И. А. Киприянов, А. А. Куликов, Оптимальное управление процессами, описываемыми сингулярными уравнениями параболического типа,
Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 11, 1982–1987

https://www.mathnet.ru/de8495

НОЯБРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 11

УДК 517.977.56

И. А. КИПРИЯНОВ, А. А. КУЛИКОВ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ СИНГУЛЯРНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В настоящей работе рассматривается задача управления процессом индукционного нагрева металлического изделия, имеющего форму цилиндра, на поверхности которого происходит теплообмен с окружающей средой [1—4]. Указанный процесс описывается краевой задачей для неоднородного уравнения теплопроводности, содержащего сингулярный оператор Бесселя. Управление происходит за счет свободного члена в правой части этого уравнения.

В монографии [1] рассмотрена задача управления с минимальной энергией процессом индукционного нагрева, и для ее решения использован метод моментов. В работе [2], целиком посвященной задаче управления индукционным нагревом, вводится в рассмотрение весовой функционал, содержащий два слагаемых. Первое из них характеризует степень близости температуры цилиндра к заданной функции, а второе — величину энергии, затраченную в процессе индукционного нагрева. Задача минимизации этого функционала в [2] сводится к приближенному решению интегрального уравнения, которому удовлетворяет оптимальное управление.

В настоящей работе приводятся результаты, позволяющие обосновать применение градиентных методов минимизации весового функционала в рассматриваемой задаче. При этом использован ряд понятий теории весовых функциональных пространств, изученных в [5], и методы, изложенные в книге [6]. Получено явное выражение для градиента минимизируемого функционала и установлено, что он удовлетворяет условию Липшица.

Рассмотрим процесс индукционного нагрева однородного металлического изделия, имеющего форму цилиндра, высота которого значительно превосходит его диаметр. Предположим, что процесс распространения тепла в цилиндре является осесимметрическим. Тогда начальный этап индукционного нагрева описывается краевой задачей [1—3]

$$w_t = a^2(w_{rr} + (1/r)w_r) + (a^2/\varkappa)F(r,t), \quad 0<r<R, \quad 0<t\leqslant T, \tag{1}$$

$$w(r,0) = w_0(r), \quad 0<r\leqslant R, \tag{2}$$

$$w_r(0,t)=0, \quad w_r(R,t) = h[q(t) - w(R,t)], \quad 0<t\leqslant T, \tag{3}$$

где $w(r,t)$ — температура цилиндра на расстоянии r от его оси в момент времени t; $F(r,t)$ — плотность внутренних тепловых источников; R — радиус цилиндра; T — длительность начального этапа процесса индукционного нагрева; a^2, $\varkappa$ — соответственно коэффициенты температуропроводности и теплопроводности; $h=H/\varkappa$, H — коэффициент теплообмена с окружающей средой; $q(t)$ — температура окружающей среды.

Функцию $F(r,t)$ достаточно точно можно представить в виде [3] $F(r,t)=p(t)V(r)$, где $p(t) = (A^2(t)d/(6\gamma))(1-d/(4R))$ — мощность, приходящаяся на единицу поверхности цилиндра, $A(t)$ — амплитуда плотности тока на поверхности цилиндра, γ — удельная электропроводность металла, d — расстояние от поверхности цилиндра до того слоя металла, где плотность тока равна нулю,

$$V(r)=\begin{cases} 12R(r-R+d)/(4R-d) \text{ при } R-d\leqslant r\leqslant R, \\ 0 \text{ при } 0\leqslant r\leqslant R-d. \end{cases}$$

Аналогично описываются и другие этапы процесса индукционного нагрева (см. [1—3]).

При постоянной частоте тока можно считать величину d заданной постоянной [4]. Таким образом, функция $V(r)$ является заданной. Функцию $p(t)$ будем рассматривать как управляющую. Требуемое управление можно реализовать за счет выбора соответствующей амплитуды плотности тока $A(t)$.

