Н. А. Перязев, И. К. Шаранхаев, Критерии бесповторности булевых функций в предэлементарных базисах ранга 3,
Дискрет. матем., 2005, том 17, выпуск 2, 127–138

https://www.mathnet.ru/dm104

Дискретная математика

том 17 выпуск 2 * 2005

УДК 519.71

Критерии бесповторности булевых функций в предэлементарных базисах ранга 3

© 2005 г. Н. А. Перязев, И. К. Шаранхаев

Изучается формульное представление булевых функций. В терминах остаточных функций описаны классы бесповторных булевых функций в предэлементарных базисах

$$\{\vee, \cdot, -, 0, 1, x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\}, \qquad \{\vee, \cdot, -, 0, 1, x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3\},$$
$$\{\vee, \cdot, -, 0, 1, x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2\bar{x}_3\}.$$

1. Введение

На протяжении статьи под базисами понимаются конечные полные множества булевых функций, содержащие константы.

Булева функция f называется бесповторной в базисе B, если ее можно представить в этом базисе формулой, в которой каждая переменная встречается не более одного раза. В противном случае f называется повторной в B.

Все известные критерии бесповторности булевых функций представлены в [1–5], в книге [6] имеется обзор всех критериев. Отметим, что они получены в бинарных базисах

$$B_0 = \{\vee, \cdot, -, 0, 1\}, \qquad B_1 = \{\vee, \cdot, -, 0, 1, \oplus\}.$$

В настоящей работе впервые найдены критерии бесповторности для небинарных базисов.

Изложению основных результатов предпошлем необходимые определения и обозначения. Все неопределяемые здесь понятия можно найти, например, в [6]. Будут использоваться следующие обозначения: переменные обозначаются символами x, y, z, u, v, возможно, с индексами; константы обозначаются символами σ, τ, γ, δ, возможно, с индексами; символом $\tilde{x}$ обозначается набор $(x_1, \dots, x_n)$; символом $\bar{\tilde{x}}$ обозначается набор $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$; $|\tilde{x}|$ — длина набора $\tilde{x}$; $\operatorname{rank} f$ — ранг функции f; $\rho(f)$ — множество всех существенных переменных функции f; $\delta(f)$ — множество всех фиктивных переменных функции f; P_B — множество всех бесповторных функций в базисе B; S_B — множество всех слабоповторных функций в базисе B;

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Функция, получаемая из $f(x_1, \dots, x_n)$ подстановкой вместо некоторой переменной x_i константы σ, называется остаточной и обозначается $f^\sigma_{x_i}$. Индуктивно это определение распространяется на подмножество переменных.

Назовем переменную x_i функции f фиктивной, если $f^0_{x_i} = f^1_{x_i}$, и существенной в противном случае.

Рангом функции f называется число ее существенных переменных. Под рангом базиса понимаем наибольший из рангов входящих в него функций.

Булевы функции от 0, 1 и 2 переменных называются соответственно константными, унарными и бинарными.

Функция f называется слабоповторной в базисе B, если любая остаточная функция от функции f является бесповторной, а сама f повторна в базисе B.

Базис

$$B_0 = \{\vee, \cdot, -, 0, 1\}$$

называется элементарным, а базис $B_0 \cup \{f\}$, где f слабоповторна в B_0, называется предэлементарным.

Единственным (с точностью до вводимой ниже эквивалентности $\sim_p$) предэлементарным базисом ранга 2 является базис B_1. Как следует из [7], существует три предэлементарных базиса ранга 3, неэквивалентных B_1. Введем обозначения для таких базисов:

$$B_n = B_0 \cup \{g_n\}, \qquad n = 2, 3, 4,$$

где

$$\begin{aligned} g_2 &= x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3, \\ g_3 &= x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3, \\ g_4 &= x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2\bar{x}_3. \end{aligned}$$

Будем говорить, что функции f и g связаны отношением $\preccurlyeq$, и писать $f \preccurlyeq g$, если для любого набора $\tilde{\sigma}$ выполняется неравенство $f(\tilde{\sigma}) \leqslant g(\tilde{\sigma})$.

Функция f называется обобщенно монотонной по переменной x, если выполняется либо $f^0_x \preccurlyeq f^1_x$, либо $f^0_x \succcurlyeq f^1_x$. Если функции f является обобщенно монотонной по переменной x, то для краткости будем писать $f \in M_x$.

Функция f называется монотонной, если для любой переменной x выполняется соотношение $f^0_x \preccurlyeq f^1_x$.

Функции f и g называются обобщенно однотипными, если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g^{\sigma}(x^{\sigma_1}_{i_1}, \ldots, x^{\sigma_n}_{i_n}),$$

где $(i_1, \ldots, i_n)$ — некоторая перестановка чисел $1, \ldots, n$. Очевидно, что на множестве всех булевых функций отношение обобщенной однотипности является отношением эквивалентности.

Производной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_i называется функция

$$f'_{x_i} = f^0_{x_i} \oplus f^1_{x_i}.$$

Функция называется нечетной, если число наборов, на которых функция равна 1, является нечетным, и четной в противном случае.

Множество булевых функций P, содержащее тождественную функцию, называется наследственным, если для любой функции $f \in P$ любая остаточная функция $f^{\sigma}_x \in P$.

Множество булевых функций P называется инвариантным, если для любых функций $f(\tilde{u}, y), g(\tilde{v}) \in P$, где $\tilde{u} \cap \tilde{v} = \varnothing$, справедливо включение $f(\tilde{u}, g(\tilde{v})) \in P$.

