\setminus R'_{mp}=s\tau^{-1}(T\setminus F_{mp})$ и $\rho_m'=\{H_{mpi}|p\in P_m\&i\in I_{mp}\}$.

Рассмотрим числа $x_{mpi}\equiv\inf\{a(s)\,|\,s\in H_{mpi}\}$ и $y_{mpi}\equiv\sup\{a(s)\,|\,s\in\in H_{mpi}\}$. Рассмотрим открытые множества

$$U_{mpi}\equiv Q_{mpi}\bigcap R'_{mp}\subset\tau^{-1}S_{mpi}\bigcap H_{mpi}\quad\text{и}\quad U_m\equiv\bigcup\{U_{mpi}\,|\,i,\ p\}.$$

Тогда $H_{mpi}=sU_{mpi}$, и поэтому U_m является s-плотным в H.

Пусть a принимает значения в интервале $]-z, z[$. Рассмотрим μ-измеримые функции g_{mpi} и h_{mpi} такие, что $g_{mpi}(t)\equiv-z$ и $h_{mpi}(t)\equiv z$ для любого $t\notin S_{mpi}$ и $g_{mpi}(t)\equiv x_{mpi}$ и $h_{mpi}(t)\equiv y_{mpi}$ для любого $t\in S_{mpi}$. Определим μ-измеримые функции g_m и h_m, положив $g_m(t)\equiv\max\{g_{mpi}(t)\}$ и $h_m(t)\equiv\min\{h_{mpi}(t)\}$.

Предположим, что $N_m\equiv T\setminus\bigcup S_{mpi}\notin\mathscr{I}$. Тогда существует μ-компактное множество $K\subset N_m$. Так как мы исходили из покрытия, то $Q'_{mpi}\bigcap\bigcap H_K\neq\varnothing$для некоторых индексов. Поэтому $U_{mpi}\bigcap H_K\neq\varnothing$ и, значит, $S_{mpi}\bigcap K\neq\varnothing$, что не так. Следовательно, N_m является μ-пренебрежимым. Пусть $t\notin N_m$. Тогда $t\in S_{mpi}$ для некоторых индексов. Поэтому $h_m(t)-\!-g_m(t)<1/m$. Пусть $t,\ r\in S_{mpi}$. Тогда $g_m(t)-g_m(r)\leqslant h_{mpi}(t)-g_{mpi}(t)<<1/m$ и $g_m(t)-g_m(r)>-1/m$. Аналогично, $\omega(h_m, S_{mpi})<1/m$. Пусть $s\in U_m$. Тогда $s\in U_{mpi}$ для некоторых индексов. Поэтому $a(s)-g_m(\tau s)<1/m$ и $h_m(\tau s)-a(s)<1/m$. Кроме того,

$$a(s)-g_m(\tau s)\geqslant a(s)-h_m(\tau s)\geqslant a(s)-h_{mpi}(\tau s)=a(s)-y_{mpi}>-1/m.$$

Аналогично, $h_m(\tau s)-a(s)>-1/m$. Таким образом, $|a(s)-g_m(\tau s)|<<1/m$ и $|a(s)-h_m(\tau s)|<1/m$ для любого $s\in U_m$.

Пусть $t\notin N_m\bigcup N_n$. Тогда $t\in S_{mpi}\bigcap S_{nqj}$ для некоторых индексов. Можно считать, что последнее множество не является μ-пренебрежимым, и удалять при необходимости μ-пренебрежимые подмножества. Тогда существует μ-компактное множество $K\subset S_{mpi}\bigcap S_{nqj}$. Отсюда $H_K\subset Q_{mpi}\bigcap\tau^{-1}F_{mp}\bigcap\bigcap Q_{nqj}\bigcap\tau^{-1}F_{nq}$. Из s-плотности тогда следует $H_K\subset R'_{mp}\bigcap R'_{nq}$. Поэтому $H_K\subset U_{mpi}\bigcap U_{nqj}$. Возьмём точку $s\in H_K$. Тогда получим

$$|g_m(t)-g_n(t)|\leqslant|g_m(t)-g_m(\tau s)|+|g_m(\tau s)-a(s)|+|a(s)-g_n(\tau s)|+$$
$$+|g_n(\tau s)-g_n(t)|<4/m$$