Вместо задачи (1)—(3) рассмотрим краевую задачу

$$u_t=u_{xx}+(\mu/x)u_x+p(t)v(x),\ 0<x<l,\ 0<t\leqslant T, \tag{4}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant l, \tag{5}$$

$$u_x(0,t)=0,\ u_x(l,t)=\nu[q(t)-u(l,t)],\ 0<t\leqslant T, \tag{6}$$

где l, T, μ, ν — заданные положительные постоянные; $v(x)$, $\varphi(x)$ и $q(t)$ — заданные функции, $v(x)\not\equiv 0$; $p(t)$ — управляющая функция. В дальнейшем будем использовать обозначение $Q=(0,l)\times(0,T)$.

Заметим, что решение задачи (1)—(3) $w(r,t)=u_1(r/a,t)$, где u_1— решение задачи (4)—(6) при $\mu=1$, $l=R/a$, $\nu=ah$, $v(x)=(a^2/\varkappa)V(ax)$, $\varphi(x)=w_0(ax)$.

Требуется выбрать функцию $p(t)$ так, чтобы к моменту времени T решение задачи (4)—(6) было как можно «ближе» к заданной функции $\chi(x)$.

Приведем некоторые определения и обозначения, используемые в дальнейшем.

Пусть Ω_s — область в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 1$, симметричная относительно гиперплоскости $x_1=0$ и $\Omega^+=\Omega_s\cap\{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n: x_1>0\}$. Через $C_+^m(\Omega_s)$ (соответственно $C_+^m(\bar\Omega_s)$), $m=0,1,2,\dots$, обозначим совокупность всех функций класса $C^m(\Omega_s)$ (соответственно $C^m(\bar\Omega_s)$), четных по переменной x_1. Через $C_+^m(\Omega^+)$ (соответственно $C_+^m(\bar\Omega^+)$) обозначим совокупность всех функций, являющихся сужениями на Ω^+ (соответственно на $\bar\Omega^+$) функций из $C_+^m(\Omega_s)$ (соответственно $C_+^m(\bar\Omega_s)$).

Введем в рассмотрение гильбертовы пространства $L_{2,\mu}(\Omega^+)$ и $H_\mu^1(\Omega^+)$ [5] как пополнение класса $C_+^1(\bar\Omega^+)$ соответственно по нормам

$$\|g\|_{L_{2,\mu}(\Omega^+)}=\|g\|_{0,\mu}=\Big(\int_{\Omega^+}|g(x)|^2x_1^\mu dx\Big)^{1/2}$$

и

$$\|g\|_{H_\mu^1(\Omega^+)}=\|g\|_{1,\mu}=\Big(\|g\|_{0,\mu}^2+\sum_{i=1}^n\|g_{x_i}\|_{0,\mu}^2\Big)^{1/2}.$$

Через $H_\mu^{1,0}(Q)$ обозначим пополнение пространства $C_+^1(\bar Q)$ по норме

$$\|g\|_{H_\mu^{1,0}(Q)}=\Big(\iint_Q|g(x,t)|^2x^\mu dxdt+\iint_Q|g_x(x,t)|^2x^\mu dxdt\Big)^{1/2}.$$

Будем говорить, что функция $\psi(x)\in L_{2,\mu}(0,l)$ является следом функции $z(x,t)\in L_{2,\mu}(Q)$ при $t=\tau$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$ такое, что для почти всех $t\in[0,T]$, для которых $|t-\tau|<\delta$, имеет место неравенство

$$\int_0^l|z(x,t)-\psi(x)|x^\mu dx<\varepsilon.$$

Если след функции $z(x, t)$ при $t=\tau$ существует, то будем обозначать его через $z(x, \tau)$ или $z(\cdot, \tau)$. Аналогично определяется след $z(x, \cdot)$ при каждом фиксированном $x \in [0, l]$.

Легко видеть, что если след функции $z(x, t) \in L_{2,\mu}(Q)$ существует, то он определяется единственным образом.