2. Некоторые вспомогательные утверждения

При получении основных результатов будут использоваться следующие утверждения.

Предложение 1 ([5]). *Множество булевых функций P является наследственным и инвариантным тогда и только тогда, когда P есть множество всех бесповторных функций над некоторым базисом B.*

Следствие 1. *Если для наследственного, инвариантного множества булевых функций P и базиса B верно, что $B \subseteq P$ и $S_B \cap P = \varnothing$, то $P_B = P$.*

Таким образом, для доказательства того, что некоторое множество булевых функций P совпадает с множеством всех бесповторных функций над некоторым базисом B, достаточно показать, что P обладает свойствами наследственности и инвариантности, и проверить, что все слабоповторные в B функции не входят в P.

Предложение 2 ([8]). *Следующая система булевых функций является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению обобщенной однотипности для булевых функций, слабоповторных в предэлементарном базисе B_2:*

$$
\begin{array}{ll}
x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4; & \\
x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4); & \\
x_1(x_2 \vee \ldots \vee x_k) \vee x_2 \ldots x_k, & k \geqslant 3; \\
x_1(x_2 \vee x_3 \ldots x_k) \vee x_2\bar{x}_3 \ldots \bar{x}_k, & k \geqslant 3; \\
x_1 \ldots x_k \vee \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_k, & k \geqslant 2, \quad k \neq 3; \\
\bar{x}_1 g_2(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2x_3x_4; & \\
\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{g}_2(x_3, x_4, x_5) \vee x_1x_2x_3x_4x_5; & \\
\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 g_2(x_4, x_5, x_6) \vee x_1x_2x_3x_4x_5x_6. &
\end{array}
$$

Предложение 3 ([8]). *Следующая система булевых функций является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению обобщенной однотипности для булевых функций, слабоповторных в предэлементарном базисе B_3:*

$$
\begin{array}{ll}
x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4; & \\
x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4); & \\
x_1(x_2 \vee \ldots \vee x_k) \vee x_2 \ldots x_k, & k > 3; \\
x_1(x_2 \vee x_3 \ldots x_k) \vee x_2\bar{x}_3 \ldots \bar{x}_k, & k \geqslant 3; \\
x_1 \ldots x_k \vee \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_k, & k \geqslant 2; \\
\bar{x}_1 g_3(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2x_3x_4; & \\
\bar{x}_1 g_3(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2(x_3 \vee x_4); & \\
\bar{x}_1 g_3(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2; & \\
\bar{x}_1 x_2 g_3(x_3, x_4, x_5) \vee x_1((x_2 \vee x_3)x_4 \vee x_5). &
\end{array}
$$

Предложение 4 ([9]). *Следующая система булевых функций является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению обобщенной однотипности* *для булевых функций, слабоповторных в предэлементарном базисе B_4:*

$$x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4;$$
$$x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4);$$
$$x_1(x_2 \vee \ldots \vee x_k) \vee x_2 \ldots x_k, \qquad k \geqslant 3;$$
$$x_1(x_2 \vee x_3 \ldots x_k) \vee x_2\bar{x}_3 \ldots \bar{x}_k, \qquad k > 3;$$
$$x_1 \ldots x_k \vee \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_k, \qquad k \geqslant 2;$$
$$\bar{x}_1 g_4(x_2, x_3, x_4) \vee x_1 g_4(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4);$$
$$\bar{x}_1 g_4(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4;$$
$$\bar{x}_1 g_4(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2(x_3 \vee x_4);$$
$$\bar{x}_1 g_4(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2x_3.$$

3. Основные результаты

На множестве всех базисов введем частичный порядок следующим образом: базис B p-меньше базиса C (в этом случае используется обозначение $B \leqslant_p C$), если $P_B \subseteq P_C$. Если $B \leqslant_p C$ и $C \leqslant_p B$, то базисы B и C называются p-эквивалентными (в этом случае используется обозначение $B \sim_p C$). Если $B \leqslant_p C$ и $B \nsim_p C$, то базис B строго p-меньше базиса C (в этом случае пишем $B <_p C$). Базис B непосредственно p-меньше базиса C (пишем $B \lhd_p C$), если $B <_p C$ и не существует базиса D такого, что $B <_p D <_p C$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого базиса B выполняется соотношение $B_0 \leqslant_p B$.*

Доказательство. Докажем, что $P_{B_0} \subseteq P_B$. Для этого достаточно показать, что $B_0 \subseteq P_B$, и более того, $\{-, \cdot\} \subseteq P_B$. Так как B — базис, он содержит нелинейную и немонотонную функции. Теперь необходимое включение следует из того, что подстановкой констант из немонотонной функции можно получить отрицание, а из нелинейной функции с помощью констант и отрицания можно получить конъюнкцию.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Соотношение $B \lhd_p C$ выполняется тогда и только тогда, когда*

$$C \sim_p B \cup \{f\},$$

где $f \in S_B$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $B \lhd_p C$, тогда найдется функция f такая, что $f \in P_C$, но $f \notin P_B$. Очевидно, что $B <_p B \cup \{f\}$. Так как в любом базисе присутствуют константы, в качестве f всегда можно взять функцию, слабоповторную в B. Итак, $P_{B \cup \{f\}} \subseteq P_C$ и $P_{B \cup \{f\}} \neq P_B$. В силу того, что $B \lhd_p C$, выполняется соотношение $C \sim_p B \cup \{f\}$.

