КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

*Вып. 14* *Труды семинара по краевым задачам* *1977*

**БИКЧАНТАЕВ И. А.**

# О КУСОЧНО-МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ НА ОТКРЫТОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть $R$ — открытая риманова поверхность, $L$ — кусочно-гладкий контур на $R$, т. е. замыкание множества, состоящего из счетного числа непересекающихся гладких ориентируемых открытых кривых $L_j$, $j=1, 2, \ldots$, гомеоморфных интервалу (0,1) числовой оси, причем замыкание $\bar{L}_j$ компактно в $R$ и для любого компактного множества $K \subset R$ лишь конечное число кривых $L_j$ имеет непустое пересечение с $K$. Обозначим через $\Lambda = \{t_1, t_2, \ldots\}$ множество точек $\{L - \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} L_j\}$. Очевидно, множество $\Lambda$ не имеет предельных точек на $R$ и в каждой точке $t_k \in \Lambda$ начинается или оканчивается конечное число кривых $L_j$. Обратно, концы каждой кривой $L_j$ содержатся среди точек множества $\Lambda$ и могут, в частности, совпадать. На каждой кривой $L_j$ задана $H$-непрерывная функция $G_j(t) \neq \neq 0$, $H$—непрерывно продолжимая на начальную и концевую точки кривой $L_j$, причем предельные значения на концах $L_j$ конечны, отличны от нуля и не обязательно различны. Через $G(t)$ обозначим функцию, определенную на $L - \Lambda$, сужение которой на $L_j$ есть $G_j(t)$, $j=1, 2, \ldots$. Задан дивизор $J$, составленный из точек множества $\Lambda$, взятых с произвольными целыми кратностями. На $R - L$ задан другой дивизор $D$, носитель которого состоит из счетного числа точек и не имеет предельных точек на $R$. Аналогично предыдущему зададим на $L - \Lambda$ еще одну $H$-непрерывную на кривых $L_j$ функцию $g(t)$, кратную дивизору $J^{-1}$. Кроме того, если точка $t_k \in \Lambda$ принадлежит дивизору $J^{-1}$ с кратностью $n_k$, то будем считать, что на каждой кривой $L_j$, один из концов которой совпадает с $t_k$, функции $z^{-n_k} g[p_k(z)]$ ($p_k(z) \in L_j$, $z$ — локальный параметр, $p_k(0) = t_k$) $H$-непрерывно продолжимы в точку $z=0$. Здесь и далее мы пользуемся терминологией из хорошо известной работы Э. И. Зверовича [1].

Целью настоящей заметки является выявление структуры всех кусочно-мероморфных (при $D=1$ кусочно-аналитических) функций $f(q)$ на $R$ с линией скачков $L$, кратных дивизору $D^{-1}$ в $R-L$, $H$-непрерывно продолжимых на $L-\Lambda$, где должно выполняться краевое условие

$$f^{+}(t)=G(t)f^{-}(t)+g(t).$$

В окрестности точек множества $\Lambda$ функции $f(q)$ должны быть псевдократны дивизору $J^{-1}$.

Постановка задачи и способ нахождения искомых функций во многом аналогичны постановке и методу решения задачи Римана на замкнутой римановой поверхности [1]. Однако при наличии у римановой поверхности идеальной границы соответствующие классы искомых функций перестают быть конечномерными (разумеется, если на них не наложено никаких дополнительных условий, например, типа суммируемости [2], [3]). Если на искомые функции не налагать никаких ограничений относительно их поведения в окрестности идеальной границы, то использование результатов Бенке и Штейна позволяет игнорировать наличие негомологичных нулю циклов на $R$, что существенно упрощает построение решения.

Начнем с решения задачи „о скачке"

$$f^{+}(t)-f^{-}(t)=g(t),\quad J^{-1}D^{-1}\wr(f),\quad t\in L. \tag{1}$$

Согласно [4], [5] существует такая мероморфная на $R$ функция $\omega_1(q)$, что $(\omega_1)=JD$. Введем новую неизвестную функцию $f_1(q)=\omega_1(q)f(q)$, которая в отличие от $f(q)$ не имеет особенностей в точках дивизора $D$, а в точках множества $\Lambda$ псевдократна единичному дивизору. На контуре $L$ функция $f_1(q)$ удовлетворяет следующему краевому условию

$$f_1^{+}(t)-f_1^{-}(t)=\omega_1(t)g(t),\quad t\in L-\Lambda. \tag{2}$$

На каждой кривой $L_j$ функция $\omega_1(t)g(t)$ $H$-непрерывно продолжима на концевые точки. Пусть $A(p,q)\,dp$ — аналог ядра Коши на римановой поверхности $R$. Относительно переменной $q$ это мероморфная функция с единственным полюсом первого порядка в точке $q=p$, а относительно переменной $p$ — мероморфный дифференциал с единственным полюсом первого порядка в точке $p=q$ с вычетом, равным 1. Существование такого ядра доказано в работе [6]. Формальный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\omega_1(t)g(t)A(t,q)\,dt \tag{3}$$

