В.И.Камоцкий

ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ИЗ S С ФИКСИРОВАННЫМ ТРЕТЬИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

I . Пусть S - класс функций

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n, \qquad (I)$$

регулярных и однолистных в круге $K=\{z:|z|<1\}$, S_r - подкласс функций $f(z)\in S$ с вещественными коэффициентами $c_2, c_3, \ldots$. Через T обозначаем класс регулярных в круге K функций вида (I), удовлетворяющих условию: $\mathrm{Im}\, f(z)=0$ при $\mathrm{Im}\, z=0$, $\mathrm{Im}\, f(z)\cdot \mathrm{Im}\, z>0$ при $\mathrm{Im}\, z\neq 0$.

В работах Дж.Дженкинса [I] , Ю.Е.Аленицына [2] , Е.Г.Голузиной [3] решен ряд экстремальных задач в классе $T(c_2)$ функций из T с фиксированным вторым коэффициентом c_2, $-2\leqslant c_2\leqslant 2$, на основе интегрального представления для функций этого класса. Дж.Лимену [4] удалось найти точные оценки коэффициентов c_n в классе $T(c_2)$ при всех $n\geqslant 3$. Что касается класса S , то класс $S(c_2)$ функций из S с фиксированным коэффициентом c_2 рассматривался многими авторами (см., например, работы Н.А.Лебедева и И.М.Милина [5] , Дж.Дженкинса [6] . В настоящей работе находятся оценки коэффициентов c_n, $n\geqslant 2$, в классе S_r в зависимости от c_3 . Именно, при помощи результатов метода площадей для $f(z)\in S_r$ устанавливаются следующие неравенства

$$|c_{2k}|\leqslant \sqrt{(1+c_3)}\,k,\quad |c_{2k-1}|\leqslant\sqrt{1+(1+c_3)(k^2-k)}\,;\quad k=1,2,\ldots .$$

Используя хорошо известные оценки для c_3 в классе S_r , отсюда получаем значительно меньшие границы сверху для $|c_{2k}|$ и $|c_{2k-1}|$ в классе функций из S_r с фиксированным коэффициентом c_2 по сравнению с оценками в классе $T(c_2)$, полученными в [4] .

2 . Пусть $f(z)\in S$. Введем функцию

$$u(z,\zeta)=\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\,\frac{z\zeta}{f(z)f(\zeta)},\qquad u(z,\zeta)=u(\zeta,z).$$

Тогда

$$\log u(z,\zeta)=\sum_{p,q=1}^{\infty}\omega_{p,q}\,z^p\zeta^q,$$

где $\omega_{p,q}$ - коэффициенты Грунского. В дальнейшем нам понадобится следующее неравенство для коэффициентов Грунского, полученное

Н.А.Лебедевым (см., например, [7], стр.37):

$$\left|\sum_{p,q=1}^{\infty}\omega_{p,q}x_p x'_q\right| \leqslant \sqrt{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{|x_p|^2}{p}}\ \sqrt{\sum_{q=1}^{\infty}\frac{|x'_q|^2}{q}}\ ; \qquad (A)$$

здесь $x_p, x'_q (p,q=1,2,\ldots$ – произвольные комплексные числа с

$$\sum_{p=1}^{\infty}|x_p|^2/p < \infty\ , \quad \sum_{q=1}^{\infty}|x'_q|^2/q < \infty .$$

Справедлива

ТЕОРЕМА I. Пусть $f(z)\in S_\gamma$. Тогда для любых точек $z_1,\ldots,z_m$ круга K и для любых комплексных чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ имеет место неравенство

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar{\alpha}_\nu\frac{f(z_\mu)-f(\bar{z}_\nu)}{(z_\mu-\bar{z}_\nu)(1-z_\mu\bar{z}_\nu)} \geqslant \sum_{\mu,\nu=1}\alpha_\mu\bar{\alpha}_\nu\frac{f(z_\mu)f(\bar{z}_\nu)}{z_\mu\bar{z}_\nu} . \qquad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сумму

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar{\alpha}_\nu\log u(z_\mu,\bar{z}_\nu)=$$

$$=\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar{\alpha}_\nu\sum_{p,q=1}^{\infty}\omega_{p,q}z_\mu^p\bar{z}_\nu^q=\sum_{p,q=1}^{\infty}\omega_{p,q}\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar{\alpha}_\nu z_\mu^p\bar{z}_\nu^q=$$

$$=\sum_{p,q=1}^{\infty}\omega_{p,q}\left(\alpha_1 z_1^p+\ldots+\alpha_m z_m^p\right)\overline{\left(\alpha_1 z_1^q+\ldots+\alpha_m z_m^q\right)}.$$