Докажем достаточность. Пусть $C \sim_p B \cup \{f\}$, где функция $f \in S_B$. Очевидно, что $B <_p B \cup \{f\}$, то есть $B <_p C$. Докажем, что $B \lhd_p C$. Проведем доказательство от противного. Пусть найдется базис D такой, что $B <_p D <_p C$. Тогда имеет место соотношение $P_B \subset P_D \subset P_C$, откуда следует, что $P_B \subset P_D \subset P_{B \cup \{f\}}$, здесь и далее знак $\subset$ означает строгое включение. Нетрудно видеть, что $f \notin P_D$, так как в противном случае $P_D = P_{B \cup \{f\}}$. Поскольку $B <_p D$, найдется слабоповторная в B функция $g \in P_D$.

Отсюда следует, что функции f и g обобщенно однотипны, а это противоречит тому, что $f \notin P_D$.

Теорема 2 доказана.

Отметим, что частично упорядоченное множество базисов с введенным порядком дуально изоморфно частично упорядоченному множеству базисов, рассматриваемому в [10].

Далее будут получены критерии бесповторности булевых функций во всех предэлементарных базисах ранга 3.

Функцию f будем называть 2-нетвердой, если либо $\operatorname{rank} f < 2$, либо для любого $x \in \rho(f)$ выполняется одно из следующих условий:

(1) $\delta(f) = \delta(f_x^0)$ и $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$;

(2) $\delta(f) = \delta(f_x^1)$ и $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$;

(3) $\delta(f) = \delta(f_x^0) = \delta(f_x^1)$, $f \notin M_x$ и найдется $y \in \rho(f_x')$ такой, что $\delta(f_x') \subset \delta((f_x')_y')$.

Функцию f будем называть наследственно 2-нетвердой, если сама f и все ее остаточные функции являются 2-нетвердыми.

Теорема 3. *Функция f бесповторна в базисе B_2 тогда и только тогда, когда она является наследственно 2-нетвердой.*

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся методом, основанным на предложении 1.

Обозначим через P множество всех наследственно 2-нетвердых функций. Множество P является наследственным по определению, покажем его инвариантность.

Пусть $f(\tilde{u}, \tilde{v}) = g(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$, где $g(\tilde{u}, y), h(\tilde{v}) \in P$. Если $\tilde{u} = \varnothing$ или $|\tilde{v}| = 1$, то функция f обобщенно однотипна с g или h, поэтому является наследственно 2-нетвердой. Далее считаем, что $\tilde{u} \neq \varnothing$ и $|\tilde{v}| > 1$.

1. Пусть $x \in \tilde{v}$. Если выполняется одно из строгих включений $\delta(h) \subset \delta(h_x^0)$ или $\delta(h) \subset \delta(h_x^1)$, то соответственно либо $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$, либо $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$.

Пусть $\delta(h) = \delta(h_x^0) = \delta(h_x^1)$. Рассмотрим $f_x' = g_y'(\tilde{u}, y)h_x'(\tilde{v})$. Ясно, что существует переменная $z \in \tilde{v}$ такая, что $\delta(h_x') \subset \delta((h_x')_z')$. Так как $(f_x')_z' = g_y'(\tilde{u}, y)(h_x')_z'(\tilde{v})$, легко заметить, что $\delta(f_x') \subset \delta((f_x')_z')$. Докажем от противного, что $f \notin M_x$. Пусть для определенности $f_x^0 \preccurlyeq f_x^1$. Тогда при любых $\tilde{u}$, $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$ выполняется неравенство

$$g(\tilde{u}, h(\tilde{v}_1, 0, \tilde{v}_2)) \leqslant g(\tilde{u}, h(\tilde{v}_1, 1, \tilde{v}_2)).$$

Так как $h \notin M_x$, для любого $\tilde{u}$ имеют место неравенства

$$g(\tilde{u}, 0) \leqslant g(\tilde{u}, 1), \qquad g(\tilde{u}, 0) \geqslant g(\tilde{u}, 1).$$

Отсюда следует, что $g_y^0 = g_y^1$, то есть переменная y фиктивна, что невозможно.

2. Пусть $x \in \tilde{u}$. В случае выполнения одного из строгих включений $\delta(g) \subset \delta(g_x^0)$ или $\delta(g) \subset \delta(g_x^1)$ справедливо ровно одного из строгих включений $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$ или $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$.

Пусть $\delta(g) = \delta(g_x^0) = \delta(g_x^1)$. Рассмотрим $f_x' = g_x'(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$. Если для функции $g_x'(\tilde{u}, y)$ существует переменная z, отличная от y, такая, что $\delta(g_x') \subset \delta((g_x')_z')$, тогда справедливо строгое включение $\delta(f_x') \subset \delta((f_x')_z')$. В противном случае выберем произвольным образом переменную $z_1 \in \tilde{v}$ и рассмотрим $(f'_x)'_{z_1} = (g'_x)'_y(\tilde{u}, y)h'_{z_1}(\tilde{v})$. Из справедливости строгого включения $\delta(g'_x) \subset \delta((g'_x)'_y)$ следует справедливость строгого включения $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_{z_1})$.