В дальнейшем будем предполагать, что $v(x)$, $\varphi(x)$, $\chi(x) \in L_{2,\mu}(0, l)$; $p(t)$, $q(t) \in L_2(0, T)$ и что эти функции (а следовательно, и решение $u(x, t)$) принимают вещественные значения. Пространство $L_2(0, T)$ будем обозначать через H, а норму функции из $L_2(0, T)$ — через $\|\cdot\|$.

Для того чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (4)—(6) от функции $p(t)$, будем записывать его в виде $u(x, t) = u(x, t; p)$.

Степень близости функций $u(x, T; p)$ и $\chi(x)$ будем характеризовать функционалом

$$I(p) = \int_0^l [u(x, T; p) - \chi(x)]^2 x^\mu dx + \lambda \int_0^T p^2(t) dt, \tag{7}$$

где $\lambda \geqslant 0$ — заданное число.

В качестве множества допустимых управлений будем брать совокупность всех функций $p(t) \in H$, таких, что $p_{\min} \leqslant p(t) \leqslant p_{\max}$ для почти всех $t \in [0, T]$, где $p_{\min}$ и $p_{\max}$ — заданные числа. Множество допустимых управлений будем обозначать через P.

Поставленную выше задачу математически можно сформулировать следующим образом: требуется минимизировать функционал (7) на множестве допустимых управлений P при условии, что функция $u(x, t; p)$ является решением задачи (4)—(6).

Введем следующие обозначения: $I_* = \inf\limits_{p \in P} I(p)$, $P_* = \{p \in P : I(p) = I_*\}$.

Множество P_* называется множеством оптимальных управлений.

Пусть функция $u(x, t)$ является классическим решением задачи (4)—(6) и пусть $\psi(x, t)$ — произвольная функция класса $C^1_+(\bar{Q})$. Умножим уравнение (4) на функцию $\psi(x, t) x^\mu$ и проинтегрируем полученное равенство по прямоугольнику Q. Далее в интегралах, содержащих производные функции $u(x, t)$, произведем интегрирование по частям, учитывая при этом, что $u_{xx} + (\mu/x) u_x = x^{-\mu}(x^\mu u_x)_x$, и используя начальное и граничное условия (5), (6). Тогда получим, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{gathered}\int_0^l [u(x, T)\psi(x, T) - \varphi(x)\psi(x, 0)] x^\mu dx - \iint_Q [u(x, t)\psi_t(x, t) - \\ - u_x(x, t)\psi_x(x, t)] x^\mu dx dt - \iint_Q p(t) v(x) \psi(x, t) x^\mu dx dt - \\ - l^\mu \nu \int_0^T [q(t) - u(l, t)] \psi(l, t) dt = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

Обобщенным решением краевой задачи (4)—(6) будем называть функцию $u(x, t) = u(x, t; p) \in H^{1,0}_\mu(Q)$, имеющую следы $u(x, \cdot) \in L_2(0, T)$, непрерывные в метрике $L_2(0, T)$ при всех $x \in [0, l]$, следы $u(\cdot, t) \in L_{2,\mu}(0, l)$, непрерывные в метрике $L_{2,\mu}(0, l)$ при всех $t \in [0, T]$, удовлетворяющую интегральному тождеству (8) при всех $\psi = \psi(x, t) \in H^1_\mu(Q)$ и такую, что след $u(\cdot, t)$ при $t=0$ совпадает с функцией $\varphi(x)$ почти всюду на $(0, l)$.

Вопросы существования и гладкости обобщенных решений B-гипоэллиптических уравнений, к которым относится и уравнение (4), рассмотрены в работах [7—9]. Используя методы, изложенные в [10], и теоремы 2, 6 [6, § 3, гл. 1], можно доказать, что при каждом $p \in H$ задача (4)—(6) имеет единственное обобщенное решение и что множество оптимальных управлений P_* не пусто.