Полагая в неравенстве (A) $x_p=\alpha_1 z_1^p+\ldots+\alpha_m z_m^p,\ x'_q=\bar{x}_q$ $(p,q=1,2,\ldots)$, получаем

$$\left|\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar{\alpha}_\nu\log u(z_\mu,\bar{z}_\nu)\right|\leqslant\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\left|\alpha_1 z_1^p+\ldots+\alpha_m z_m^p\right|^2=$$

$$=\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar{\alpha}_\nu\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}(z_\mu\bar{z}_\nu)^p=\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar{\alpha}_\nu\log\frac{1}{1-z_\mu\bar{z}_\nu},$$

то есть

$$\left|\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar\alpha_\nu \log\left(\frac{f(z_\mu)-f(\bar z_\nu)}{z_\mu-\bar z_\nu}\ \frac{z_\mu \bar z_\nu}{f(z_\mu)f(\bar z_\nu)}\right)\right| \leqslant \sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar\alpha_\nu \log\frac{1}{1-z_\mu\bar z_\nu}. \quad (3)$$

Очевидно, что выражение под знаком модуля в левой части неравенства (3) вещественно. Взяв это выражение со знаком минус и перенеся его в правую часть (3), находим

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar\alpha_\nu \log\left(\frac{f(z_\mu)-f(\bar z_\nu)}{(z_\mu-\bar z_\nu)(1-z_\mu\bar z_\nu)}\ \frac{z_\mu \bar z_\nu}{f(z_\mu)f(\bar z_\nu)}\right)\geqslant 0. \quad (4)$$

Итак, имеем положительную эрмитову форму. С помощью известного результата (см., например, [7], стр.314) из (4) получаем неравенство

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar\alpha_\nu \left(\frac{f(z_\mu)-f(\bar z_\nu)}{(z_\mu-\bar z_\nu)(1-z_\mu\bar z_\nu)}\ \frac{z_\mu \bar z_\nu}{f(z_\mu)f(\bar z_\nu)}-1\right)\geqslant 0 . \quad (5)$$

Из (5) при замене α_μ на $\alpha_\mu \frac{f(z_\mu)}{z_\mu}$ следует неравенство (2). Теорема доказана.

Рассмотрим разложение

$$\frac{f(z)-f(\zeta)}{(z-\zeta)(1-z\zeta)} = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} a_{k,\ell}\, z^{k-1}\zeta^{\ell-1}.$$

Непосредственным подсчетом легко убедиться, что

$$a_{k,\ell}=c_{|k-\ell|+1}+c_{|k-\ell|+3}+\dots+c_{k+\ell-1} . \quad (*)$$

Так как

$$\frac{f(z)f(\zeta)}{z\zeta} = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} c_k c_\ell\, z^{k-1}\zeta^{\ell-1},$$

то неравенство (2) можно записать в виде

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar\alpha_\nu\left(\sum_{k,\ell=1}^{\infty} a_{k,\ell}\, z_\mu^{k-1}\bar z_\nu^{\ell-1}\right)\geqslant \sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar\alpha_\nu\left(\sum_{k,\ell=1}^{\infty} c_k c_\ell\, z_\mu^{k-1}\bar z_\nu^{\ell-1}\right), \quad (6)$$

или

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar\alpha_\nu\left(\sum_{k,\ell=1}^{\infty}(a_{k,\ell}-c_k c_\ell)\, z_\mu^{k-1}\bar z_\nu^{\ell-1}\right)\geqslant 0 . \quad (6')$$

Для доказательства следующих теорем нам понадобится

ЛЕММА. Пусть

$$u(z,\zeta)=\sum_{k,\ell=1}^{\infty} a_{k,\ell}\, z^{k-1}\zeta^{\ell-1},$$

где $a_{k,\ell}$ вещественные, $a_{k,\ell}=a_{\ell,k}$ $(k,\ell=1,2,\dots)$ и пусть для любых точек $z_1,\dots,z_m$ из K и любых комплексных чисел $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ имеет место неравенство

