Д. В. Руцкий, Весовая BMO-регулярность слабого типа, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2021, том 503, 97–112

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 503, 2021 г.

Д. В. Руцкий

ВЕСОВАЯ BMO-РЕГУЛЯРНОСТЬ СЛАБОГО ТИПА

Недавно было установлено (см. [7,15]), что K-замкнутость пар пространств типа Харди на окружности характеризуется некоторым более слабым свойством, чем обычная BMO-регулярность, так называемой BMO-регулярностью слабого типа. В настоящей заметке рассматривается вопрос о поведении этого свойства в некоторых парах, образованных добавлением весов к исходным парам. Для широкого класса пар решёток показывается, что так же, как в и случае обычной BMO-регулярности, для сохранения этого свойства необходимо, чтобы логарифм отношения этих весов лежал в BMO. Устанавливается, что пара $\left(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_{p,q(\cdot)}\left(w^{-1/p}\right)\right)$ с кусочно-постоянным параметром $q(\cdot)$ обладает BMO-регулярностью слабого типа при всех весах Макенхаупта $w \in \mathrm{A}_p$. Использующаяся при этом техника BMO-регулярных вложений также позволяет избавиться от условия дискретности пространства дополнительной переменной в результате о достаточности этого свойства для K-замкнутости банаховых пространств типа Харди.

§1. BMO-регулярность слабого типа и веса

Поскольку результаты данной заметки имеют довольно технический характер, мы ограничимся минимумом подробностей, отсылая заинтересованного читателя к обзору [4] и к [15].

Рассматриваются измеримые функции на измеримом пространстве $S \times \Omega$, где S – пространство однородного типа, такое как окружность $\mathbb{T}$, или евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, а (Ω, μ) – это некторое σ-конечное измеримое пространство, играющее роль области для дополнительной переменной. Квазинормированной решёткой измеримых функций на $S \times \Omega$ называется квазинормированное пространство X, единичный шар которого обладает свойством идеала: из условий $|f| \leqslant g$ и $g \in X$, вытекает, что $f \in X$ и $\|f\|_X \leqslant \|g\|_X$. Весами w мы называем

Ключевые слова: пространства типа Харди, вещественная интерполяция, K-замкнутость, BMO-регулярность, пространства Лоренца.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 18-11-00053, `https://rscf.ru/project/18-11-00053/`.

почти всюду положительные измеримые функции, а для квазинормированных решёток измеримых функций X весовые пространства определяются формулой $X(w) = \{g \mid gw^{-1} \in X\}$ с квазинормой $\|g\|_{X(w)} = \|gw^{-1}\|_X$. Для квазинормированных решёток измеримых функций X и Y их поточечное произведение $XY = \{fg \mid f \in X, g \in Y\}$ снабжается квазинормой $\|h\|_{XY} = \inf_{h=fg} \|f\|_X \|g\|_Y$. Степень решётки определяется как $X^\delta = \{g \mid |g|^{1/\delta} \in X\}$ с квазинормой $\|g\|_{X^\delta} = \||g|^{1/\delta}\|_X^\delta$. Для нормированных решёток измеримых функций X порядково сопряжённая решётка определяется так: $X' = \{g \mid \sup_{f \in B_X} \int |fg| < \infty\}$ с соответствующей нормой $\|g\|_{X'} = \sup_{f \in B_X} \int |fg|$, где через B_X обозначен замкнутый единичный шар пространства X. Для решёток X часто предполагается выполненным свойство Фату, которое означает, что множество B_X замкнуто относительно сходимости по мере на множествах конечной меры, и для нормированных решёток эквивалентно их порядковой рефлексивности $X'' = X$. Иногда нам также нужна порядковая непрерывность нормы X, которая для решёток со свойством Фату эквивалентна условию $X' = X^*$.

Определение 1. Квазинормированная решётка X измеримых функций на измеримом пространстве $S \times \Omega$ называется BMO-регулярной с константами (C, m), если для всякой ненулевой функции $f \in X$ найдётся некоторая мажоранта $u \geqslant |f|$ такая, что $\|u\|_X \leqslant m\|f\|_X$ и $\|\log u(\cdot, \omega)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

Определение 2. Пара (X, Y) квазинормированных решёток измеримых функций на измеримом пространстве $S \times \Omega$ называется BMO-регулярной с константами (C, m), если для всех ненулевых функций $f \in X$ и $g \in Y$ найдутся некоторые мажоранты $u \geqslant |f|$ и $v \geqslant |g|$, такие, что $\|u\|_X \leqslant m\|f\|_X$, $\|v\|_Y \leqslant m\|g\|_Y$ и $\|\log [u(\cdot, \omega)/v(\cdot, \omega)]\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$ при почти всех $\omega \in \Omega$.

Определение 3. Предположим, что (X, Y) – пара квазибанаховых решёток измеримых функций на измеримом пространстве $S \times \Omega$, причём решётка X r-выпукла при некотором значении $r > 0$. Мы говорим, что (X, Y) обладает BMO-регулярностью слабого типа, если решётка $(\mathrm{L}_1, (X^r)'Y^r)_{\theta,p}$ является BMO-регулярной при некоторых значениях $0 < \theta < 1$ и $0 < p \leqslant \infty$.