для любого $n\geqslant m$. В силу полноты кольца LM_μ относительно равномерной сходимости μ-почти всюду существует функция $f\in LM_\mu$ такая, что $|f(t)-g_m(t)|<5/m$ для любого $t\notin N\equiv\bigcup N_m\in\mathscr{I}$. Так как для любого $s\in U_m\setminus\tau^{-1}N$ справедливо $|a(s)-f(\tau s)|\leqslant|a(s)-g_m(\tau s)|+|g_m(\tau(s)-\!-f(\tau s)|<6/m$, то $a\sim f\circ\tau$.

Пусть теперь, $a\in O_1$, т. е. существует последовательность покрытий $\{\rho_m'\}\subset C^{c0}(\mathscr{K}_1)$ такая, что $\omega(a, Q)<1/m$ для любого $Q\in\rho_m'$. По определению для ρ_m' существует конечное множество покрытий $\{\rho'_{mk}\,|\,k\in K_m\}$ такое, что $\rho'_{mk}=\varkappa'_{mk}\bigcup\{R'_{mk}\}$, $R'_{mk}=\operatorname{cobod}\varkappa'_{mk}$ и $\rho'_m=\bigwedge\rho'_{mk}$. Далее, $\varkappa'_{mk}$ является s-плотным окружением некоторого семейства $\varkappa_{mk}\in K^0(\mathscr{K}_1)$, дополняемого некоторым множеством $R_{mk} \in \mathscr{K}_1$. Рассмотрим семейство $\rho_{mk} \equiv \varkappa_{mk} \bigcup \{R_{mk}\} \in K^0(\mathscr{K}_1)$. Тогда $\rho'_{mk} = s\rho_{mk}$ и $\mathrm{bod}\,\rho_{mk}$ является s-плотным в H. Рассмотрим семейство $\rho_m \equiv \bigwedge \rho_{mk}$. Для него справедливо $\rho_m' = s\rho_m$, $\rho_m \in K^0(\mathscr{K}_1)$ и $H = s\,\mathrm{bod}\,\rho_m$.

Далее, $\rho'_m = \{Q'_{mi} \mid i \in I_m\}$ и $\rho_m = \{Q_{mi} \mid i \in I_m\} \subset \mathscr{K}_1$. Отсюда $Q_{mi} = \mathrm{coz}\, a_{mi}$ для некоторых неотрицательных функций $a_{mi} \in O_0$. По доказанному выше существуют неотрицательные функции $f_{mi} \in LM_\mu$, s-плотные множества $U_{mil} \in \mathscr{H}$ и μ-пренебрежимые множества M_{mil} такие, что $|a_{mi} - f_{mi} \circ \tau(s)| < 1/l$ для любого $s \in \tilde{U}_{mil} \equiv U_{mil} \setminus \tau^{-1} M_{mil}$.

Будем параллельно строить некоторые функции на H и на T. Пусть a принимает значения в интервале $]-z, z[$. Рассмотрим числа $x_{mi} \equiv \inf\{a(s) \mid s \in Q'_{mi}\}$ и $y_{mi} \equiv \sup\{a(s) \mid s \in Q'_{mi}\}$. Рассмотрим функции $b_{mik} \equiv -z\mathbf{1} + ka_{mi} \bigwedge (x_{mi} + z)\mathbf{1}$ и $c_{mik} \equiv z\mathbf{1} - ka_{mi} \bigwedge (z - y_{mi})\mathbf{1}$ из O_0. Ясно, что $b_{mik} \leqslant a \leqslant c_{mik}$. Рассмотрим μ-измеримые функции

$$g_{mik} \equiv -z\mathbf{1} + kf_{mi} \bigwedge (x_{mi} + z)\mathbf{1},$$

$$h_{mik} \equiv z\mathbf{1} - kf_{mi} \bigwedge (z - y_{mi})\mathbf{1}.$$

Ясно, что $g_{mik} \leqslant h_{mik}$. Рассмотрим множества $S_{mi} \equiv \mathrm{coz}\, f_{mi}$. Предположим, что $M_m \equiv T \setminus \bigcup S_{mi} \notin \mathscr{I}$. Тогда существует μ-компактное множество $K \subset M_m$. Так как мы исходим из покрытия, то $Q'_{mi} \cap H_K \neq \varnothing$ для некоторых индексов. Поэтому $Q_{mi} \cap H_K \neq \varnothing$.