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar{\alpha}_\nu u(z_\mu,\bar{z}_\nu)=\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar{\alpha}_\nu\Big(\sum_{k,\ell=1}^{\infty}a_{k,\ell}z_\mu^{k-1}\bar{z}_\nu^{\ell-1}\Big)\geqslant 0. \quad (7)$$

Тогда для любых комплексных чисел $x_1,\ldots,x_N$ справедливо неравенство

$$\sum_{k,\ell=1}^{N}a_{k,\ell}x_k\bar{x}_\ell\geqslant 0. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольные комплексные числа $x_1,\ldots$ $\ldots,x_N$. Заменяя в неравенстве (7) α_μ на $\alpha_\mu(x_1z_\mu^{N-1}+x_2z_\mu^{N-2}+\ldots+x_N)$, получаем неравенство

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar{\alpha}_\nu\Big(\sum_{k,\ell=1}^{\infty}V_{k,\ell}(x_1,\ldots,x_N)z_\mu^{k-1}\bar{z}_\nu^{\ell-1}\Big)\geqslant 0, \quad (9)$$

где

$$V_{N,N}(x_1,\ldots,x_N)=\sum_{k,\ell=1}^{N}a_{k,\ell}x_k\bar{x}_\ell.$$

Пусть $z_\mu=r_\mu e^{i\varphi_\mu}$ $(\mu=1,\ldots,n)$. Заменяя в (9) α_μ на $\alpha_\mu e^{-i\varphi_\mu(N-1)}$, приходим к неравенству

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar{\alpha}_\nu\Big(\sum_{k,\ell=1}^{\infty}V_{k,\ell}(x_1,\ldots,x_N)r_\mu^{k-1}r_\nu^{\ell-1}e^{i(k-N)\varphi_\mu}e^{-i(\ell-N)\varphi_\nu}\Big)\geqslant 0.$$

Тогда в силу известного результата (см. [7], стр.316) имеем неравенство

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar{\alpha}_\nu\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{k,\ell=1}^{\infty}V_{k,\ell}r_\mu^{k-1}r_\nu^{\ell-1}e^{i\varphi_\mu(k-N)}e^{-i\varphi_\nu(\ell-N)}\Big)d\varphi_\mu\,d\varphi_\nu\geqslant 0.$$

Отсюда находим, что

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\alpha_\mu\bar{\alpha}_\nu V_{N,N}(x_1,\ldots,x_n)r_\mu^{N-1}r_\nu^{N-1}\geqslant 0,$$

следовательно, $V_{N,N}(x_1,\ldots,x_N)\geqslant 0$. Лемма доказана.

3 . Как и выше, через S_r обозначаем класс функций из S с вещественными коэффициентами $c_2,c_3,\ldots$ в разложении (I).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(z)\in S_r$. Тогда для произвольных комплексных чисел $x_1,\ldots,x_N$ имеют место неравенства

$$\sum_{k,\ell=1}^{N}(a_{k,\ell}-c_kc_\ell)x_k\bar{x}_\ell\geqslant 0, \quad (10)$$

$$\sum_{k,\ell=1}^{N}a_{k,\ell}x_k\bar{x}_\ell\geqslant 0, \quad (11)$$

где $a_{k,\ell}$ определяются равенствами (ж),

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая неравенство (6′) и применив лемму, получаем неравенство (10). Это неравенство можно записать в виде

$$\sum_{k,\ell=1}^{N} a_{k,\ell}\, x_k \bar{x}_\ell \geqslant \sum_{k,\ell=1}^{N} c_k c_\ell\, x_k \bar{x}_\ell = \left| \sum_{k=1}^{N} c_k x_k \right|^2 .$$

Отсюда следует (11). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. В классе S_r имеют место неравенства

$$(c_{n+2}-c_n)^2 \leqslant 2 + (c_{2n+3}-c_{2n+1}); \quad n=1,2,\ldots \qquad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в неравенстве (10) $N=n+2, x_n=1$, $x_{n+1}=0, x_{n+2}=-1, x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=0$, получаем

$$(a_{n,n}-c_n^2)-(a_{n,n+2}-c_n c_{n+2})-(a_{n+2,n}-c_{n+2}c_n)+(a_{n+2,n+2}-c_{n+2}^2) \geqslant 0$$

или

$$a_{n,n}-2a_{n,n+2}+a_{n+2,n+2} \geqslant (c_{n+2}-c_n)^2 . \qquad (13)$$

Так как $a_{n,n}=c_1+c_3+\ldots+c_{2n-1}, a_{n,n+2}=c_3+c_5+\ldots+c_{2n+1}, a_{n+2,n+2}=c_1+c_3+\ldots+c_{2n+3}$, то из (13) получаем (12). Теорема доказана.