удовлетворяет, очевидно, краевому условию (2). Каждый член ряда (3) в концевых точках соответствующей кривой $L_k$

может иметь лишь логарифмическую особенность ([7], с. 73). Чтобы получить неформальное решение задачи (1), ряд (3) следует подправить таким образом, чтобы он стал сходящимся. Для этого рассмотрим исчерпание открытой римановой поверхности $R$ областями $R_n$ такими, что 1) любая область $R_n$ ограничена аналитическими кривыми, 2) любое замыкание $\overline{R}_n$ компактно, 3) $\overline{R}_n \subset R_{n+1}$, 4) $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$, 5) $R_n$ односвязна относительно $R_{n+1}$ (т. е. $R_{n+1} - R_n$ не имеет компактных компонент). Такое исчерпание называется нормальным. Кроме того, последовательность $\{R_n\}$ можно выбрать так, что $\Lambda \cap \partial R_n = \varnothing$, $n = 1, 2, \ldots$ (см. [6] или [5]). Обозначим через $\Gamma_1$ множество тех кривых $L_j$, которые имеют непустое пересечение с $\overline{R}_1$; через $\Gamma_n$, $n = 2, 3, \ldots$, обозначим совокупность кривых $L_j$ таких, что $L_j \cap \overline{R}_{n-1} = \varnothing$ и $L_j \cap \overline{R}_n \neq \varnothing$. Не уменьшая общности можно считать, что $\Gamma_n \neq \varnothing$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Действительно, этого всегда можно добиться, переходя от последовательности $\{R_n\}$ к ее подпоследовательности $\{R_{n_k}\}$, которая тоже составляет нормальное исчерпание поверхности $R$. (Мы исключаем здесь тривиальный случай, когда контур $L$ состоит из конечного числа кривых. В этом случае уже ряд (3) дает нам решение задачи (2)). Интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} \omega_1(t) g(t) A(t, q)\, dt$$

является аналитической функцией всюду вне замыкания множества точек контура $\Gamma_n$ и, в частности, на множестве $\overline{R}_{n-1}$. Из аппроксимационной теоремы Бенке и Штейна [6] следует, что для любого положительного числа $\varepsilon_n$ существует аналитическая на $R$ функция $\delta_n(q)$ такая, что

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} \omega_1(t) g(t) A(t, q)\, dt - \delta_n(q) \right| < \varepsilon_n$$

для всех точек $q \in \overline{R}_{n-1}$. Выберем положительные числа $\varepsilon_n$ так, чтобы сходился ряд $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots$. Тогда ряд

$$\theta_1(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} \omega_1(t) g(t) A(t, q)\, dt - \delta_n(q) \right], \quad \delta_1(q) \equiv 0,$$

равномерно сходится на любом компактном множестве $K \subset R$ (если отбросить конечное число членов, которые могут обращаться в бесконечность в точках $\Lambda \cap K$). Сумма $\theta_1(q)$

этого ряда является аналитической на $R-L$, в точках контура $L$ удовлетворяет краевому условию (2), а в точках множества $\Lambda$ псевдократна единичному дивизору. Произвольное решение задачи (2) имеет вид $f_1(q)=\theta_1(q)+P(q)$, где $P(q)$ — произвольная аналитическая функция на $R$. Отсюда получаем общее решение задачи (1)

$$f(q)=\frac{\theta_1(q)+P(q)}{\omega_1(q)}.$$

Перейдем к однородной задаче

$$f^+(t)=G(t)f^-(t),\ J^{-1}D^{-1}|(f),\ t\in L. \tag{4}$$

Положим

$$\Gamma(q)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\ln G(\tau)A(\tau,\ q)\,d\tau-\xi_n(q)\right]. \tag{5}$$

Здесь под $\ln G(\tau)$ на каждой кривой $L_j$ понимается фиксированная однозначная ветвь логарифма $\ln G_j(\tau)$; функции $\xi_n(q)$, аналитические на $R$, выбираются аналогично предыдущему так, чтобы ряд (5) равномерно сходился на каждом компактном множестве $K\subset R-\Lambda$. Введем кусочно-аналитическую функцию $\chi(q)=\exp\Gamma(q)$, где $\Gamma(q)$ определяется формулой (5). Очевидно, $\chi(q)$ аналитична на $R-L$, отлична от нуля в области $R-\Lambda$ и на $L-\Lambda$ удовлетворяет краевому условию

$$\chi^+(t)=G(t)\chi^-(t).$$

Выпишем известные асимптотические представления функции $\chi(q)$ в окрестностях точек множества $\Lambda$ (см., например, [1], [7], [8]). Пусть кривая $L_j$ контура $L$ начинается в точке $t_k$ и оканчивается в точке $t_l$ множества $\Lambda$ (возможно $k=l$). Обозначим через $G_j(t_k+0)$ и $G_j(t_l-0)$ предельные значения функции $G_j(t)$ соответственно в начальной и конечной точках кривой $L_j$. Пусть $q=q(z)$, где $z$ — локальная униформизирующая в окрестности точки $t_k$, $t_k=q(0)$. Имеет место следующее асимптотическое представление функции $\chi(q)$ в окрестности точки $t_k$:

$$\chi[q(z)]=\chi_k(z)\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\left[\sum_j{}''\ln G_j(t_k-0)-\sum_j{}'\ln G_j(t_k+0)\right]\ln z\right\},$$