Рассмотрим множества $Q_{mil} \equiv \overset{-1}{a_{mi}}(]1/l, +\infty[)$. Тогда $Q_{mil} \cap H_K \neq \varnothing$ для некоторого l. Из s-плотности следует $Q_{mil} \cap U_{mil} \cap H_K \neq \varnothing$. Так как идеал $\langle \tau^{-1} \mathscr{I} \rangle$ является s-тощим, то $Q_{mil} \cap \tilde{U}_{mil} \cap H_K \neq \varnothing$. Возьмём точку r из последнего множества. Тогда $\tau r \in S_{mi} \cap K$, что невозможно. Значит, M_m является μ-пренебрежимым.

Пусть индексы таковы, что $S_{mi} \cap S_{nj} \notin \mathscr{I}$. Рассмотрим множества $S_{mil} \equiv \overset{-1}{f_{mi}}(]1/l, +\infty[)$. Тогда $S_{mil} \cap S_{njl} \notin \mathscr{I}$ для некоторого l. Поэтому существует μ-компактное множество $K \subset T \setminus (M_{mil} \bigcup M_{njl})$, содержащееся в предыдущем множестве. Следовательно,

$$H_K \subset \tau^{-1}(S_{mil} \cap S_{njl} \setminus M_{mil} \bigcup M_{njl}).$$

Из s-плотности следует, что $U_{mil} \cap U_{njl} \cap H_K \neq \varnothing$. Значит, $\tilde{U}_{mil} \cap \tilde{U}_{njl} \cap \tau^{-1}(S_{mil} \cap S_{njl}) \neq \varnothing$. Возьмём точку s из последнего множества. Тогда $s \in Q_{mi} \cap Q_{nj}$. Поэтому $x_{mi} \bigvee x_{nj} \leqslant a(s) \leqslant y_{mi} \bigwedge y_{nj}$ влечёт $g_{mik} \leqslant x_{mi}\mathbf{1} \leqslant y_{nj}\mathbf{1} \leqslant h_{njk}$ для любого k.

Пусть теперь индексы таковы, что $S_{mi} \cap S_{nj} \in \mathscr{I}$. Для $t \in T \setminus S_{mi}$ справедливо $g_{mik}(t) = -z \leqslant y_{nj} \leqslant h_{njk}(t)$. Аналогично, $g_{mik}(t) \leqslant x_{mi} \leqslant z = h_{njk}(t)$ для любого $t \in T \setminus S_{nj}$. Рассмотрим μ-пренебрежимое множество

$$N_{mn} \equiv \bigcup \{S_{mi} \cap S_{nj} \mid S_{mi} \cap S_{nj} \in \mathscr{I}\}.$$

Тогда $g_{mik}(t) \leqslant h_{njl}(t)$ для любого $t \notin N_{mn}$ независимо от индексов.

Рассмотрим функции g и h такие, что $g(t) \equiv \sup\{g_{mik}(t)\}$ и $h(t) \equiv \inf\{h_{mjl}(t)\}$.

Рассмотрим множество $N \equiv \bigcup M_m \bigcup \bigcup N_{mn}$. Пусть $t \notin N$. Тогда из доказанного выше следует, что $g(t) \leqslant h(t)$. Так как $t \notin M_m$ для любого m, то $t \in S_{mi}$ для некоторого $i = i(m)$. Поэтому найдётся k такое, что $g_{mik}(t) = x_{mi}$ и $h_{mik}(t) = y_{mi}$. Следовательно, $h_{mik}(t) - g_{mik}(t) < 1/m$. Это означает, что $g(t) = h(t)$. Легко проверяется, что $g \in LM_\mu$.