Докажем от противного, что $f \notin M_x$. Пусть для определенности $f^0_x \preccurlyeq f^1_x$. Тогда при любых $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{v}$ выполняется неравенство

$$g(\tilde{u}_1, 0, \tilde{u}_2, h(\tilde{v})) \leqslant g(\tilde{u}_1, 1, \tilde{u}_2, h(\tilde{v})).$$

Отсюда следует, что при любых $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ выполняются неравенства

$$g(\tilde{u}_1, 0, \tilde{u}_2, 0) \leqslant g(\tilde{u}_1, 1, \tilde{u}_2, 0), \qquad g(\tilde{u}_1, 0, \tilde{u}_2, 1) \leqslant g(\tilde{u}_1, 1, \tilde{u}_2, 1).$$

Тогда $g \in M_x$, получаем противоречие. Таким образом, инвариантность P доказана.

Осталось для наследственного инвариантного множества P найти порождающий его базис. Очевидно, что $B_2 \subseteq P$. Покажем, что все слабоповторные функции в базисе B_2 не принадлежат P. Достаточно ограничиться проверкой функций из предложения 2, так как если свойство 2-нетвердости не выполняется для некоторой функции, то оно не выполняется и для всех обобщенно однотипных с ней функций.

(a) $f = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$. Тогда

$$f^0_{x_1} = x_3x_4, \qquad f^1_{x_1} = x_2 \vee x_3.$$

Обе эти остаточные функции имеют фиктивную переменную существенную в f, поэтому $f \notin P$.

(b) $f = x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$. Тогда

$$f^0_{x_4} = x_1x_2 \vee x_3x_5, \qquad f^1_{x_4} = (x_1 \vee x_5)(x_2 \vee x_3).$$

Функции $f^0_{x_4}, f^1_{x_4}$ существенны и $f \in M_{x_4}$, поэтому $f \notin P$.

(c) $f = x_1(x_2 \vee \ldots \vee x_k) \vee x_2 \ldots x_k$, где $k \geqslant 3$. Функция $f \notin P$, так как $f^0_{x_1}, f^1_{x_1}$ существенны, а $f \in M_{x_1}$.

(d) $f = x_1(x_2 \vee x_3 \ldots x_k) \vee x_2\bar{x}_3 \ldots \bar{x}_k$, где $k \geqslant 3$. При $k = 3$ $f^0_{x_3} = x_2$ и $f^1_{x_3} = x_1$. Обе эти остаточные функции имеют фиктивную переменную существенную в f, поэтому $f \notin P$. При $k > 3$

$$f^0_{x_3} = x_2(x_1 \vee \bar{x}_4 \ldots \bar{x}_k),$$
$$f^1_{x_3} = x_1(x_2 \vee x_4 \ldots x_k),$$
$$f'_{x_3} = \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \ldots \bar{x}_k \vee x_1\bar{x}_2x_4 \ldots x_k.$$

Легко видеть, что функции $f^0_{x_3}, f^1_{x_3}, f'_{x_3}$ и производная функции f'_{x_3} по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

(e) $f = x_1 \ldots x_k \vee \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_k$, где $k \geqslant 2$. При $k = 2$ функция $f \notin P$, так как $f^0_{x_1}, f^1_{x_1}$ существенны и $f'_{x_1} = 1$. При $k > 3$ справедливы равенства

$$f^0_{x_1} = \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_k, \quad f^1_{x_1} = x_2 \ldots x_k, \quad f'_{x_1} = x_2 \ldots x_k \vee \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_k.$$

Функции $f^0_{x_1}, f^1_{x_1}, f'_{x_1}$ и производная функции f'_{x_1} по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

(f) $f = \bar{x}_1 g_2(x_2, x_3, x_4) \vee x_1 x_2 x_3 x_4$. Тогда

$$f_{x_1}^0 = g_2(x_2, x_3, x_4), \quad f_{x_1}^1 = x_2 x_3 x_4, \quad f'_{x_1} = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4.$$

Функции $f_{x_1}^0$, $f_{x_1}^1$, f'_{x_1} и производная функции f'_{x_1} по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

(g) $f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{g}_2(x_3, x_4, x_5) \vee x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} f_{x_3}^0 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 (x_4 \vee x_5), \\ f_{x_3}^1 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) \vee x_1 x_2 x_4 x_5, \\ f'_{x_3} &= x_1 x_2 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_5. \end{aligned}$$

Остаточные функции $f_{x_3}^0$ и $f_{x_3}^1$ существенны. В силу того, что представление f'_{x_3} является совершенной дизъюнктивной нормальной формой, нетрудно видеть, что функция f'_{x_3} нечетна, то есть существенна. Очевидно, что производная нечетной функции по любой переменной есть нечетная функция, поэтому $f \notin P$.

(h) $f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 g_2(x_4, x_5, x_6) \vee x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$. Тогда

$$\begin{aligned} f_{x_1}^0 &= \bar{x}_2 \bar{x}_3 g_2(x_4, x_5, x_6), \\ f_{x_1}^1 &= x_2 x_3 x_4 x_5 x_6, \\ f'_{x_1} &= x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 x_6 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6. \end{aligned}$$

Ситуация аналогична случаю (g).

Таким образом,

$$S_{B_2} \cap P = \varnothing, \qquad B_2 \subseteq P.$$

Теорема 3 доказана.