Известно, что на окружности в широком классе пар решёток (X, Y) K-замкнутость пары соответствующих пространств типа Харди (см. §4 ниже) эквивалентна её BMO-регулярности слабого типа, что мотивирует изучение этого свойства. Также оно интересно тем, что оно некоторым образом связано со слабым типом и ограниченностью в вещественных интерполяционных пространствах максимального оператора Харди-Литлвуда и операторов Кальдерона-Зигмунда (см. [15, предложение 9]). BMO-регулярность пары (X, Y) влечёт её BMO-регулярность слабого типа, однако обратное, вообще говоря, неверно. По сравнению с обычной BMO-регулярностью, BMO-регулярность слабого типа выглядит значительно сложнее, и характеризация этого свойства для многих конкретных пар пространств представляет значительные трудности. Можно, однако, надеяться, что подходящие инструменты со временем сделают эти сложности преодолимыми, и в результате для BMO-регулярности слабого типа получится достаточно полная теория.

Характерным примером сложности свойства BMO-регулярности слабого типа по сравнению с обычной является его поведение при переходе от исходной пары к весовой. Легко проверить, что если пара (X, Y) BMO-регулярна и $\log[u(\cdot, \omega)/v(\cdot, \omega)] \in \mathrm{BMO}$ равномерно по почти всем $\omega \in S$, то пара $(X(u), Y(v))$ также BMO-регулярна. Для решёток со свойством Фату верно и обратное: если пары (X, Y) и $(X(u), Y(v))$ одновременно BMO-регулярны, то $\log[u(\cdot, \omega)/v(\cdot, \omega)] \in$ BMO равномерно по почти всем $\omega \in S$. Для проверки этого обращения, однако, уже нужны довольно естественные по существу, но при этом технически весьма нетривиальные результаты о самодвойственности и делимости свойства BMO-регулярности. В случае BMO-регулярности слабого типа с дополнительной переменной, вообще говоря, введение даже постоянных по первой переменной весов не сохраняет это свойство, как показывают цитируемые в следующем абзаце результаты. Однако в случае без дополнительной переменной пока неясно, можно ли общую пару умножить на хоть какие-нибудь веса с отношением, не эквивалетным константе, так, чтобы при этом сохранилось свойство BMO-регулярности слабого типа.

Так или иначе, желательно как-то охарактеризовать случаи, когда эквивалетность BMO-регулярности и BMO-регулярности слабого типа всё же имеет место. На окружности $S = \mathbb{T}$, с учётом упомянутой эквивалентности K-замкнутости пространств типа Харди и BMO-регулярности слабого типа, для пар вида (X, L_∞) подобная характеризация впервые была найдена в работе [9] в следующем виде: при некоторых ограничениях пара (X, L_∞) BMO-регулярна тогда и только тогда, когда пара $(X(l^r), \mathrm{L}_\infty(l^\infty_\lambda))$ обладает BMO-регулярностью слабого типа. Здесь $1 \leqslant r < \infty$, $\lambda > 1$, и l^∞_λ обозначает пространство последовательностей $\{a_j\}$ со степенным весом $\{a_j \mid |a_j| \leqslant C\lambda^j\}$. Таким образом, для конкретной пары достаточно общего вида эквивалентность имеет место в том и только в том случае, если свойство BMO-регулярности слабого типа устойчиво относительно перехода к некоторым векторнозначным парам. В частности, это впервые позволило установить самодвойственность свойства BMO-регулярности без ограничений выпуклости и вогнутости. В работах [5,10] и [11] эти результаты обобщались на более широкий класс пар решёток и условий. При некоторых достаточно общих предположениях эквивалентность имеет место для BMO-регулярности слабого типа пары $(X(l^\infty), \mathrm{L}_\infty(l^\infty_\lambda))$, или пары $(X(l^p), Y(l^q))$ без степенного веса, если только $p \neq q$. При этом легко показать, что BMO-регулярность слабого типа пары (X, Y) всегда влечёт BMO-регулярность слабого типа всех пар $(X(l^p), Y(l^p))$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Отметим, что подобные результаты, по-видимому, можно получить и в самом общем случае, однако для этого естественно использовать некоторую технику, связанную с комплексными интерполяционными пространствами, которая будет изложена в других работах.

Векторнозначные результаты часто бывают тесно связаны с весовыми результатами. В работе [11] с помощью аналитического разложения единицы показывалось, что K-замкнутость пространств типа Харди для пары $(X(l^\infty_\lambda), \mathrm{L}_\infty(l^\infty))$ (что эквивалентно BMO-регулярности решётки X) влечёт K-замкнутость пары $(X(w), \mathrm{L}_\infty)$ с произвольным весом $\log w \in \mathrm{BMO}$. В связи с этим естественно поставить вопрос о справедливости обратного утверждения: если какая-то пара $(X(w), Y)$ обладает BMO-регулярностью слабого типа для всех весов w, таких, что $\|\log w\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \varepsilon$ при каком-то значении $\varepsilon > 0$, будет ли пара (X, Y) BMO-регулярной?