Рассмотрим множества $M \equiv \bigcup M_{mil}$, $V_{mil} \equiv Q_{mil} \cap U_{mil}$ и $V_m \equiv \bigcup V_{mil}$. Множества V_m являются s-плотными. Действительно, пусть $G \in \mathscr{H}$ и $G \cap V_m \cap \cap H_K = \varnothing$. Тогда $G \cap Q_{mil} \cap H_K = \varnothing$ влечёт $G \cap Q'_{mi} \cap H_K = \varnothing$. Следовательно, $G \cap H_K = \varnothing$. Пусть $s \in V_m \setminus \tau^{-1}(M \cup N)$. Тогда $s \in V_{mil} \setminus \tau^{-1} M$ для некоторых индексов. Поэтому $\tau s \in S_{mi}$. Следовательно, найдётся k такое, что $b_{mik}(s) = x_{mi} = g_{mik}(\tau s)$ и $c_{mik}(s) = y_{mi} = h_{mik}(\tau s)$. Отсюда $a(s) - g(\tau s) \leqslant \leqslant c_{mik}(s) - g_{mik}(\tau s) < 1/m$ и $a(s) - g(\tau s) \geqslant b_{mik}(s) - h_{mik}(\tau s) > -1/m$. Таким образом, $a \sim g \circ \tau$. Предложение доказано.

Следствие 1. *Пусть $\tau : T \leftarrow\!\!\leftarrow H \in \mathscr{P}_0(\hat{\mathscr{P}})$. Тогда для любой функции $a \in O$ существует элемент $q \in L_\mu$ такой, что $a | \!\!-\!\!| q \operatorname{mod} \mathscr{R}_s^0(H)$ (соответственно $\operatorname{mod} \mathscr{R}_s(H)$).*

Следствие 2. *Пусть $\hat{\tau} : T \leftarrow\!\!\leftarrow \hat{H} \in \hat{\mathscr{P}}_0(\mathscr{P})$. Тогда существует топологически связывающий по модулю $\mathscr{R}_s^0(\hat{H})$ (соответственно $\mathscr{R}_s(\hat{H})$) морфизм $\hat{v}$ из cr_μ-расширения $\hat{u} : C \rightarrowtail \hat{O}$ в cr_μ-расширение $u : C \rightarrowtail L_\mu$, относительно которого первое cr_μ-расширение меньше второго.*

3.4. Прообразы из $\widetilde{\mathscr{P}}_0$ и соответствующие расширения.

Предложение 8. *Пусть $\tau : T \leftarrow\!\!\leftarrow H \in \widetilde{\mathscr{P}}_0(\mathscr{P})$. Тогда для любого элемента $q \in L_\mu$ существует функция $a \in O(H, C^{c0}(Z^0(\tau^{-1}\mathscr{T})))$ (соответственно $a \in O(H, C^{c0}(Z(\tau^{-1}\mathscr{T}))))$ такая, что $q | \!\!-\!\!| a \operatorname{mod} \mathscr{R}_s^0(H)$.*

Доказательство. Будем использовать обозначения из доказательства предложения 7. Пусть $F \in \mathscr{T}$. Рассмотрим множество $G \equiv T \setminus F$ и конульмножество $G_0 \subset G$ такое, что $G \setminus G_0 \in \mathscr{I}$. Тогда для семейства $\varkappa \equiv \{\tau^{-1} G_0\} \in K^0(\mathscr{K}_0)$ существует s-плотное окружение $\varkappa' \in S^0(\mathscr{K}_0)$. Рассмотрим множества $U \equiv \operatorname{bod} \varkappa'$ и $V \equiv \operatorname{cobod} \varkappa'$. Тогда $U = \operatorname{cl} \tau^{-1} G_0$. Так как $\chi(V) \in O_0$, то $V \in \mathscr{K}_1$.