Функцию f будем называть 2-нежесткой, если либо $\operatorname{rank} f < 2$, либо для любого $x \in \rho(f)$ справедливо включение $f \in M_x$ и выполняется одно из условий:

(1) $\delta(f) = \delta(f_x^0)$ и справедливо строгое включение $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$;

(2) $\delta(f) = \delta(f_x^1)$ и справедливо строгое включение $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$;

(3) существует $y \in \rho(f'_x)$ такая, что справедливо строгое включение $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_y)$.

Функцию f будем называть наследственно 2-нежесткой, если сама f и все ее остаточные функции являются 2-нежесткими.

Теорема 4. *Функция f бесповторна в базисе B_3 тогда и только тогда, когда она является наследственно 2-нежесткой.*

Доказательство. Как и для теоремы 3, доказательство проведем с помощью метода, основанного на предложении 1.

Обозначим через P множество всех 2-нежестких функций. Множество P является наследственным по определению, покажем его инвариантность.

Пусть $f(\tilde{u},\tilde{v}) = g(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$, где $g(\tilde{u}, y), h(\tilde{v}) \in P$. Если $\tilde{u} = \varnothing$ или $|\tilde{v}| = 1$, то функция f обобщенно однотипна с g или h, поэтому является наследственно 2-нежесткой. Поэтому считаем, что $\tilde{u} \neq \varnothing$ и $|\tilde{v}| > 1$.

1. Пусть $x \in \tilde{v}$. Если справедливо одно из строгих включений $\delta(h) \subset \delta(h^0_x)$ или $\delta(h) \subset \delta(h^1_x)$, то соответственно либо $\delta(f) \subset \delta(f^0_x)$, либо $\delta(f) \subset \delta(f^1_x)$. В противном случае рассмотрим $f'_x = g'_y(\tilde{u}, y)h'_x(\tilde{v})$. Очевидно, что существует переменная $z \in \tilde{v}$ такая, что $\delta(h'_x) \subset \delta((h'_x)'_z)$. Так как $(f'_x)'_z = g'_y(\tilde{u}, y)(h'_x)'_z(\tilde{v})$, легко заметить, что $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_z)$.

2. Пусть $x \in \tilde{u}$. Если справедливо одно из строгих включений $\delta(g) \subset \delta(g^0_x)$ или $\delta(g) \subset \delta(g^1_x)$, то справедливость ровно одного из строгих включений $\delta(f) \subset \delta(f^0_x)$ или $\delta(f) \subset \delta(f^1_x)$ очевидна. В противном случае рассмотрим $f'_x = g'_x(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$. Если для функции $g'_x(\tilde{u}, y)$ существует переменная z, отличная от y, такая, что $\delta(g'_x) \subset \delta((g'_x)'_z)$, тогда справедливо строгое включение $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_z)$. В противном случае выберем произвольным образом переменную $z_1 \in \tilde{v}$ и рассмотрим $(f'_x)'_{z_1} = (g'_x)'_y(\tilde{u}, y)h'_{z_1}(\tilde{v})$. В силу того, что $\delta(g'_x) \subset \delta((g'_x)'_y)$, справедливо строгое включение $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_{z_1})$.

Докажем методом от противного, что $f \in M_x$ для любой переменной x. Пусть $f \notin M_x$, то есть $f^0_x \not\preceq f^1_x$ и $f^0_x \not\succeq f^1_x$.

Пусть $x \in \tilde{u}$. Тогда найдутся наборы констант $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{\tau}_3$ такие, что $|\tilde{\sigma}_i| = |\tilde{\tau}_i|$ для любого i и

$$g(\tilde{\sigma}_1, 0, \tilde{\sigma}_2, h(\tilde{\sigma}_3)) < g(\tilde{\sigma}_1, 1, \tilde{\sigma}_2, h(\tilde{\sigma}_3)), \qquad g(\tilde{\tau}_1, 0, \tilde{\tau}_2, h(\tilde{\tau}_3)) > g(\tilde{\tau}_1, 1, \tilde{\tau}_2, h(\tilde{\tau}_3)).$$

Пусть $h(\tilde{\sigma}_3) = \gamma$, $h(\tilde{\tau}_3) = \delta$, тогда

$$g(\tilde{\sigma}_1, 0, \tilde{\sigma}_2, \gamma) < g(\tilde{\sigma}_1, 1, \tilde{\sigma}_2, \gamma), \qquad g(\tilde{\tau}_1, 0, \tilde{\tau}_2, \delta) > g(\tilde{\tau}_1, 1, \tilde{\tau}_2, \delta).$$

Таким образом, $g \notin M_x$, получаем противоречие.

Пусть $x \in \tilde{v}$. Аналогично, найдутся наборы констант $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$, $\tilde{\sigma}_3$, $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$, $\tilde{\tau}_3$ такие, что $|\tilde{\sigma}_i| = |\tilde{\tau}_i|$ для любого i и

$$g(\tilde{\sigma}_1, h(\tilde{\sigma}_2, 0, \tilde{\sigma}_3)) < g(\tilde{\sigma}_1, h(\tilde{\sigma}_2, 1, \tilde{\sigma}_3)), \qquad g(\tilde{\tau}_1, h(\tilde{\tau}_2, 0, \tilde{\tau}_3)) > g(\tilde{\tau}_1, h(\tilde{\tau}_2, 1, \tilde{\tau}_3)).$$

В силу того, что $h \in M_x$, справедливы либо неравенства

$$g(\tilde{\sigma}_1, 0) < g(\tilde{\sigma}_1, 1), \qquad g(\tilde{\tau}_1, 0) > g(\tilde{\tau}_1, 1),$$

либо неравенства

$$g(\tilde{\sigma}_1, 1) < g(\tilde{\sigma}_1, 0), \qquad g(\tilde{\tau}_1, 1) > g(\tilde{\tau}_1, 0).$$

В обоих случаях получаем противоречие с тем, что $g \in M_x$. Таким образом, доказана инвариантность P.