Оказывается, эта гипотеза неверна уже в случае приводившихся в [7] примеров пространств Лоренца $\mathrm{L}_{p,q(\cdot)}$ с кусочно-постоянным параметром $q(\cdot)$, пары которых с L_1 обладают BMO-регулярностью слабого типа, однако не являются BMO-регулярными, если параметр q отличен от константы. В §2 мы покажем, что для весов Макенхаупта $w \in \mathrm{A}_p$ максимальный оператор Харди-Литлвуда имеет слабый тип в решётках $\left[\mathrm{L}_{p,q(\cdot)}\left(w^{-1/p}\right)\right]'$, поскольку в них равномерно ограничено семейство операторов усреднения по системам непересекающихся отрезков. Даже без весов этот пример интересен тем, что он показывает, что равномерная ограниченность подобного семейства, которая характеризует ограниченность максимального оператора в пространствах Лебега $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$ с переменным показателем, и с помощью которой устанавливается двойственность для этой ограниченности (см. [3, теорема 5.7.2]), для общих решёток не даёт даже ВМО-регулярности. Отметим, что было бы интересно исследовать более общие условия на веса и показатели.

С другой стороны, в §3 мы покажем, что при условии банаховости решётки $(X^r)'Y^r$, если пары (X,Y) и $(X(u),Y(v))$ одновременно обладают ВМО-регулярностью слабого типа, то так же, как и в случае обычной ВМО-регулярности, из этого следует, что $\log(u/v) \in \mathrm{BMO}$. Таким образом, хотя в отличие от обычной ВМО-регулярности пока и неясно, какие именно весовые возмущения ВМО-регулярных пар слабого типа сохраняют это свойство, в конкретных парах, по крайней мере в основных случаях, они не выходят из класса возмущений, сохраняющих обычную ВМО-регулярность. Осталось невыясненным, в какой мере можно избавиться от условия банаховости решётки $(X^r)'Y^r$ в этом результате. По-видимому, важным техническим нововведением в доказательстве этого утверждения является рассмотрение ВМО-регулярных включений, переход к которым позволяет определённым образом выносить решётки-сомножители из вещественных интерполяционных пространств. Этим методом также удаётся усилить результат о достаточности ВМО-регулярности слабого типа для K-замкнутости пространств типа Харди в самом общем случае (см. §4).

§2. Весовые пространства Лоренца с кусочно-постоянным параметром

Предположим, что задана функция $1 \leqslant q(\cdot) \leqslant \infty$ на окружности, которая постоянна на дугах $J_j = \{e^{i\theta} \mid \theta_j < \theta < \theta_{j+1}\}$ для конечного набора углов $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n$, $\theta_{n+1} = 2\pi + \theta_1$. Можно определить пространство Лоренца $\mathrm{L}_{p,q(\cdot)}$ просто как (прямую) сумму обычных пространств Лоренца с эквивалентной квазинормой

$$\|f\|_{p,q} = \left(\int\limits_0^{2\pi} \left[t^{1/p} \cdot (t \mapsto |f(e^{it})|)^*(t) \right]^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q}$$

на соответствующих интервалах, где звёздочка обозначает невозрастающую перестановку измеримой функции. Для всех наборов $\mathcal{S}$ непересекающихся дуг на окружности определён соответствующий оператор усреднения $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} f = \sum\limits_{Q \in \mathcal{S}} \Bigl(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q f \Bigr) \chi_Q$, $f \in \mathrm{L}_1$.

Предложение 4. *Предположим, что* $1 < p < \infty$ *и* $w \in \mathrm{A}_p$. *Тогда семейство операторов* $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ *равномерно ограничено в решётке* $X = \mathrm{L}_{p,q(\cdot)}\left(w^{-1/p}\right)$. *В частности, пара* (L_1, X) *обладает* BMO*-регулярностью слабого типа.*

Действительно, всякое семейство $\mathcal{S}$ можно разбить на подсемейство $\mathcal{S}_0$ тех дуг, которые целиком лежат внутри J_j при некоторых j, и $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0$, причём $|\mathcal{S}_1| \leqslant n$. Тогда $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} = \mathcal{A}_{\mathcal{S}_0} + \mathcal{A}_{\mathcal{S}_1}$. Норма оператора $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_0}$ в X оценивается через норму максимальной функции в $\mathrm{L}_{p,q}$, которая зависит лишь от p. Оценка оператора $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_1}$ сводится к оценке усреднений по отдельным интервалам $\Bigl(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q f \Bigr) \chi_Q$ в X. В свою очередь, она вытекает из следующего утверждения.

Лемма 5. $\left\| \Bigl(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q g \Bigr) \chi_Q \right\|_{\mathrm{L}_{p,1}\left(w^{-1/p}\right)} \leqslant C \, \|g \chi_Q\|_{\mathrm{L}_{p,\infty}\left(w^{-1/p}\right)}$ *с некоторой константой* C, *не зависящей от* Q.