4 . Хорошо известно [8] , что в классе S_r имеют место точные неравенства $-1 \leqslant c_3 \leqslant 3$. Следующие теоремы дают оценки роста коэффициентов c_n в классе S_r в зависимости от c_3 .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f(z)\in S_r$. Тогда справедливы неравенства

$$|c_{2n-1}+c_{2n+1}| \leqslant (1+c_3)\, n, \qquad (14)$$

$$|c_{2n-2}+c_{2n}| \leqslant \sqrt{(1+c_3)\left[1+(1+c_3)(n^2-n)\right]}; \quad n=1,2,\ldots \qquad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в (11) $x_1=x_3=x_4=\ldots=x_{2k-1}=0, N=2k, x_{2k}=1$, $x_2=t$, где t - произвольное вещественное число, находим, что $a_{2,2}t^2+a_{2,2k}t+a_{2k,2}t+a_{2k,2k} \geqslant 0$, то есть $a_{2,2}t^2+$ $+2a_{2,2k}t+a_{2k,2k}\geqslant 0$. Следовательно,

$$a_{2,2k}^2 \leqslant a_{2,2}\, a_{2k,2k} . \qquad (16)$$

Учитывая, что $a_{2,2}=1+c_3, a_{2,2k}=c_{2k-1}+c_{2k+1}, a_{2k,2k}=c_1+c_3+\ldots+c_{4k-1}$, из (16) получаем

$$(c_{2k-1}+c_{2k+1})^2 \leqslant (1+c_3)(1+c_3+\ldots+c_{4k-1}). \qquad (17)$$

Рассмотрим выражение $1+c_3$. Если $1+c_3=0$, то есть $c_3=-1$, то из неравенства (17) следует, что $c_1=-c_3=c_5=\ldots=(-1)^{k+1}c_{2k-1}=1$.

Полагая в (10) $N=2k$, $x_1=x_2=\ldots=x_{2k-1}=0$, $x_{2k}=1$, находим

$$c_{2k}^2 \leqslant 1+c_3+c_5+\ldots+c_{4k-3}+c_{4k-1} \quad . \qquad (18)$$

Так как $1+c_3=c_5+c_7=\ldots=c_{4k-3}+c_{4k+1}=0$, то $c_{2k}=0$. Следовательно, если $1+c_3=0$, то $f(z)=z-z^3+z^5+\ldots+(-1)^{k+1}z^{2k-1}+\ldots=z/(1+z^2)$.

Полагая в (11) $N=2$, $x_1=0$, $x_2=1$, получаем известное неравенство $1+c_3\geqslant 0$, то есть $c_3\geqslant -1$. Случай, когда $c_3=-1$, мы уже рассмотрели. Перейдем к случаю, когда $c_3>-1$, то есть $1+c_3>0$.

Рассмотрим последовательность $\left\{\frac{|c_{2n-1}+c_{2n+1}|}{(1+c_3)n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Очевидно, что эта последовательность ограничена. Пусть $k_f=\sup\left\{\frac{|c_{2n-1}+c_{2n+1}|}{(1+c_3)n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Ясно, что $k_f\geqslant 1$ и что

$$|c_{2n-1}+c_{2n+1}| \leqslant k_f\,(1+c_3)n, \quad n=1,2,\ldots \qquad (19)$$

Из неравенств (17) и (19) легко получаем, что

$$(c_{2n-1}+c_{2n+1})^2\leqslant(1+c_3)^2\left[1+k_f(3+5+\ldots+(2n-1))\right]\leqslant k_f(1+c_3)^2n^2,$$

то есть выполняется неравенство

$$(c_{2n-1}+c_{2n+1})^2\leqslant k_f(1+c_3)^2n^2 . \qquad (20)$$

Из определения k_f следует, что для всякого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такой номер N, что имеет место неравенство

$$|c_{2N-1}+c_{2N+1}|\geqslant(1+c_3)N(k_f-\varepsilon).$$

Отсюда и из неравенства (20) при $n=N$ получаем

$$(1+c_3)^2N^2(k_f-\varepsilon)^2\leqslant(1+c_3)^2N^2k_f ,$$

или

$$(k_f-\varepsilon)^2\leqslant k_f .$$

Устремляя ε к нулю, получаем, что $k_f^2\leqslant k_f$, а так как $k_f\geqslant 1$, то отсюда вытекает, что $k_f=1$. Отсюда и из (20) получаем (14).