Теперь для наследственного инвариантного множества P найдем порождающий его базис. Очевидно, что $B_3 \subseteq P$. Проверим, что все слабоповторные функции в базисе B_3 не принадлежат P. Достаточно ограничиться проверкой функций из предложения 3, так как если свойство 2-нежесткости не выполняется для некоторой функции, то оно не выполняется и для всех обобщенно однотипных с ней функций.

(a) $f = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$. Тогда

$$f^0_{x_2} = x_3(x_1 \vee x_4), \quad f^1_{x_2} = x_1 \vee x_3x_4, \quad f'_{x_2} = x_1\bar{x}_3.$$

Обе остаточные функции $f^0_{x_2}$, $f^1_{x_2}$ существенны и множество фиктивных переменных функции f'_{x_2} совпадает с множеством фиктивных переменных производной функции f'_{x_2} по любой переменной из $\rho(f'_{x_2})$, поэтому $f \notin P$.

(b) $f = x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$. Тогда

$$f^0_{x_4} = x_1x_2 \vee x_3x_5, \quad f^1_{x_4} = (x_1 \vee x_5)(x_2 \vee x_3), \quad f'_{x_4} = x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_5.$$

Легко заметить, что функции $f^0_{x_4}$, $f^1_{x_4}$, f'_{x_4}, а также производная функции f'_{x_4} по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

(c) $f = x_1 \dots x_k \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_k$, где $k \geqslant 2$. Функция $f \notin P$, так как $f \notin M_{x_1}$.

(d) $f = x_1(x_2 \vee x_3 \dots x_k) \vee x_2\bar{x}_3 \dots \bar{x}_k$, где $k \geqslant 3$. Аналогично (c), функция $f \notin P$, так как $f \notin M_{x_1}$.

(e) $f = x_1(x_2 \vee \dots \vee x_k) \vee x_2 \dots x_k$, где $k > 3$. Тогда

$$f^0_{x_1} = x_2 \dots x_k, \quad f^1_{x_1} = x_2 \vee \dots \vee x_k, \quad f'_{x_1} = \overline{x_2 \dots x_k \vee \bar{x}_2 \dots \bar{x}_k}.$$

Функции $f^0_{x_1}$, $f^1_{x_1}$, f'_{x_1} и производная функции f'_{x_1} по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

(f) $f = \bar{x}_1g_3(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2$. Так как $f^0_{x_1} \not\leqslant f^1_{x_1}$ и $f^0_{x_1} \not\geqslant f^1_{x_1}$, то $f \notin M_x$, поэтому $f \notin P$.

(g) $f = \bar{x}_1g_3(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2x_3x_4$. Тогда

$$f^0_{x_1} = g_3(x_2, x_3, x_4), \quad f^1_{x_1} = x_2x_3x_4, \quad f'_{x_1} = x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4.$$

Функции $f^0_{x_1}$, $f^1_{x_1}$, f'_{x_1} и производная функции f'_{x_1} по любой переменной существенны (см. случай (g) в теореме 3), поэтому $f \notin P$.

(h) $f = \bar{x}_1g_3(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2(x_3 \vee x_4)$. Тогда

$$f^0_{x_1} = g_3(x_2, x_3, x_4), \quad f^1_{x_1} = x_2(x_3 \vee x_4), \quad f'_{x_1} = \bar{x}_2x_3x_4.$$

Ситуация аналогична (g).

(i) $f = \bar{x}_1x_2g_3(x_3, x_4, x_5) \vee x_1((x_2 \vee x_3)x_4 \vee x_5)$. В этом случае

$$\begin{aligned} f^0_{x_2} &= x_1(x_3x_4 \vee x_5), \\ f^1_{x_2} &= g_3(x_5, x_1 \vee x_3, x_4), \\ f'_{x_2} &= \bar{x}_1x_3x_4x_5 \vee \bar{x}_1x_3x_4\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4x_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4x_5 \vee x_1\bar{x}_3x_4\bar{x}_5. \end{aligned}$$

Ситуация аналогична (g).

Таким образом,

$$S_{B_3} \cap P = \varnothing, \qquad B_3 \subseteq P.$$

Теорема 4 доказана.

Функцию f будем называть 2-неплотной, если либо $\operatorname{rank} f < 2$, либо для любого $x \in \rho(f)$ выполняется одно из условий:

(1) $\delta(f) = \delta(f_x^0)$ и $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$;

(2) $\delta(f) = \delta(f_x^1)$ и $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$;

(3) $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$, $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$, $f \notin M_x$ и найдется переменная $y \in \rho(f'_x)$ такая, что $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_y)$;

(4) $\delta(f) \subset \delta(f'_x)$, причем это строгое включение не выполняется для всех переменных из $\rho(f)$ одновременно.

Функцию f будем называть наследственно 2-неплотной, если сама f и все ее остаточные функции являются 2-неплотными.

Теорема 5. *Функция f бесповторна в базисе B_4 тогда и только тогда, когда она является наследственно 2-неплотной.*

Доказательство. Обозначим через P множество всех наследственно 2-неплотных функций. Множество P является наследственным по определению, покажем его инвариантность.