В самом деле, вес w удовлетворяет обратному неравенству Гёльдера с некоторым показателем $r > 1$. Пусть $s = pr$. Тогда

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q f \right) \chi_Q \right\|_{\mathrm{L}_{p,1}\left(w^{-1/p}\right)} &= \int\limits_0^{|Q|} t^{1/p-1} \left[t \mapsto w(e^{it}) \right]^{*1/p} \mathrm{d}t \cdot \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f| \\
&\leqslant \left(\int\limits_0^{|Q|} t^{(1/p-1)s'} \, \mathrm{d}t \right)^{1/s'} \left(\int\limits_Q w^{s/p} \right)^{1/s} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f| \right) \\
&\leqslant (1/s' - 1/p')^{-1} |Q|^{1/s' - 1/p'} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w^{s/p} \right)^{1/s} |Q|^{1/s} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f| \right)
\end{aligned}$$

$$\leqslant c|Q|^{1/p}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q w\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f|\right)\leqslant c_1\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f|^p w\right)^{1/p}$$

с подходящими константами c и c_1. В последнем неравенстве мы воспользовались эквивалентной формулировкой [8, глава 5, §1.4] условия Макенхаупта A_p. Таким образом,

$$\left\|\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q f\right)\chi_Q\right\|_{\mathrm{L}_{p,1}\left(w^{-1/p}\right)}\leqslant c_1\left\|f\chi_Q\right\|_{\mathrm{L}_p\left(w^{-1/p}\right)}.$$

По двойственности точно так же получается оценка

$$\left\|\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q g\right)\chi_Q\right\|_{\mathrm{L}_p\left(w^{-1/p}\right)}\leqslant c_1\left\|g\chi_Q\right\|_{\mathrm{L}_{p,\infty}\left(w^{-1/p}\right)},$$

которая в сочетании с предыдущей при $f=\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q g\right)\chi_Q$ даёт требуемое неравенство.

Из равномерной ограниченности семейства операторов $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ в решётке X (а значит, и в X', поскольку $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*=\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$) стандартным образом (см., например, [3, теорема 4.4.10]) следует слабый тип $M\colon X'\to X'_\infty$ максимального оператора Харди–Литлвуда, где решётка X'_∞ определяется нормой $\|h\|_{X'_\infty}=\sup_{t>0}\|t\chi_{\{|h|>t\}}\|_{X'}$. По [15, предложение 11] пара (L_1,X) обладает BMO-регулярностью слабого типа.

§3. Весовые возмущения BMO-регулярности слабого типа

Теорема 6. *Пусть (X,Y) – пара r-выпуклых при некотором значении $r>0$ квазибанаховых решёток измеримых функций на $S\times\Omega$ со свойством Фату, таких что решётка $(X^r)'Y^r$ банахова. Если пары (X,Y) и $(X(u),Y(v))$ одновременно обладают* BMO*-регулярностью слабого типа для каких-то весов u и v, то $\log(u/v)(\cdot,\omega)\in\mathrm{BMO}$ равномерно по почти всем $\omega\in\Omega$.*

Для доказательства нам понадобится следующее понятие и ряд вспомогательных утверждений. Мы будем часто пользоваться естественными и простыми свойствами вычислений с решётками измеримых функций и вещественными интерполяционными пространствами без каких-либо комментариев. Особо следует отметить формулу

$$(X,Y)^{\delta}_{\theta,p} = \left(X^{\delta}, Y^{\delta}\right)_{\theta,p/\delta}, \quad 0<\theta<1, \quad \delta>0, \quad 0<p\leqslant\infty$$

(см., например, [13, предложение 14]).

Определение 7. Вложение $X_0 \subset X_1$ квазинормированных решёток измеримых функций на измеримом пространстве $S\times\Omega$ называется BMO-регулярным с константами (C,m), если для всякой ненулевой функции $f\in X_0$ найдётся некоторая мажоранта $u\in X_1$, $u\geqslant |f|$, такая, что $\|u\|_{X_1}\leqslant m\|f\|_{X_0}$ и $\|\log u(\cdot,\omega)\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant C$ для почти всех $\omega\in\Omega$.

Сведением к A_p-регулярности стандартным образом проверяется следующее утверждение (см. [13, предложение 4 в исправлении]). В настоящей работе используется ряд подобных обобщений утверждений про решётки и пары решёток на соответствующие вложения. Мы приводим их без доказательств, поскольку они получаются вполне элементарной и очень рутинной модификацией доказательств исходных утверждений: нужно лишь поставить индексы 1 и 0 на решётках в левой и правой частях в соответствующих оценках.

Предложение 8. *Если квазинормированные решётки X_0, X_1, Y_0 и Y_1 измеримых функций на $S\times\Omega$ таковы, что вложения $X_0\subset X_1$ и $Y_0\subset Y_1$ BMO-регулярны, то вложение $(X_0,Y_0)_{\eta,q}\subset(X_1,Y_1)_{\eta,q}$ также BMO-регулярно при всех $0<\theta<1$ и $0<q\leqslant\infty$.*

Также естественно обобщается на случай вложений результат о делимости BMO-регулярности (см. [14, теорема 16]), использующий рассуждение на основе теоремы о неподвижной точке.