Пусть $p(t)$, $\Delta p(t)$ — произвольные функции из H. Рассмотрим приращение функционала $\Delta I(p)=I(p+\Delta p)-I(p)$.

С помощью методов работ [6, 11] можно доказать следующие утверждения.

Теорема 1. *Имеет место формула*

$$\Delta I(p)=\int_0^T\Big[2\lambda p(t)+\int_0^l\psi(x,t;p)v(x)x^\mu dx\Big]\Delta p(t)\,dt+$$

$$+\int_0^l(\Delta u(x,T))^2x^\mu dx+\lambda\int_0^T(\Delta p(t))^2dt, \tag{9}$$

где $\Delta u(x,T)=u(x,T;p+\Delta p)-u(x,T;p)$; $\psi(x,t;p)=\psi(x,t)$ — *обобщенное решение краевой задачи, сопряженной к задаче (4)—(6):*

$$\psi_t=-\psi_{xx}-(\mu/x)\psi_x,\quad 0<x<l,\quad 0<t\leqslant T, \tag{10}$$

$$\psi(x,T)=2[u(x,T;p)-\chi(x)],\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{11}$$

$$\psi_x(0,t)=0,\quad \psi_x(l,t)=-\nu\psi(l,t),\quad 0<t\leqslant T. \tag{12}$$

При этом функция $\Delta u(x,T)$ *удовлетворяет оценке*

$$\int_0^l(\Delta u(x,T))^2x^\mu dx\leqslant C_1\int_0^T(\Delta p(t))^2dt, \tag{13}$$

где $C_1=(1/\varepsilon)\|v\|^2_{0,\mu}$, ε — *произвольная постоянная, удовлетворяющая условию* $0<\varepsilon<\min((\nu/l)(\mu+1),\ (2/l^2)(\mu+1))$.

Следствие. *Функционал* $I(p)$ *дифференцируем на пространстве* H *и его градиент равен*

$$I'(p)=2\lambda p(t)+\int_0^l\psi(x,t;p)v(x)x^\mu dx.$$

Приведем схему доказательства теоремы 1.

Приращение $\Delta I(p)$ можно записать в виде

$$\Delta I(p)=\int_0^l 2[u(x,T;p)-\chi(x)]\Delta u(x,T)x^\mu dx+\int_0^l(\Delta u(x,T))^2x^\mu dx+$$

$$+2\lambda\int_0^T p(t)\Delta p(t)\,dt+\lambda\int_0^T(\Delta p(t))^2dt, \tag{14}$$

где $\Delta u(x,t)=u(x,t;p+\Delta p)-u(x,t;p)$ — обобщенное решение краевой задачи

$$\Delta u_t=x^{-\mu}(x^\mu\Delta u_x)_x+\Delta p(t)v(x),\quad 0<x<l,\quad 0<t\leqslant T, \tag{15}$$

$$u(x,0)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{16}$$

$$\Delta u_x(0,t)=0,\quad \Delta u_x(l,t)=-\nu\Delta u(l,t),\quad 0<t\leqslant T. \tag{17}$$

Дальнейшее доказательство равенства (9) проводится аналогично доказательству соответствующего равенства в [6, с. 118]. При этом следует использовать равенства (10)—(17), а также равенство $(x^\mu\Delta u_x)_x\psi-(x^\mu\psi_x)_x\Delta u=(x^\mu\Delta u_x\psi-x^\mu\psi_x\Delta u)_x$, справедливость которого устанавливается непосредственной проверкой.

