УДК 510.2.223

А. М. ВДОВИН

ОСНОВЫ НОВОЙ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Представлена новая аксиоматическая теория множеств, состоящая из четырех аксиом. В этой теории выводимы в качестве теорем все аксиомы системы Цермело — Френкеля с аксиомой выбора ZFC за исключением аксиомы регулярности.

В статье излагаются основы новой теории множеств со следующей системой аксиом в логике предикатов первого порядка с равенством:

A1. $\forall f \forall x \exists ! y G(y, f, x)$,

A2. $\forall x \exists ! y F(x, y) \to \exists ! f \forall x F(x, f(x))$,

A3. $\forall f (B(f) \to \exists x (\neg C(f(x)))) \to \exists ! z \forall t (t \in z \leftrightarrow C(t))$,

A4. $\forall u \exists w (M(w) \& u \in w)$,

где x, y, z, t, u, w — переменные 1-го сорта, пробегающие множества, f — переменная 2-го сорта, пробегающая функции, значением и единственным аргументом которых являются множества, G — базовое отношение функциональной связи между одной переменной 2-го сорта и двумя переменными 1-го сорта, $f(x)$ — терм для множеств y таких, что $G(y, f, x)$, $\in$ — базовое отношение принадлежности между двумя переменными 1-го сорта, $F(x, y)$ — произвольная формула, не содержащая переменной f, входящей в формулировку аксиомы A2, $C(t)$ — произвольная формула, не содержащая переменных z, x, f, входящих в формулировку аксиомы A3, и где по определению

$$B(f) \leftrightarrow \forall y (\exists x (y = f(x)) \to \exists ! x (y = f(x))),$$

$$M(w) \leftrightarrow \forall t (t \in w \leftrightarrow \forall x (x \in t \to x \in w) \& \forall f (B(f) \to \exists x (x \in w \& \neg f(x) \in t))).$$

Аксиома A1 даёт определение функций от одной переменной, состоящее в том, что любая функция f находится в базовом отношении G со своим аргументом x и соответствующим значением y.

Асиома A2 задаёт правило образования функций от одной переменной, заключающееся в том, что для любой формулы $F(x, y)$, для которой верно $\forall x \exists ! y F(x, y)$, существует функция f такая, что для любых x и y базовое отношение $G(y, f, x)$ эквивалентно $F(x, y)$.

Теория A1—A2, получающаяся из аксиом A1, A2, суть общая теория функций от одной переменной.

Аксиома A3 задаёт правило образования множеств, согласно которому любая формула $C(t)$, определяющая класс множеств, неравномощный классу всех множеств, определяет множество.

Теория A1—A3, получающаяся из аксиом A1, A2, A3, имеет простейшую модель, состоящую из единственного элемента 1-го сорта $\overline{\varnothing}$ и единственного элемента 2-го сорта $\bar{f}$ таких, что $\neg \overline{\varnothing} \in \overline{\varnothing}$ и $G(\overline{\varnothing}, \bar{f}, \overline{\varnothing})$; следовательно, она непротиворечива.

Любое w такое, что $M(w)$ образует транзитивную модель непротиворечивой теории A1—A3, так как по A3 для любого w

$$\forall f (B(f) \to \exists x (x \in w \& \neg C(f(x)))) \to \exists! z (\forall t (t \in z \leftrightarrow t \in w \& C(t)) \& \\ \& \forall f (B(f) \to \exists x (x \in w \& \neg f(x) \in z))),$$

а если $M(w)$, то

$$\forall f(B(f) \to \exists x(x \in w \& \neg C(f(x)))) \to \exists! z(z \in w \& \forall t(t \in w \to (t \in z \leftrightarrow C(t)))),$$

что является результатом оценки аксиомы A3 на w таком, что $M(w)$.

Таким образом, аксиома A4 утверждает, что любое множество принадлежит некоторой модели непротиворечивой теории A1—A3.

В новой теории множеств, получающейся из аксиом A1, A2, A3, A4, *выводимы, как теоремы, следующие аксиомы системы Цермело — Френкеля: экстенсиональности, пустого множества, пары, степени, выделения, подстановки, объединения, бесконечности, а также аксиома выбора.*

Докажем этот, основной, и сопутствующие результаты. Но сначала уточним некоторые детали.

Переменные 1-го сорта обозначаются буквами s, t, u, v, w, x, y, z с возможными индексами. Переменные 2-го сорта обозначаются буквами f, g, h с возможными индексами.

Логические связки обозначаются следующими символами: конъюнкция — &, дизъюнкция — $\vee$, отрицание — $\neg$, импликация — $\to$, эквивалентность — $\leftrightarrow$. Квантор общности обозначается символом $\forall$, квантор существования — символом $\exists$, квантор единственности существования — символом $\exists!$.

Для обозначения некоторых конкретных формул вводятся сокращения, называемые *производными отношениями*, которые определяются явным образом и записываются как $B(f)$, $x \subseteq y$, $x \subset y$, $M(x)$, $x < y$, $PR(x)$, $\mathrm{ORD}(x)$, где f, x, y — аргументы производных отношений, совпадающие со свободными переменными соответствующих обозначаемых формул.