Предложение 9. *Пусть X_0, X_1 и Y – квазибанаховы решётки измеримых функций на измеримом пространстве $S\times\Omega$, обладающие свойством Фату и r-выпуклые при некотором значении $r>0$. Если вложение $X_0Y\subset X_1Y$ и решётка Y BMO-регулярны, то вложение $X_0\subset X_1$ также BMO-регулярно.*

Предложение 10. *Допустим, что X, Y и Z – банаховы решётки измеримых функций на некотором измеримом пространстве со свойством Фату, причём X, X', Y и Y' обладают порядково непрерывной нормой. Тогда имеют место вложения*

$$(X,Y)^{1/2}_{\theta,1}Z^{1/2}\subset\left(X^{1/2}Z^{1/2},Y^{1/2}Z^{1/2}\right)_{\theta,2}\subset(X,Y)^{1/2}_{\theta,\infty}Z^{1/2}, \quad 0<\theta<1$$

Действительно, первое вложение получается из общей формулы

$$(X,Y)_{\theta,q}Z \subset (XZ,YZ)_{\theta,q},$$

которая легко проверяется для произвольных квазибанаховых решёток при любом значении q (нам достаточно $q=1$). Второе вложение получается из него же по двойственности с заменой всех решёток на их порядково сопряжённые. При этом используется то что произведение решётки с порядково непрерывной нормой на произвольную решётку также обладает порядково непрерывной нормой (см., например, [6, предложение 10]).

Отметим, не вдаваясь в подробности, что предложение 10 справедливо и без предположений о порядковой непрерывности, поскольку стандартные доказательства теоремы двойственности для вещественных интерполяционных пространств (см., например, [2, §3.7]) при наличии свойства Фату допускают обобщение на случай порядково сопряжённых пространств и без условия плотности пересечения по норме. Это следует из того что $(X+Y)'=X'\cap Y'$, откуда $(X\cap Y)' = (X''\cap Y'')' = (X'+Y')'' = X'+Y'$. Мы лишь хотим подчеркнуть, что во многих местах без особых затруднений можно обойтись и обычными результатами о двойственности вещественных интерполяционных пространств. Также необязательны условия порядковой непрерывности и в следующем утверждении.

Предложение 11 ([13, предложение 11]). *Пусть Z – банахова решётка измеримых функций, обладающая свойством Фату и такая, что решётки Z и Z' имеют порядково непрерывную норму. Тогда справедлива формула $(Z',Z)_{\frac{1}{2},2} = \mathrm{L}_2$.*

Лемма 12. *Пусть Z – BMO-регулярная банахова решётка измеримых функций на $S\times\Omega$ со свойством Фату, и предположим, что обе решётки Z и Z' обладают порядково непрерывной нормой. Если решётка $(\mathrm{L}_2(w),Z)_{\theta,2}$ BMO-регулярна при некотором $\theta<1/2$, то $\log w(\cdot,\omega)\in \mathrm{BMO}$ равномерно по почти всем $\omega\in\Omega$.*

Действительно, используя предложение 8 и формулу реитерации, можно считать, что условие леммы выполнено также и при некотором $1/2<\theta<1$. С учётом формулы Лозановского $L_1 = Z'Z$, по предложению 10 имеем вложения

$$\big(Z'(w^2),Z\big)^{1/2}_{\theta,1}Z^{1/2} \subset (\mathrm{L}_2(w),Z)_{\theta,2} \subset \big(Z'(w^2),Z\big)^{1/2}_{\theta,\infty}Z^{1/2}.$$

Среднее пространство BMO-регулярно по условию, откуда следует, что BMO-регулярно и вложение крайних пространств. Применив к нему предложение 9, получаем BMO-регулярность вложения

$$\big(Z'(w^2), Z\big)_{\theta,1} \subset \big(Z'(w^2), Z\big)_{\theta,\infty}.$$

Далее, применяя к этим вложениям предложение 8 при некоторых $\theta_0 < 1/2 < \theta_1$ и теорему реитерации с таким параметром η, что $1/2 = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1$, получаем BMO-регулярность вложения

$$\big(Z'(w^2), Z\big)_{1/2,2} \subset \big(Z'(w^2), Z\big)_{1/2,2},$$

то есть решётки

$$\big(Z'(w^2), Z\big)_{1/2,2} = \big([Z(w^{-1})]', Z(w^{-1})\big)_{1/2,2}(w) = \mathrm{L}_2(w) = \mathrm{L}_\infty(w)\mathrm{L}_2,$$

где мы воспользовались предложением 11. Отсюда по делимости BMO-регулярности получаем BMO-регулярность решётки $\mathrm{L}_\infty(w)$, что даёт заключение леммы 12.

Далее нам понадобится следующий результат о реитерации для трёх решёток, который, по существу, утверждает следующее: если расположить три пространства в вершинах треугольника, выбрать точку внутри этого треугольника, провести через неё прямую, параллельную одной из сторон, и задать соответствующее этой точке вещественное интерполяционное пространство как интерполяционное пространство на проведённой прямой от соответствующих пространств на пересекаемых ею сторонах треугольника, то результат не зависит от того, какую из трёх возможных прямых мы выбрали в этой конструкции. Отметим, что условие параллельности несущественно, однако прямая не может пересекать вершины треугольника. По поводу определения пространств Спарра $(X_0, X_1, X_2)_{(\theta_0,\theta_1,\theta_2),q}$ см. ту же статью [1], на которую мы ссылаемся чуть ниже. Про них нам достаточно знать лишь то, что перестановки пространств X_j и соответствующие им перестановки параметров θ_j естественным образом оставляют неизменными эти пространства.