Предположим, что существует множество $Q \in \mathscr{H}$ такое, что $Q \subset \tau^{-1} G \setminus \setminus U$. Тогда $Q \cap H_K \neq \varnothing$ для некоторого K. Возьмём последовательности компактов $\{R_i\}$ и $\{S_j\}$ такие, что $\bigcup R_i \subset K \cap G_0$, $\bigcup S_j \subset K \setminus G$, $(K \cap G_0) \setminus \setminus \bigcup R_i \in \mathscr{I}$ и $K \setminus G \setminus \bigcup S_j \in \mathscr{I}$. Возьмём μ-компактные множества $K_i \subset R_i$ и $L_j \subset S_j$ такие, что $(R_i \setminus K_i) \cup (S_j \setminus L_j) \in \mathscr{I}$. Тогда $K = \operatorname{top}\{K_i, L_j | i, j\}$ означает, что $\bigcup H_{K_i} \cup H_{L_j}$ плотно в H_K. При этом $(H_{K_i} \cup H_{L_j}) \cap Q = \varnothing$. Поэтому $H_K \cap Q = \varnothing$, что не так. Следовательно, $U = \operatorname{cl} \tau^{-1} G$ и $\tau^{-1} G$ является s-плотным в U. Отсюда следует, что $V = \operatorname{int} \tau^{-1} F$ и $H_K \subset \tau^{-1} F$ влечёт $H_K \subset V$.

Пусть S — μ-измеримое множество, $f \equiv \chi(S)$ и $q \equiv \bar{f}$. Рассмотрим последовательности компактных множеств $\{Q_i\}$ и $\{R_j\}$ такие, что $\bigcup Q_i \subset \subset S \subset T \setminus \bigcup R_j$ и $S \setminus (\bigcup Q_i \bigcup \bigcup R_j) \in \mathscr{I}$. Рассмотрим множества $V_i \equiv \operatorname{int} \tau^{-1} Q_i$, $W_j \equiv \operatorname{int} \tau^{-1} R_j$ и дизъюнктные множества $V \equiv \bigcup V_i$, $W \equiv \bigcup W_j$ из $\mathscr{K}_1$. Тогда $\varkappa \equiv \{V, W\} \in K^0(\mathscr{K}_1)$. Рассмотрим множество $U \equiv \operatorname{bod} \varkappa$.

Пусть $G \in \mathscr{H}$ и $G \cap U \cap H_K = \varnothing$. Рассмотрим μ-компактные множества $K_i \subset K \cap Q_i$ и $L_j \subset K \cap R_j$ такие, что $(K \cap Q_i \setminus K_i) \bigcup (K \cap R_j \setminus L_j) \in \mathscr{I}$. Так как $K = \operatorname{top}\{K_i, L_j | i, j\}$, то $\bigcup H_{K_i} \bigcup \bigcup H_{L_j}$ плотно в H_K. Из $H_{K_i} \subset \tau^{-1} Q_i$ следует $H_{K_i} \subset V_i$. Аналогично, $H_{L_j} \subset W_j$. Следовательно, $G \cap (H_{K_i} \cup H_{L_j}) \cap H_K = \varnothing$ влечёт $G \cap H_K = \varnothing$. Значит, множество U является s-плотным в H. Поэтому $\varkappa \in K^{c0}(\mathscr{K}_1)$.

По условию для $\varkappa$ существует s-плотное окружение $\varkappa' \equiv \{V', W'\} \in \in S^{c0}(\mathscr{K}_1)$. Так как $\varkappa' \in C^{c0}(\mathscr{K}_1)$ и $V' \cap W' = \varnothing$, то $a \equiv \chi(V') \in O_1$. Если $s \in V$, то $a(s) = 1 = f(\tau s)$. Если $s \in W$, то $a(s) = 0 = f(\tau s)$. Значит, $a \sim f \circ \tau$. Таким образом, $\bar{f} | \!\!-\!\!| a$.

Так как топологическая связь сохраняет кольцевые операции, то из этого следует, что для любого ступенчатого элемента $q\equiv\sum x_k\overline{\chi(S_k)}$ существует соответствующая функция a. Так как произвольный элемент $g\in L_\mu$ равномерно приближается ступенчатыми элементами, то и для q существует соответствующее a. Предложение доказано.

Следствие. *Пусть* $\tilde{\tau}:T\twoheadleftarrow\tilde{H}\in\tilde{\mathscr{P}}_0(\tilde{\mathscr{P}})$. *Тогда существует топологически связывающий по модулю* $\mathscr{R}_s{}^0(H)$ *морфизм* $\tilde{v}$ *из* cr_μ*-расширения* $u:C\rightarrowtail L_\mu$ *в* cr_μ*-расширение* $\tilde{u}:C\rightarrowtail\tilde{O}$, *относительно которого первое* cr_μ*-расширение меньше второго.*

3.5. Описание прообраза Ионеску Тулча и бэровского и борелевского прообразов первого класса. Пусть $\tau:T\twoheadleftarrow H$ является as_μ-прообразом, построенным в п. 3.2.