Пусть $f(\tilde{u}, \tilde{v}) = g(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$, где $g(\tilde{u}, y), h(\tilde{v}) \in P$. Если $\tilde{u} = \varnothing$ или $|\tilde{v}| = 1$, то функция f обобщенно однотипна с g или h, поэтому является наследственно 2-неплотной. Далее считаем, что $\tilde{u} \neq \varnothing$ и $|\tilde{v}| > 1$.

1. Пусть $x \in \tilde{v}$. Если выполняется ровно одно из строгих включений $\delta(h) \subset \delta(h_x^0)$ или $\delta(h) \subset \delta(h_x^1)$, то соответственно либо $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$, либо $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$.

Пусть $\delta(h) \subset \delta(h_x^0)$ и $\delta(h) \subset \delta(h_x^1)$. Найдется переменная z такая, что выполняется строгое включение $\delta(h'_x) \subset \delta((h'_x)'_z)$, значит $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_z)$. Покажем, что $f \notin M_x$. В силу того, что $h \notin M_x$, найдутся наборы констант $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$, $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ такие, что $|\tilde{\tau}_i| = |\tilde{\gamma}_i|$ для любого i и выполняются соотношения

$$0 = h(\tilde{\tau}_1, 0, \tilde{\tau}_2) < h(\tilde{\tau}_1, 1, \tilde{\tau}_2) = 1, \qquad 1 = h(\tilde{\gamma}_1, 0, \tilde{\gamma}_2) > h(\tilde{\gamma}_1, 1, \tilde{\gamma}_2) = 0.$$

Переменная $y \in \rho(g)$, следовательно, найдется набор $\tilde{\sigma}$ такой, что $g(\tilde{\sigma}, 0) \neq g(\tilde{\sigma}, 1)$. Пусть для определенности $g(\tilde{\sigma}, 0) < g(\tilde{\sigma}, 1)$. Заменив константы, получаем, что

$$g(\tilde{\sigma}, h(\tilde{\tau}_1, 0, \tilde{\tau}_2)) < g(\tilde{\sigma}, h(\tilde{\tau}_1, 1, \tilde{\tau}_2)), \qquad g(\tilde{\sigma}, h(\tilde{\gamma}_1, 0, \tilde{\gamma}_2)) > g(\tilde{\sigma}, h(\tilde{\gamma}_1, 1, \tilde{\gamma}_2)).$$

Отсюда следует, что $f \notin M_x$.

Пусть $\delta(h) \subset \delta(h'_x)$. Так как справедливо равенство $f'_x = g'_y(\tilde{u}, y)h'_x(\tilde{v})$, выполняется строгое включение $\delta(f) \subset \delta(f'_x)$.

2. Пусть $x \in \tilde{u}$. Если выполнено одного из условий $\delta(g) \subset \delta(g_x^0)$ или $\delta(g) \subset \delta(g_x^1)$, то справедливость ровно одного из строгих включений $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$ или $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$ очевидна.

Пусть $\delta(g) \subset \delta(g_x^0)$ и $\delta(g) \subset \delta(g_x^1)$. Если найдется переменная z, отличная от y и такая, что $\delta(g'_x) \subset \delta((g'_x)'_z)$, то $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_z)$. В противном случае выберем произвольным образом $z_1 \in \tilde{v}$ и рассмотрим $(f'_x)'_{z_1} = (g'_x)'_y(\tilde{u}, y)h'_{z_1}(\tilde{v})$. В силу того, что $\delta(g'_x) \subset \delta((g'_x)'_y)$, справедливо строгое включение $\delta(g'_x) \subset \delta((g'_x)'_{z_1})$. Доказательство того, что $f \notin M_x$, аналогично доказательству в случае $x \in \tilde{v}$.

Пусть $\delta(g) \subset \delta(g'_x)$. Ясно, что $\delta(f) \subset \delta(f'_x)$.

Очевидно, что условие 4 из определения 2-неплотной функции не выполняется для всех переменных функции f одновременно. Таким образом, инвариантность P доказана.

Для наследственного инвариантного множества P найдем порождающий его базис. Очевидно, что $B_4 \subseteq P$. Проверим, что все слабоповторные функции в базисе B_4 не принадлежат P. Очевидно, что достаточно ограничиться проверкой функций из предложения 4.

(a) $f = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$. Тогда $f^0_{x_1} = x_3x_4$ и $f^1_{x_1} = x_2 \vee x_3$. Обе эти остаточные функции имеют фиктивную переменную, существенную в f, f'_{x_1} существенна и $f \in M_x$, поэтому $f \notin P$.

(b) $f = x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$. Тогда

$$f^0_{x_4} = x_1x_2 \vee x_3x_5, \quad f^1_{x_4} = (x_1 \vee x_5)(x_2 \vee x_3), \quad f'_{x_4} = x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_5.$$

Легко заметить, что $f^0_{x_4}$, $f^1_{x_4}$, f'_{x_4} существенны, поэтому $f \notin P$.

(c) $f = x_1(x_2 \vee \ldots \vee x_k) \vee x_2 \ldots x_k$, где $k \geqslant 3$. Тогда

$$f^0_{x_1} = x_2 \ldots x_k, \quad f^1_{x_1} = x_2 \vee \ldots \vee x_k, \quad f'_{x_1} = \overline{x_2 \ldots x_k \vee \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_k}.$$

Функции $f^0_{x_1}$, $f^1_{x_1}$, f'_{x_1} существенны, поэтому $f \notin P$.