Перейдем к доказательству неравенства (15). Полагая в (11) $N=2n-1$, $x_{2n-1}=1$, $x_1=x_3=x_4=\ldots=x_{2n-2}=0$, $x_2=t$, где t – произвольное вещественное число, получаем $a_{2,2}t^2+a_{2,2n-1}t+a_{2n-1,2}t+a_{2n-1,2n-1}\geqslant 0$, то есть $a_{2,2}t^2+2a_{2,2n-1}t+a_{2n-1,2n-1}\geqslant 0$. Отсюда находим

$$a_{2,2n-1}^2\leqslant a_{2,2}a_{2n-1,2n-1} . \qquad (21)$$

Учитывая, что

$$a_{2,2}=1+c_3,\ a_{2,2n-1}=c_{2n-2}+c_{2n},\ a_{2n-1,2n-1}=1+c_3+c_5+\ldots+c_{4n-3}. \qquad (21)$$

из (21) получаем

$$(c_{2n-2}+c_{2n})^2\leqslant(1+c_3)(1+c_3+c_5+\ldots+c_{4n-3}),\quad n=1,2,\ldots \qquad (22)$$

Из (22) и (14) находим

$$(c_{2n-2}+c_{2n})^2\leqslant(1+c_3)\left[1+(1+c_3)(2+4+\ldots+(2n-2))\right]=$$
$$=(1+c_3)\left[1+(1+c_3)(n^2-n)\right],\quad n=1,2,\ldots,$$

то есть справедливо (15). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. В классе $S_{\mathbb{R}}$ справедливы неравенства

$$|c_{2n}|\leqslant\sqrt{1+c_3}\ n, \qquad (23)$$

$$|c_{2n-1}|\leqslant\sqrt{1+(1+c_3)(n^2-n)};\quad n=1,2,\ldots \qquad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в (10) $N=2n, x_{2n}=1, x_1=x_2=\ldots=x_{2n-1}=0$, получаем

$$c_{2n}^2\leqslant 1+c_3+\ldots+c_{4n-3}+c_{4n-1}. \qquad (25)$$

Применяя к правой части (25) неравенство (14) при $k=1,3,5,\ldots,2n-1$, находим

$$c_{2n}^2\leqslant(1+c_3)\left[1+3+5+\ldots+(2n-1)\right]=(1+c_3)n^2.$$

Это и есть (23). Из (10) при $N=2n-1, x_1=\ldots=x_{2n-2}=0, x_{2n-1}=1$ вытекает неравенство

$$c_{2n-1}^2\leqslant 1+c_3+c_5+\ldots+c_{4n-5}+c_{4n-3}.$$

Используя это неравенство точно также, как выше использовалось неравенство (25), находим

$$c_{2n-1}^2\leqslant 1+(1+c_3)\left[2+4+\ldots+(2n-2)\right]=1+(1+c_3)(n^2-n),$$

т.е. приходим к неравенству (24). Теорема доказана.

Литература

1. J e n k i n s J.A. Some problems for typically real functions. - Canad.Math.J., 1961, vol.13, N 3, p.299-304.
2. А л е н и ц ы н Ю.Е. Об областях изменения систем коэффициентов функций, представимых суммой интегралов Стилтьеса - Вестн.ЛГУ, 1962, № 7. Сер.мат., мех., астрон.,вып.2, с.25-41.

3. Г о л у з и н а Е.Г. О типично вещественных функциях с фиксированным вторым коэффициентом. - Вестн.ЛГУ, 1962, № 7. Сер. мат., мех., астрон., вып.2, с.62-70.
4. L e e m a n G. The constrained coefficient problem for typically real functions. - Trans.Amer.Math.Soc., 1973, vol.186, p.177-189.
5. Л е б е д е в Н.А., М и л и н И.М. О коэффициентах некоторых классов аналитических функций. - Мат.сб., 1951, т.28, № 2, с.359-400.
6. J e n k i n s J.A. On a problem of Gronwall. - Math.Ann., 1954, vol.59, N 3, p.490-504.
7. Л е б е д е в Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций. М., 1975. 336 с.
8. R o g o s i n s k i W. Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reele Potenzreihen. - Math.Z., 1932, Bd35, Hf 1, S.93-121.