Предложение 9. *as_μ-Прообраз $\tau:T\twoheadleftarrow H$ является реализующим cr_μ-расширение Лебега $u:C\rightarrowtail L_\mu$ относительно топологически связывающего по модулю $\mathscr{R}_s{}^0(H)$ реализующего изоморфизма r. Значит, $\tau:T\twoheadleftarrow H$ является прообразом Ионеску Тулча $\tau:T\twoheadleftarrow i_\mu T$.*

Доказательство. Так как $\tau:T\twoheadleftarrow H\in\hat{\mathscr{P}}_0\cap\tilde{\mathscr{P}}_0$, то из следствий к предложениям 7 и 8 вытекает, что существует топологически связывающий по модулю $\mathscr{R}_s{}^0(H)$ реализующий изоморфизм r между u: $C\rightarrowtail L_\mu$ и $u_\tau:C\rightarrowtail O(H,\mathscr{H})$. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 2. *Прообраз Ионеску Тулча $T\twoheadleftarrow i_\mu T$ является окружаемым as_μ-накрытием типа $Z^0Z^{c0}|^aZ^{c0}$ и типа $ZZ^{c0}|^aZ^{c0}$.*

Доказательство. Пусть $u_\tau:C\rightarrowtail O$ обозначает cr_μ-расширение, соответствующее as_μ-прообразу $\tau:T\twoheadleftarrow i_\mu T$. Пусть $\hat{\tau}:T\twoheadleftarrow\hat{H}\in\hat{\mathscr{P}}_0$ и $\tilde{\tau}:T\twoheadleftarrow\tilde{H}\in\tilde{\mathscr{P}}$. Из предыдущего предложения и п. 3.3 следует, что $\hat{u}:C\rightarrowtail\hat{O}\leqslant u_\tau:C\rightarrowtail O$ относительно морфизма $r\circ\hat{v}$. Из п. 3.4 следует, что $u_\tau:C\rightarrowtail O\leqslant\tilde{u}:C\rightarrowtail\tilde{O}$ относительно морфизма $\tilde{v}\circ r^{-1}$. Отсюда в силу предложения 1 следует, что $\hat{\tau}:T\twoheadleftarrow\hat{H}\leqslant\tau:T\twoheadleftarrow i_\mu T\leqslant\tilde{\tau}:T\twoheadleftarrow\tilde{H}$. Теорема доказана.

Реализующий a-прообраз $\tau:(T,\mathscr{T})\twoheadleftarrow(b_1{}^0T,\mathscr{H})$ c-расширения Бэра $u:C\rightarrowtail BM_1{}^0$ первого класса назовём *бэровским прообразом первого класса пространства T*. Аналогично определим *борелевский прообраз $T\twoheadleftarrow b_1T$ первого класса.*

Теперь на пространстве T рассмотрим новое фиксированное прикрытие $\mathfrak{T}_p:\mathscr{A}_p\to\mathscr{F}$ такое, что $\mathfrak{T}_p(t)\equiv t$. Так же, как в п. 1.2.2, определим категорию *as_p-прообразов $\tau:(T,\mathscr{T},\mathfrak{T}_p)\twoheadleftarrow(H,\mathscr{H},\mathfrak{M})$ пространства T.*

Точно так же, как в п. 3.2, по решётке $\mathscr{F}_\sigma{}^0$ (соответственно $\mathscr{K}_\sigma$) построим as_p-прообраз $\tau:T\twoheadleftarrow H$.