(d) $f = x_1 \ldots x_k \vee \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_k$, где $k \geqslant 2$. При $k = 2$

$$f^0_{x_1} = \bar{x}_2, \quad f^1_{x_1} = x_2, \quad f'_{x_1} = 1, \quad f^0_{x_2} = \bar{x}_1, \quad f^1_{x_2} = x_1, \quad f'_{x_2} = 1.$$

Для любой переменной остаточные функции существенны, а производная несущественна, поэтому функция $f \notin P$. При $k \geqslant 3$

$$f^0_{x_1} = \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_k, \quad f^1_{x_1} = x_2 \ldots x_k, \quad f'_{x_1} = x_2 \ldots x_k \vee \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_k.$$

Ситуация аналогична случаю (b).

(e) $f = x_1(x_2 \vee x_3 \ldots x_k) \vee x_2\bar{x}_3 \ldots \bar{x}_k$, где $k > 3$. Тогда

$$\begin{aligned} f^0_{x_3} &= x_2(x_1 \vee \bar{x}_4 \ldots \bar{x}_k), \\ f^1_{x_3} &= x_1(x_2 \vee x_4 \ldots x_k), \\ f'_{x_3} &= \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \ldots \bar{x}_k \vee x_1\bar{x}_2x_4 \ldots x_k. \end{aligned}$$

Ситуация аналогична случаю (b).

(f) $f = \bar{x}_1g_4(x_2, x_3, x_4) \vee x_1g_4(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$. Тогда

$$\begin{aligned} f^0_{x_1} &= g_4(x_2, x_3, x_4), & f^1_{x_1} &= g_4(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4), & f'_{x_1} &= x_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3, \\ f^0_{x_2} &= g_4(x_1, \bar{x}_4, \bar{x}_3), & f^1_{x_2} &= g_4(\bar{x}_1, x_4, x_3), & f'_{x_2} &= x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_4, \\ f^0_{x_3} &= g_4(x_1, x_4, \bar{x}_2), & f^1_{x_3} &= g_4(\bar{x}_1, \bar{x}_4, x_2), & f'_{x_3} &= x_1x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_4, \\ f^0_{x_4} &= g_4(\bar{x}_2, x_3, x_1), & f^1_{x_4} &= g_4(x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_1), & f'_{x_4} &= x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3. \end{aligned}$$

Легко видеть, что по любой переменной остаточные функции существенны, а производная несущественна, поэтому $f \notin P$.

(g) $f = \bar{x}_1 g_4(x_2, x_3, x_4) \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$. Тогда

$$f^0_{x_1} = g_4(x_2, x_3, x_4), \quad f^1_{x_1} = x_2 \bar{x}_3 x_4, \quad f'_{x_1} = x_3(x_2 \vee \bar{x}_4).$$

Ситуация аналогична случаю (b).

(h) $f = \bar{x}_1 g_4(x_2, x_3, x_4) \vee x_1 x_2 (x_3 \vee x_4)$. Тогда

$$f^0_{x_1} = g_4(x_2, x_3, x_4), \quad f^1_{x_1} = x_2(x_3 \vee x_4), \quad f'_{x_1} = \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4.$$

Ситуация аналогична случаю (b).

(i) $f = \bar{x}_1 g_4(x_2, x_3, x_4) \vee x_1 x_2 x_3$. Тогда

$$f^0_{x_2} = \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4, \quad f^1_{x_2} = x_3 \vee \bar{x}_1 x_4, \quad f'_{x_2} = g_4(x_3, x_4, x_1).$$

Ситуация аналогична случаю (b).

Таким образом,

$$S_{B_4} \cap P = \varnothing, \qquad B_4 \subseteq P.$$

Теорема 5 доказана.

Список литературы

1. Субботовская Б. А., О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами. *Докл. АН СССР* (1963) **149**, №4, 784–787.
2. Гурвич В. А., Критерии бесповторности функций алгебры логики. *Докл. АН СССР* (1991) **318**, №3, 532–537.
3. Перязев Н. А., Реализация булевых функций бесповторными формулами в некоторых базисах. В кн.: *Алгебра, логика и приложения.* Иркутск, 1994, с. 143–154.
4. Перязев Н. А., Реализация булевых функций бесповторными формулами. *Дискретная математика* (1995) **7**, №3, 61–68.
5. Кириченко К. Д., О критериях бесповторности булевых функций в различных базисах. *Оптимизация, управление, интеллект* (2000) **4**, 93–101.
6. Винокуров С. Ф., Перязев Н. А., *Избранные вопросы теории булевых функций.* Физматлит, Москва, 2001.
7. Стеценко В. А., О предплохих базисах в P_2. *Матем. вопросы киберн.* (1992) **4**, 139–177.
8. Кириченко К. Д., Слабоповторные булевы функции в некоторых предэлементарных базисах. *Дискретная математика и информатика* вып. 13. Изд-во Иркутского ун-та, Иркутск, 2000.
9. Шаранхаев И. К., Слабоповторные булевы функции в некоторых базисах. *Дискретная математика и информатика* вып. 17. Изд-во Иркутского ун-та, Иркутск, 2003.
10. Черухин Д. Ю., Алгоритмический критерий сравнения булевых базисов. *Матем. вопросы киберн.* (1999) **8**, 77–122.

Статья поступила 24.05.2004.