Умножая уравнение (15) на $\Delta u(x,t)x^\mu$ и интегрируя полученное равенство по прямоугольнику Q, находим, что

$$\frac{1}{2}\int_0^l(\Delta u(x,T))^2x^\mu dx+l^\mu\nu\int_0^T(\Delta u(l,t))^2dt+\iint_Q(\Delta u_x(x,t))^2x^\mu dxdt=$$

$$=\iint_Q\Delta p(t)v(x)\Delta u(x,t)x^\mu dxdt. \tag{18}$$

Используя элементарное неравенство $\alpha\beta \leqslant \varepsilon\alpha^2/2 + \beta^2/(2\varepsilon)$, справедливое для любых α, $\beta \in \mathbf{R}^1$ и $\varepsilon > 0$, имеем

$$\iint_Q \Delta p(t)\, v(x)\, \Delta u(x,t)\, x^\mu dx dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \iint_Q (\Delta u(x,t))^2 x^\mu dx dt + \\ + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^l v^2(x) x^\mu dx \int_0^T (\Delta p(t))^2 dt. \tag{19}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (19). Из формулы Ньютона — Лейбница и неравенства Коши — Буняковского следуют оценки

$$\begin{aligned}(\Delta u(x,t))^2 &\leqslant 2\Big(\int_x^l \Delta u_\xi(\xi,t)\, d\xi\Big)^2 + 2(\Delta u(l,t))^2 \leqslant \\ &\leqslant 2\int_x^l (\Delta u_\xi(\xi,t))^2 \xi^\mu d\xi \int_x^l \xi^{-\mu} d\xi + 2(\Delta u(l,t))^2.\end{aligned} \tag{20}$$

Умножая неравенство (20) на x^μ и интегрируя полученное неравенство по прямоугольнику Q, можно показать, что

$$\iint_Q (\Delta u(x,t))^2 x^\mu dx dt \leqslant \frac{l^2}{\mu+1} \iint_Q (\Delta u_x(x,t))^2 x^\mu dx dt + \\ + \frac{2l^{\mu+1}}{\mu+1} \int_0^T (\Delta u(l,t))^2 dt. \tag{21}$$

Из (18)—(21) непосредственно следует оценка (13). Покажем, что функция $I'(p)$ удовлетворяет условию Липшица. Имеем

$$\|I'(p+\Delta p) - I'(p)\| = \|2\lambda \Delta p(t) + \int_0^l \Delta\psi(x,t)\, v(x)\, x^\mu dx\| \leqslant \\ \leqslant 2\lambda \|\Delta p\| + \|v\|_{0,\mu} \Big(\iint_Q (\Delta\psi(x,t))^2 x^\mu dx dt\Big)^{1/2}, \tag{22}$$

где $\Delta\psi(x,t) = \psi(x,t;p+\Delta p) - \psi(x,t;p)$ — обобщенное решение краевой задачи

$$\Delta\psi_t = -x^{-\mu}(x^\mu \Delta\psi_x)_x,\quad 0<x<l,\quad 0<t\leqslant T,$$
$$\Delta\psi(x,T) = 2\Delta u(x,T),\quad 0\leqslant x\leqslant l,$$
$$\Delta\psi_x(0,t) = 0,\quad \Delta\psi_x(l,t) = -\nu\Delta\psi(l,t),\quad 0<t\leqslant T.$$

Используя те же рассуждения, что и при доказательстве оценки (21), можно показать, что имеют место неравенства

$$l^\mu \nu \int_0^T (\Delta\psi(l,t))^2 dt + \iint_Q (\Delta\psi_x(x,t))^2 x^\mu dx dt \leqslant 2\int_0^l (\Delta u(x,T))^2 x^\mu dx, \tag{23}$$

$$\iint_Q (\Delta\psi(x,t))^2 x^\mu dx dt \leqslant \frac{2l^{\mu+1}}{\mu+1} \int_0^T (\Delta\psi(l,t))^2 dt + \\ + \frac{l^2}{\mu+1} \iint_Q (\Delta\psi_x(x,t))^2 x^\mu dx dt. \tag{24}$$

Из оценок (13), (22)—(24) вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Функция $I'(p)$ удовлетворяет условию Липшица $\|I'(p+\Delta p) - I'(p)\| \leqslant L\|\Delta p\|$, где $L = \sqrt{2c_2/\varepsilon}\, \|v\|_{0,\mu} + 2\lambda$, $c_2 = \max(2l/(\nu(\mu+1)),\ l^2/(\mu+1))$.*

Легко видеть, что функционал $I(p)$ является выпуклым на H. Если $\lambda > 0$, то $I(p)$ является сильно выпуклым, причем константа сильной выпуклости этого функционала равна λ. В этом случае множество P_* содержит только одну точку $p_* = p_*(t)$, которая является оптимальным управлением в рассматриваемой задаче. Если $\lambda = 0$, то множество P_* может содержать более одной точки.