Почти аналогично предыдущему доказываются

Предложение 9. *as_p-Прообраз $\tau:T\twoheadleftarrow H$ является реализующим cr_p-расширение $u:C\rightarrowtail BM_1{}^0$ (соответственно $u:C\rightarrowtail BM_1$) относительно топологически связывающего по модулю $\mathscr{R}_s{}^0(H)$ (соответственно $\mathscr{R}_s(H)$) реализующего изоморфизма. Значит, $\tau:T\twoheadleftarrow H$ является бэровским (соответственно борелевским) прообразом первого класса.*

ТЕОРЕМА 2′. *Бэровский (борелевский) прообраз первого класса $T\twoheadleftarrow b_1{}^0T$ (соответственно $T\twoheadleftarrow b_1T$) является окружаемым as_p-накрытием типа $Z^0Z^{c0}|^aZ^{c0}$ (соответственно $ZZ^{c0}|^aZ^{c0}$).*

Таким образом, окружаемые накрытия $T\twoheadleftarrow i_\mu T$ и $T\twoheadleftarrow b_1{}^0T$ (или $T\twoheadleftarrow b_1T$) имеют одинаковый тип. Их удалось различить только благодаря выбору различных прикрытий $\mathfrak{T}_\mu$ и $\mathfrak{T}_p$ на T.

З а м е ч а н и е. Аналогичным образом можно определить и описать *бэровский* и *борелевский прообразы любого класса* α.

Список литературы

1. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Гл. III—V, IX. М.: Наука, 1977.
2. *Semadeni Z.* Banach spaces of continuous functions. Warszawa: Polish. Sci. Publ., 1971.
3. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
4. *Jacobs K.* Measure and integral. New York: Academic Press, 1978.
5. *Arens R. F.* Operations induced in function classes//Monatsh. Math. 1951. V. 55, № 1. P. 1—19.
6. *Fine N. J., Gillman L., Lambek J.* Rings of quotients of rings of functions. Montreal: Mc Gill Univ. Press, 1965.
7. *Ламбек И.* Кольца и модули. М.: Мир, 1971.
8. *Захаров В. К.* Функциональное представление равномерного пополнения максимального и счетно-плотного модулей частных модуля непрерывных функций//УМН. 1980. Т. 35, вып. 4. С. 187—188.
9. *Dashiell F., Hager A., Henriksen M.* Order-Cauchy completions of rings and vector lattices of continuous functions//Can. J. Math. 1980. V. 32, № 3. P. 657—685.
10. *Захаров В. К.* cr-оболочки кольца непрерывных функций//ДАН СССР. 1987. Т. 294, № 3. С. 531—534.
11. *Захаров В. К.* Функциональная характеризация абсолюта, векторные решётки функций со свойством Бэра и квазинормальных функций и модули частных непрерывных функций//Тр. Моск. матем. об-ва. 1982. Т. 45. С. 68—104.
12. *Архангельский А. В., Пономарёв В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
13. *Захаров В. К., Колдунов А. В.* Секвенциальный абсолют и его характеризации//ДАН СССР. 1980. Т. 253, № 2. С. 280—284.
14. *Захаров В. К.* Гиперстоунов абсолют вполне регулярного пространства//ДАН СССР. 1982. Т. 267, № 2. С. 280—283.
15. *Zaharov V. K.* Some perfect preimages connected with extensions of the family of continuous functions//Coll. Math. Soc. János Bolyai. 401. Topology and Applications. Eger (Hungary). 1983. P. 703—728.
16. *Ionescu Tulcea A. and C.* Topics in the theory of lifting. Berlin: Springer-Verlag, 1969.
17. *Delfosse J.-P.* Caractérizations d'anneaux de fonctions continues//Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Sér. I. 1975. V. 89, № 3. P. 364—368.
18. *Александров А. Д.* Additive functions in abstract spaces. I—III//Матем. сб. 1940. Т. 8. С. 303—348; 1941. Т. 9. С. 563—628; 1943. Т. 13. С. 169—238.
19. *Колдунов А. В.* Расширения канторовского типа и их применения//ДАН СССР. 1985. Т. 285, № 5. С. 1050—1053.
20. *Захаров В. К.* Делимость на счётно плотные идеалы и счётная ортополнота модулей//Матем. заметки. 1981. Т. 30, № 4. С. 481—496.
21. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
22. *Zaharov V. K.* On functions connected with sequential absolute, Cantor completion and classical ring of quotients//Per. Math. Hung. 1988. V. 19, № 2. P. 113—133.
23. *Zaharov V. K.* Lebesque cover and Lebesque extension//Studia Sci. Math. Hung. 1988. V. 23. P. 343—368.
24. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1977.

Поступила в редакцию
28.I.1988