Предложение 13 ([1, §3, теорема B]). *Пусть X_0, X_1 и X_2 – банаховы решётки измеримых функций на некотором измеримом пространстве. Тогда*

$$((X_0, X_1)_{\theta,q}, (X_0, X_2)_{\theta,q})_{\mu,q} = (X_0, X_1, X_2)_{(1-\theta,\theta(1-\mu),\theta\mu),q} \tag{1}$$

при всех $0 < \theta, \mu < 1$ и $0 < q \leqslant \infty$.

Наконец, докажем теорему 6. Пусть $Z = [(X^r)'Y^r]^{1/2}$ и $w = (v/u)^{r/2}$. По условию решётки $(\mathrm{L}_1, Z^2)_{\theta,q}$ и $(\mathrm{L}_1, [Z(w)]^2)_{\theta,p}$ BMO-регулярны при некоторых θ и p. Используя [7, предложение 3.5], можно заменить параметр r на достаточно малый, и считать, что и рассматриваемая BMO-регулярность имеет место при $p=1$ и некотором $3/4<\theta<1$. Если параметр r меньше индекса выпуклости решётки X, то банахова решётка Z обладает порядково непрерывной нормой. Таким образом, решётки $(\mathrm{L}_2, Z)_{\theta,2}$ и $(\mathrm{L}_2, Z(w))_{\theta,2}$ BMO-регулярны. Также BMO-регулярной будет решётка

$$(\mathrm{L}_2, Z)'_{\theta,2} = (\mathrm{L}_2, Z)^*_{\theta,2} = (\mathrm{L}_2, Z^*)_{\theta,2} = (\mathrm{L}_2, Z')_{\theta,2}.$$

Применим предложение 13 к тройке $(L_2, Z', Z(w))$ с параметрами (θ, μ) и к переставленной тройке $(Z', L_2, Z(w))$ с параметрами $(1/2, \alpha)$. Для того чтобы в правой части (1) получилось одно и то же пространство, необходимы и достаточны условия $\alpha = 2\theta\mu$ и $1/2 = \theta(1-\mu)$, откуда имеем $\mu = 1 - 1/(2\theta)$ и $\alpha = 2\theta - 1 > 1/2$. С учётом предложения 11 получается равенство

$$\begin{aligned}\Big(\big(L_2, Z'\big)_{\theta,2}, \big(L_2, Z(w)\big)_{\theta,2}\Big)_{\mu,2} &= \Big(\big(Z', L_2\big)_{1/2,2}, \big(Z', Z(w)\big)_{1/2,2}\Big)_{\alpha,2} \\ &= \Big(\big(Z', L_2\big)_{1/2,2}, \big(\big[Z\big(w^{1/2}\big)\big]', Z\big(w^{1/2}\big)\big)_{1/2,2}\big(w^{1/2}\big)\Big)_{\alpha,2} \\ &= \Big(\big(Z', L_2\big)_{1/2,2}, \mathrm{L}_2\big(w^{1/2}\big)\Big)_{\alpha,2},\end{aligned}$$

левая часть которого BMO-регулярна предложению 8. Остаётся применить лемму 12, в которой в качестве решётки Z нужно взять $(Z', L_2)_{1/2,2}$.

§4. K-замкнутость пространств типа Харди

Для решёток измеримых функций X на измеримом пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$ можно определить пространство типа Харди $X_A = X \cap \mathrm{N}^+$, где через N^+ обозначен граничный класс Смирнова по первой переменной. При наличии следующего условия эти пространства замкнуты относительно сходимости по мере на множествах конечной меры в решётках со свойством Фату.

Определение 14. Пусть X является квазинормированной решёткой измеримых функций на $\mathbb{T}\times\Omega$. Решётка X удовлетворяет свойству $(*)$ с константой C, если для всякого $f \in X$, $f \neq 0$ найдётся мажоранта $g \geqslant |f|$, такая, что $\|g\|_X \leqslant C\|f\|_X$ и $\log g(\cdot, \omega) \in \mathrm{L}_1$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

Определение 15. Пара квазинормированных решёток измеримых функций (X, Y) на $\mathbb{T} \times \Omega$ называется АК-устойчивой с постоянной C, если пара (X_A, Y_A) K-замкнута в паре (X, Y) с постоянной C, т. е. для любых $H \in X_A + Y_A$ и $f \in X$, $g \in Y$ таких, что $H = f + g$, найдутся некоторые $F \in X_A$ и $G \in Y_A$, такие, что $H = F + G$, $\|F\|_X \leqslant C\|f\|_X$ и $\|G\|_Y \leqslant C\|g\|_Y$.

В работе [7] связь между свойствами АК-устойчивости и BMO-регулярности слабого типа устанавливалась в довольно общей ситуации. В частности, для пар банаховых решёток со свойством Фату эквивалентность между этими свойствами доказана в предположении дискретности пространства Ω. Необходимость BMO-регулярности слабого типа без предположения дискретности в [7, следствие 5.8] удалось получить для пар банаховых решёток со свойством Фату при наличии дополнительного нетривиального условия выпуклости или вогнутости на одну из решёток, а достаточность – лишь в предположении банаховости решётки $(X^r)'Y^r$ (см. [7, предложение 5.3]), причём технически это наиболее простой результат из имеющихся о достаточности ограниченной BMO-регулярности для АК-устойчивости. Однако в естественной общности имеющиеся результаты пока ещё выглядят неполными.