Для приближенного решения задачи минимизации функционала (7) могут быть использованы методы проекции градиента и условного градиента [6].

Метод проекции градиента для рассматриваемой задачи сводится к построению минимизирующей последовательности по правилу

$$p_{k+1}(t) = \begin{cases} \tilde{p}_k(t), & \text{если } p_{\min} \leqslant \tilde{p}_k(t) \leqslant p_{\max}, \\ p_{\min}, & \text{если } \tilde{p}_k(t) < p_{\min}, \\ p_{\max}, & \text{если } \tilde{p}_k(t) > p_{\max}, \end{cases} \tag{25}$$

где

$$\tilde{p}_k(t) = p_k(t) - \alpha_k \left[2\lambda p_k(t) + \int_0^l \psi(x, t; p_k) v(x) x^\mu dx \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

α_k — параметры метода, $p_0(t) \in P$ — заданная функция.

Из теоремы 5 [6, § 4, гл. 1] и теорем 1, 2 настоящей работы вытекает, что если $\lambda > 0$ и $\alpha_k = \alpha$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где α — произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < \alpha < 4\lambda / L^2$, то при любом начальном приближении $p_0(t)$ последовательность $\{p_k(t)\}$, определяемая по формуле (25), сходится к оптимальному управлению $p_*(t)$ по норме H, причем справедлива оценка $\|p_k - p_*\| \leqslant \rho^k \|p_0 - p_*\|$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где $\rho = \rho(\alpha) = (1 - 4\lambda\alpha + \alpha^2 L^2)^{1/2}$.

Если $\lambda = 0$, то можно утверждать только, что последовательность $\{p_k(t)\}$ минимизирует функционал $I(p)$ на множестве P и слабо в H сходится к множеству P_*, причем справедлива оценка $0 \leqslant I(p_k) - I_* \leqslant c/k$, $k = 1, 2, \dots$, где $c = \text{const} > 0$. В этом случае параметры α_k можно выбирать из условий $0 < \theta_0 \leqslant \alpha_k \leqslant 2/(L + 2\theta_1)$, где θ_0 и $\theta_1 > 0$ — заданные числа.

В заключение заметим, что рассмотренный метод исследования градиента минимизируемого функционала может быть использован и в других задачах оптимального управления процессами, описываемыми сингулярными уравнениями параболического типа.

Литература

1. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М., 1978.
2. Дугин Н. С. Оптимизация управлений нелинейными тепловыми объектами с внутренним тепловыделением: Дис. ... канд. техн. наук. Фрунзе, 1975.
3. Павлов Н. А., Слухоцкий А. Е. // Изв. вузов. Энергетика. 1965. № 6. С. 17—22.
4. Слухоцкий А. Е., Павлов Н. А. // Тр. ВНИИТВЧ. 1966. Вып. 7. С. 7—29.
5. Киприянов И. А. // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1967. Т. 89. С. 130—213.
6. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М., 1981.
7. Куликов А. А. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 2. С. 284—289.
8. Куликов А. А. Фундаментальные решения и гипоэллиптичность дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 1983.
9. Киприянов И. А., Куликов А. А. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1387—1395.
10. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1983.
11. Будак Б. М., Васильев Ф. П. Приближенные методы решения задач оптимального управления. М., 1969. Вып. 2.
12. Катрахов В. В., Рыжков А. В. // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1981. С. 91—95.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 5 ноября 1993 г.