Г. Н. Гестрин, Интеграл Фейнмана и разложение по собственным функциям оператора Шрёдингера,
Функц. анализ и его прил., 1976, том 10, выпуск 1, 75–76

Функциональный анализ и его приложения,
т. 10, вып. 1, 1976, 75—76.

ИНТЕГРАЛ ФЕЙНМАНА И РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Г. Н. Гестрин

В заметке с помощью специальной конструкции интеграла Фейнмана обосновывается разложение по собственным функциям уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом. Пусть $x \in \mathbf{R}^3$, $v^{(0)}(x)$ и $v^{(1)}(x)$ вещественны, $v^{(0)}(x)$ измерима и локально ограничена, $v^{(1)}(x) \in L_2(\mathbf{R}^3)$ или $v^{(1)}(x) = v_1^{(1)}(x) + v_2^{(1)}(x)$, где $v_1^{(1)}(x) \in L_2(\mathbf{R}^3)$, а $v_2^{(1)}(x)$ непрерывна всюду, за исключением изолированных точек, в окрестностях которых неограничена и не суммируема с квадратом. Операторы $H_0 = -\Delta + v^{(0)}(x)$ и $H_1 = -\Delta + v^{(0)}(x) + v^{(1)}(x)$ определены первый на достаточно гладких финитных функциях, второй — на таких же функциях, равных нулю еще и в окрестностях сингулярностей $v_2^{(1)}(x)$, и симметричны. Пусть $\widetilde{H}_0$ — некоторое самосопряженное расширение H_0, $T_0(t) = \exp(-it\widetilde{H}_0)$, $v_\tau^{(1)}(x) = v^{(1)}(x)$, если $|v^{(1)}(x)| < \tau^{-1/4}$ $v_\tau^{(1)}(x) = \operatorname{sign} v^{(1)}(x)\,\tau^{-1/4}$, если $|v^{(1)}(x)| \geqslant \tau^{-1/4}$. Пусть $f(x) \in L_2(\mathbf{R}^3)$. Положим

$$T_\tau f = \exp\left(-\frac{i\tau}{2} v_\tau^{(1)}\right) T_0(\tau) \exp\left(-\frac{i\tau}{2} v_\tau^{(1)}\right) f; \quad Q_\tau(t) f = T_\tau^k f$$
$$(k\tau \leqslant t < (k+1)\tau, \quad k = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Через $L_2^{(s)}$ обозначим пространство функций $\psi(x, t)$, $x \in \mathbf{R}^3$, $t \in [0, s]$ $(s > 0)$, суммируемых с квадратом на $\mathbf{R}^3 \times [0, s]$.

Определение. Если существует сильно непрерывный при $t \geqslant 0$ оператор $Q(t)$ в $L_2(\mathbf{R}^3)$ такой, что для всех $s > 0$ и всех f из $L_2(\mathbf{R}^3)$

$$\lim_{\tau\to 0} \| Q_\tau(t) f - Q(t) f \|_{L_2^{(s)}} = 0, \tag{2}$$

то он называется *интегралом Фейнмана*, отвечающим расширению $\widetilde{H}_0$. Если $v^{(0)}(x) \equiv 0$, $f \in L_2 \cap L_1$, $T_0(\tau) f = (4\pi i\tau)^{-3/2} \int \exp\left(\frac{i}{4\tau} |x-y|^2\right) f(y) dy$, то формально

$$Q(t)\psi = \lim_{\tau\to 0,\, k\tau = t} (4\pi i\tau)^{-\frac{3k}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} -(3k)-$$
$$-\int \exp\left\{ i\left\{ \frac{|x-y_{k-1}|^2 + \cdots + |y_1 - y_0|^2}{\tau} - \tau \sum_{j=1}^{k-1} v_\tau^{(1)}(y_j) \right\} - \right.$$
$$\left. -\frac{i\tau}{2}\left(v_\tau^{(1)}(x) + v_\tau^{(1)}(y_0)\right) \right\} \psi(y_0)\, dy_0 \ldots dy_{k-1},$$

и полученное выражение только множителем $\exp\left(-\frac{i\tau}{2}\left(v_\tau^{(1)}(x) + v_\tau^{(1)}(y_0)\right)\right)$ под интегралом, стремящимся к единице при $\tau \to 0$, и значком τ у потенциала отличается от фейнмановской амплитуды вероятности. О строгих определениях интеграла Фейнмана см. [1], [2]. Приведенное определение в частном случае $v^{(0)}(x) \equiv 0$ изучалось автором в [3]. Существенным моментом является использование пространства $L_2^{(s)}$.

Теорема 1. *Если предельный оператор $Q(t)$ в (2) существует, то он унитарен, $Q(0) = E$, $Q(t+s) = Q(t)Q(s)$ $(t, s \geqslant 0)$.*

Пусть $\widetilde{H}_1$ — инфинитезимальный оператор полугруппы $Q(t)$. Слабо измеримая полугруппа унитарных операторов имеет в качестве инфинитезимального самосопряженный оператор $i\frac{dQ(t)f}{dt} = \widetilde{H}_1 Q(t) f$ и для $f \in D_{\widetilde{H}_1}$ ([4], стр. 836).

Так как $\|Q_\tau(t) f\| = \sqrt{s}\|f\|_{L_2}$, то при фиксированном f множество $Q_\tau(t)f$ слабо компактно в $L_2^{(s)}$.