где $|\chi_k(z)|$ ограничен сверху и снизу при $z\to\infty$; сумма $\sum'$ $(\sum'')$ распространяется на все кривые $L_j$, которые начинаются (оканчиваются) в точке $t_k$. Следовательно, нули и бесконечности функции $\chi(q)$ образуют квазидивизор $(\chi)=t_1^{\varkappa_1}t_2^{\varkappa_2}\ldots$, где числа $\varkappa_k$ определены формулами

$$\varkappa_k = \frac{1}{2\pi}\left[\sum_j{}'' \arg G_j(t_k - 0) - \sum_j{}' \arg G_j(t_k + 0)\right].$$

Введем дивизор $E = t_1^{[\varkappa_1]} t_2^{[\varkappa_2]} \ldots$, где $[\varkappa_k]$ — целая часть числа $\varkappa_k$. Очевидно, $E \mid (\chi)$ и $(\chi) \parallel E$ (ср. [1]). Пусть $F(q) = f(q)/\chi(q)$ — новая неизвестная функция. Из свойств $\chi(q)$ следует, что $F(q)$ — мероморфная функция, кратная дивизору $J^{-1}D^{-1}E^{-1}$. Таким образом, произвольное решение однородной задачи (4) имеет вид

$$f(q) = \chi(q) F(q),$$

где $F(q)$ — произвольная мероморфная функция, кратная дивизору $J^{-1}D^{-1}E^{-1}$. Это решение можно переписать в другой форме

$$f(q) = \frac{\chi(q) P(q)}{\omega(q)},$$

где $\omega(q)$ — мероморфная на $R$ функция такая, что $(\omega) = JDE$, $P(q)$ — произвольная аналитическая функция на $R$.

Наконец, рассмотрим вопрос о структуре кусочно-мероморфных функций $f(q)$, удовлетворяющих условию

$$f^+(t) = G(t) f^-(t) + g(t), \quad J^{-1}D^{-1} \wr (f), \quad t \in L. \tag{6}$$

Введем новую неизвестную функцию $\theta(q) = f(q)\,\omega(q)/\chi(q)$, где $\chi(q)$ и $\omega(q)$ определены выше. Эта функция аналитична на $R - L$, на контуре $L$ удовлетворяет краевому условию

$$\theta^+(t) - \theta^-(t) = g(t)\,\omega(t)/\chi(t), \quad t \in L - \Lambda, \tag{7}$$

и в точках множества $\Lambda$ квазикратна единичному дивизору. Далее легко видеть, что функция $g(t)\,\omega(t)/\chi(t)$ $H$-непрерывна на кривых $L_j$, а на их концах имеет интегрируемую особенность. Сумма равномерно (на каждом компактном множестве $K \subset R - \Lambda$) сходящегося ряда

$$\theta(q) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} \frac{\omega(t)\,g(t)}{\chi(t)} A(t, q)\,dt - \eta_n(q)\right],$$

где аналитические на $R$ функции $\eta_n(q)$ выбираются из тех же соображений, что и выше, удовлетворяет условию (7). Ясно, что функция $\chi(q)\,\theta(q)/\omega(q)$ $H$-непрерывна на кривых $L_j$ и на их концах квазикратна дивизору $J^{-1}D^{-1}$. Из асимптотических свойств интеграла типа Коши ([8], § 22) вытекает более точный результат, а именно, что эта функция псевдократна дивизору $J^{-1}D^{-1}$. Значит $\chi(q)\,\theta(q)/\omega(q)$ есть одно из решений задачи (6). Произвольная кусочно-мероморфная функция, удовлетворяющая условиям (6), имеет вид

$$f(q) = \frac{\chi(q)}{\omega(q)}[\theta(q) + P(q)],$$

где $P(q)$ — произвольная аналитическая на $R$ функция.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Зверович Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях. — УМН, 1971, т. 26, вып. 1 (157), с. 113—180.
2. Абдулаев Р. Н. Задача Сохоцкого на открытых поверхностях. — „Уч. зап. Пермского ун-та", 1963, т. 103, с. 3—6.
3. Абдулаев Р. Н. Задача Римана на открытых римановых поверхностях. — „Уч. зап. Пермского ун-та", 1963, т. 103, с. 143—146.
4. Behnke H., Sommer F. Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Berlin, Springer-Verlag, 1962.
5. Кра И. Автоморфные формы и клейновы группы. М., „Мир", 1975.
6. Behnke H., Stein K. Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannischen Flächen. — Math. Ann., 1949, v. 120, № 4, S. 430—461.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1968.


*Доложено на семинаре 3 февраля 1976 года.*