Эквивалентность BMO-регулярности слабого типа и более сильного свойства ограниченной АК-устойчивости была показана в [7, предложение 11.1], однако достаточность в этом результате получается лишь в предположении дискретности пространства Ω из-за того, что ограниченная АК-устойчивость распространяется с более узкой пары с помощью некоторого рассуждения на основе теоремы о неподвижной точке, которое не получилось провести в общем случае. Возникающая в подобных рассуждениях трудность связана с тем, что неясно, в каком виде шары пространств типа Харди X_A могут быть компактными относительно поточечной сходимости в круге, если вторая переменная недискретна. Мы покажем, что в общей ситуации обычную АК-устойчивость можно вывести из BMO-регулярности слабого типа, используя, по существу, примерно такое же распространение с части шкалы, как и в [7, предложение 11.1], но не для АК-устойчивости, а ещё на этапе манипуляций с BMO-регулярностью в форме делимости вложений, которая работает для общих пространств с дополнительной переменной, обходя вышеупомянутую трудность.

Теорема 16. *Предположим, что (X, Y) – пара r-выпуклых при некотором $r > 0$ квазинормированных решёток измеримых функций на*

$\mathbb{T} \times \Omega$ со свойством Фату и свойством $(*)$, обладающая BMO*-регулярностью слабого типа. Тогда пара (X, Y)* АК*-устойчива.*

Многие свойства АК-устойчивости и ВМО-регулярности пар пространств также естественным образом обобщаются на вложения.

Определение 17. Вложение пар $(X_0, Y_0) \subset (X_1, Y_1)$ квазинормированных решёток измеримых функций на измеримом пространстве $S \times \Omega$ называется ВМО-регулярным с константами (C, m), если для всех ненулевых функций $f \in X_0$ и $g \in Y_0$ найдутся некоторые мажоранты $u \geqslant |f|$ и $v \geqslant |g|$, такие, что $\|u\|_{X_1} \leqslant m\|f\|_{X_0}$, $\|v\|_{Y_1} \leqslant m\|g\|_{Y_0}$ и $\|\log [u(\cdot, \omega)/v(\cdot, \omega)]\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$ при почти всех $\omega \in \Omega$.

Определение 18. Вложение пар $(X_0, Y_0) \subset (X_1, Y_1)$ квазинормированных решёток измеримых функций на измеримом пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$ называется АК-устойчивым с константой C, если для любых $H \in (X_0)_A + (Y_0)_A$ и $f \in X_0$, $g \in Y_0$ таких, что $H = f + g$, найдутся некоторые $F \in (X_1)_A$ и $G \in (Y_1)_A$, такие, что $H = F + G$, $\|F\|_{X_1} \leqslant C\|f\|_{X_0}$ и $\|G\|_{Y_1} \leqslant C\|g\|_{Y_0}$.

Следующее утверждение проверяется так же, как и результат о достаточности ВМО-регулярности пар решёток для их АК-устойчивости (см. [4, теорема 3.3]).

Предложение 19. *Пусть $(X_0, Y_0) \subset (X_1, Y_1)$ –* BMO*-регулярное вложение квазинормированных решёток измеримых функций на $\mathbb{T} \times \Omega$, причём решётки X_1 и Y_1 обладают свойством $(*)$. Тогда это вложение также* АК*-устойчиво.*

Делимость для ВМО-регулярных вложений можно проверить тем же способом, как и для ВМО-регулярности пар решёток (см. [12, предложение 25]; технические детали этого рассуждения, основанного на теореме о неподвижной точке, можно несколько улучшить так же, как это было проделано для ВМО-регулярности одной решётки в работе [14]). Мы воспользуемся им в чуть более простом случае $E = F$.

Предложение 20. *Пусть X_0, Y_0, X_1, Y_1, E, F – решётки измеримых функций на $S \times \Omega$, r-выпуклые при некотором $r > 0$ и обладающие свойством Фату, причём пара (E, F)* BMO*-регулярна. Если вложение $(X_0E, Y_0F) \subset (X_1E, Y_1F)$* BMO*-регулярно, то вложение $(X_0, Y_0) \subset (X_1, Y_1)$ также* BMO*-регулярно.*

Так же, как и в случае K-замкнутости пар подпространств, из формулы Хольмстедта сразу вытекает следующее утверждение (см., например, [4, лемма 1.1]).

Предложение 21. *Предположим, что* АК-*устойчиво вложение пар* $(X_0, Y_0) \subset (X_1, Y_1)$ *квазинормированных решёток измеримых функций на измеримом пространстве* $\mathbb{T}\times\Omega$. *Тогда вложение* $(X_0, (X_0, Y_0)_{\theta,p}) \subset (X_1, (X_1, Y_1)_{\theta,p})$ *также* АК-*устойчиво при всех* $0<\theta<1$ *и* $0<p\leqslant\infty$.