Теорема 2. *Пусть $v^{(0)}(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, $v^{(1)}(x) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^3)$, $\psi(x, t)$ — слабый предел* в $L_2^{(s)}$ *какой-либо последовательности $Q_{\tau_m}(t) f$ при $\tau_m \to 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Тогда*

$$\int_0^s \int_G \psi(x, t)(ig_t'(x, t) - (\Delta - v^{(0)}(x) - v^{(1)}(x))\, g(x, t))\, dx\, dt = -i \int_G f(x)\, g(x, 0)\, dx, \qquad (3)$$

где G — произвольная ограниченная область в $\mathbf{R}^3$, $g(x, t)$ — произвольная достаточно гладкая функция, равная нулю вблизи верхнего основания и боковой поверхности цилиндра $G \times [0, s]$, т. е. $\psi(x, t)$ является обобщенным решением задачи Коши для уравнения Шредингера. Если при сделанных предположениях так понимаемое обобщенное решение единственно, то интеграл Фейнмана существует (и не зависит от расширения H_0), что, в частности, верно, когда H_1 существенно самосопряжен.

Замечание. Недавно полученный Т. Като [5] признак существенной самосопряженности оператора Шредингера в сопоставлении с теоремой 2 показывает, что для существования интеграла Фейнмана в смысле данного выше определения достаточно, чтобы $v^{(0)}(x) > -q^{(0)}(|x|)$, где $q^{(0)}(\xi)$ монотонна и растет при $|\xi| \to \infty$ медленнее, чем ξ^2, а $v^{(1)}(x)$ удовлетворяла условиям Штуммеля.

Теорема 3. *Если $v^{(0)}(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, $v^{(1)}(x) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^3)$ или $v^{(1)}(x) = v_1^{(1)}(x) + v_2^{(1)}(x)$, где $v_1^{(1)}(x) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^3)$, а $v_2^{(1)}(x)$ непрерывна всюду, за исключением изолированных точек, в которых имеет несуммируемые квадратично особенности, и при этом интеграл Фейнмана существует, то инфинитезимальный оператор $\widetilde{H}_1$ полугруппы $Q(t)$ является самосопряженным расширением для H_1.*

Теорема 4. *Пусть $v^{(0)}(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, $v^{(1)}(x)$ отлична от нуля в ограниченной области D и суммируема с квадратом в D, интеграл Фейнмана, соответствующий самосопряженному расширению $\widetilde{H}_0$ оператора $-\Delta + v^{(0)}(x)$ существует, $R_\mu^{(0)}$ — резольвента $\widetilde{H}_0$, $p(x) \geqslant 1$ такова, что абсолютная норма $|R_\mu^{(0)} p^{-1/2}|$ конечна, $R_\mu^{(1)}$ — резольвента $\widetilde{H}_1$. Тогда конечна норма $|R_\mu^{(1)} p^{-1/2}|$.*

Теорема 4 позволяет применить к $\widetilde{H}_1$ известные общие результаты Ю. М. Березанского [6] о разложении по собственным функциям. Обозначая через $\rho(\lambda)$ величину сл $(p^{-1/2} E_\lambda^{(1)} p^{-1/2})$, где $E_\lambda^{(1)}$ — разложение единицы $\widetilde{H}_1$, имеем для любых f и g из $L_2(\mathbf{R}^3, p\,dx)$ и любого борелевского множества $\widetilde{\Delta}$ на вещественной оси

$$(E^{(1)}(\widetilde{\Delta}) f, g) = \int_{\widetilde{\Delta}} \sum_{\alpha=1}^{N\lambda} \overline{(\varphi_\alpha(\lambda), f)}\, (\varphi_\alpha(\lambda), g)\, d\rho(\lambda) \qquad (4)$$

($\varphi_\alpha(\lambda) = \varphi_\alpha(\lambda, x) \in L_2(\mathbf{R}^3, p^{-1}dx)$ и $(\varphi_\alpha(\lambda), (H_1 - \lambda E)\, g) = 0$, $g(x)$ финитна).

Так как условия Штуммеля для $v^{(1)}(x)$ сейчас выполнены, то теорема 4 верна, если выполнено только первое требование упомянутой теоремы Т. Като.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4, причем спектр $\widetilde{H}_0$ состоит только из собственных значений λ_r и при каком-нибудь целом $k > 0$ ряд $\sum_r |\lambda_r^0|^{-2k}$ сходится. Тогда и спектр $\widetilde{H}_1$ чисто дискретен.*

Автор приносит глубокую благодарность Ю. М. Березанскому за обсуждение результатов.

Харьковский физико-технический
институт низких температур АН УССР

Поступило в редакцию
6 мая 1974 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Nelson E., J. Math. Phys. 5, № 3 (1964), 332—343. 2. Далецкий Ю. Л., Итоги науки, 1966, М., 1967, 83—124. 3. Гестрин Г. Н., Теория функций, функц. анализ и его приложения, вып. 12 (1970), изд-во Харьк. ун-та, 69—81. 4. Cooper J. L. B., Ann. Math. 48, № 4 (1947), 827—842. 5. Kato T., Jsr. J. Math. 13, № 1—2 (1972), 135—148. 6. Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, «Наукова думка», 1965.