Теперь всё готово для доказательства теоремы 16. По условию решётка $Z = (\mathrm{L}_1, (X^r)'Y^r)_{\theta,p} = ((X^r)'X^r, (X^r)'Y^r)_{\theta,p}$ BMO-регулярна, причём по [7, предложение 3.5], переходя к меньшим значениям r, можно считать, что $p = 1$ и $\theta > 1/2$. Отсюда следует, что имеющееся по предложению 10 (в варианте без условий порядковой непрерывности, которое в этом рассуждении уже сложно обеспечить) вложение

$$(X^r)'^{1/2}\,(X^r, Y^r)\,^{1/2}_{\theta,1} \subset Z^{1/2} \subset (X^r)'^{1/2}\,(X^r, Y^r)\,^{1/2}_{\theta,\infty}$$

BMO-регулярно. Из этого вложения, возведённого в степень 2, и из BMO-регулярности решётки $\mathrm{L}_1 = (X^r)'(X^r)$ следует, что BMO-регулярно вложение пар

$$\Big((X^r)'(X^r), (X^r)'\,(X^r, Y^r)_{\theta,1}\Big) \subset \Big((X^r)'(X^r), (X^r)'\,(X^r, Y^r)_{\theta,\infty}\Big).$$

Применяя к нему предложение 20 (при $E = F = (X^r)'$), получаем, что BMO-регулярно вложение

$$\Big(X^r, (X^r, Y^r)_{\theta,1}\Big) \subset \Big(X^r, (X^r, Y^r)_{\theta,\infty}\Big).$$

Его можно возвести в степень $1/r$, что даёт BMO-регулярность вложения

$$\Big(X, (X, Y)_{\theta,r}\Big) \subset \Big(X, (X, Y)_{\theta,\infty}\Big),$$

а значит, и его АК-устойчивость по предложению 19. Применяя предложение 21 и теорему реитерации, получаем АК-устойчивость пары

$$\Big(X, (X, Y)_{\alpha,p}\Big)$$

при всех $0 < \alpha < \theta$, а значит, и при некотором $1/2 < \alpha < 1$. Повторяя это рассуждение для пары (Y, X) вместо (X, Y) (которая также обладает BMO-регулярностью слабого типа по [7, предложение 3.7]), так же получаем АК-устойчивость пары

$$\Big((X, Y)_{\beta,p}\,, Y\Big)$$

при некотором $0 < \beta < 1/2$. Остаётся применить к этим двум парам теорему типа Вольфа о склейке шкал для K-замкнутости (см., например, [4, теорема 1.2]), чтобы получить заключение теоремы 16.

Список литературы

1. I. Asekritova and N. Krugliak, *On equivalence of K- and J-methods for* $(n+1)$*-tuples of Banach spaces.* — Studia Math. **122**, No. 2 (1997), 99–116.
2. J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag, 1976.
3. L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, and M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics*, vol. 2017. Springer-Verlag, Berlin (2011).
4. S. V. Kisliakov, *Interpolation of* H_p*-spaces: some recent developments.* — Israel Math. Conf. **13** (1999), 102–140.
5. S. V. Kislyakov, *On BMO-regular couples of lattices of measurable functions.* — Stud. Math. **159**, No. 2 (2003), 277–289.
6. D. V. Rutsky, *Corona problem with data in ideal spaces of sequences.* — Archiv der Mathematik **108**, No. 6 (2017), 609–619.
7. D. V. Rutsky, *Real Interpolation of Hardy-type Spaces and BMO-regularity.* — J. Fourier Anal. Appl. **26**, No. 4 (2020), 1–40.
8. E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, 1993.
9. С. В. Кисляков, *О BMO-регулярных решетках измеримых функций.* — Алгебра и анализ **14**, No. 2 (2002), 117–135.
10. С. В. Кисляков, *О BMO-регулярных решетках измеримых функций. II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **303**, No. 31 (2003), 161–168.
11. Д. В. Руцкий, *Замечания о BMO-регулярности и AK-устойчивости.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **376** (2010), 116–165.
12. Д. В. Руцкий, *BMO-регулярность в решетках измеримых функций на пространствах однородного типа.* — Алгебра и Анализ **23**, No. 2 (2011), 248–295.
13. Д. В. Руцкий, *О связи между AK-устойчивостью и BMO-регулярностью.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **416** (2013), 175–187.
14. Д. В. Руцкий, *Векторнозначная ограниченность операторов гармонического анализа.* — Алгебра и анализ **28**, No. 6 (2016), 91–117.
15. Д. В. Руцкий, *Вещественная интерполяция пространств типа Харди: анонс и некоторые замечания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **480** (2019), 170–190.

Rutsky D. V. Weighted weak-type BMO-regularity.

Stability for the weak-type BMO-regularity property of a couple (X, Y) under the perturbation $(X(u), Y(v))$ by some weights is considered. An example of weighted Lorentz spaces $\mathrm{L}_{p,q(\cdot)}$ with piecewise constant $q(\cdot)$ shows that in general such stability does not characterize the usual BMO-regularity. On the other hand, for couples of Banach lattices X and Y with the Fatou property such that $(X^r)'Y^r$ is also Banach with some $r > 0$, the simultaneous weak-type BMO-regularity of (X, Y) and $(X(u), Y(v))$ implies that $\log(u/v) \in \mathrm{BMO}$. For couples of r-convex lattices with the Fatou property we establish the sufficiency of the weak-type BMO-regularity for the K-closedness of the respective Hardy-type spaces without the assumption that the space of the second variable is discrete, generalizing earlier results.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: `rutsky@pdmi.ras.ru`

Поступило 23 октября 2021 г.