Для обозначения некоторых конкретных формул вида $D(z)$, для которых доказано (или аксиоматизировано), что $\exists! z D(z)$, вводятся сокращения, называемые *производными функциями*, которые определяются явным образом и записываются как $z = f(x)$, $z = \varnothing$, $z = \{x\}$, $z = \{x, y\}$, $z = f[x]$, $z = P(x)$, $z = \bigcup x$, $z = x \bigcup \{y\}$, $z = \bigcap x$, $z = \omega$, где z — значения, а f, x, y — аргументы производных функций, совпадающие со свободными переменными соответствующих обозначаемых формул. Правые части производных функций: $f(x)$, $\varnothing$, $\{x\}$, $\{x, y\}$, $f[x]$, $P(x) \bigcup x$, $x \bigcup \{y\}$, $\bigcap x$, ω — суть термы, а f, x, y — параметры этих термов.

Аксиомы новой теории множеств обозначаются Ak, теоремы — Tl, определения производных отношений — Rm, определения производных функций — Fn, где k, l, m, n — порядковые номера соответственно аксиом, теорем, определений производных отношений и определений производных функций.

Аксиомы и теоремы, имеющие свободные переменные, предполагаются замкнутыми кванторами общности по всем этим переменным.

A1. Аксиома определения функций. $\forall f \forall x \exists! y G(y, f, x)$.

F1. $y = f(x) \leftrightarrow G(y, f, x)$.

A2. Аксиома образования функций. *Для любой формулы* $F(x, y)$, *не содержащей переменной* f,

$$\forall x \exists! y F(x, y) \to \exists! f \forall x F(x, f(x)).$$

R1. $B(f)\leftrightarrow\forall y(\exists x(y=f(x))\rightarrow\exists!x(y=f(x)))$.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой формулы $F(x, y)$, не содержащей переменной f,*

$\forall x\exists!yF(x, y)\&\forall y(\exists xF(x, y)\rightarrow\exists!xF(x, y))\rightarrow\exists!f(B(f)\&\forall xF(x, f(x)))$.

Доказательство. Пусть посылка теоремы верна. Тогда по A? $\exists!f\forall xF(x, f(x))$, т. е. $\exists!f\forall x\forall y(y=f(x)\leftrightarrow F(x, y))$, что вместе с посылкой теоремы влечет $\exists!f(B(f)\&\forall xF(x, f(x)))$.

ТЕОРЕМА 2. $\forall g\forall h\exists!f(\forall x(f(x)=g(h(x)))\&(B(g)\&B(h)\rightarrow B(f)))$.

Доказательство. Рассмотрим произвольные g и h. Так как $\forall x\exists!y(y=g(h(x)))$, то по A2 $\exists!f\forall x(f(x)=g(h(x)))$. Если $B(g)\&B(h)$, то $\forall y(\exists x(y=g(h(x)))\rightarrow\exists!x(y=g(h(x))))$, откуда по T1 следует $\exists!f(B(f)\&\forall x(f(x)=g(h(x))))$.

A3. Аксиома образования множеств. *Для любой формулы $C(t)$, не содержащей переменных z, x, f,*

$$\forall f(B(f)\rightarrow\exists x(\neg C(f(x))))\rightarrow\exists!z\forall t(t\in z\leftrightarrow C(t)).$$

ТЕОРЕМА 3 (пустого множества). $\exists!z\forall t(\neg t\in z)$.

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из A3 (полагая в ней $C(t)\leftrightarrow\neg t=t$).

F2. $z=\varnothing\leftrightarrow\forall t(\neg t\in z)$.

R2. $t\subseteq w\leftrightarrow\forall x(x\in t\rightarrow x\in w)$.

R3. $t<w\leftrightarrow\exists f(B(f)\&\forall x(x\in t\rightarrow f(x)\in w))\&\forall g(B(g)\rightarrow\exists x(x\in w\&\neg g(x)\in \in t))$.

R4. $M(w)\leftrightarrow\forall t(t\in w\leftrightarrow t\subseteq w\&t<w)$.

A4. Аксиома существования моделей. $\forall u\exists w(M(w)\& \&u\in w)$.

ЛЕММА. $\forall v\forall f(B(f)\rightarrow\exists x(\neg f(x)\in v))$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное w, получаемое по A4 из $u=v$. Поскольку $v\in w$, то по A4 $\forall f(B(f)\rightarrow\exists x(x\in w\&\neg f(x)\in v))$, откуда следует эта лемма.

ТЕОРЕМА 4 (экстенсиональности). $\forall v\exists!z\forall t(t\in z\leftrightarrow t\in v)$.

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из A3 (полагая в ней $C(t)\leftrightarrow t\in v$) и леммы.

ТЕОРЕМА 5 (выделения). *Для любой формулы $D(t)$, не содержащей переменной z,*

$$\forall v\exists!z\forall t(t\in z\leftrightarrow t\in v\&D(t)).$$

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из A3 (полагая в ней $C(t)\leftrightarrow t\in v\&D(t)$ и выбирая переменные x и f такими, чтобы они не входили в $D(t)$) и леммы.

ТЕОРЕМА 6 (пары). $\forall u\forall v\exists!z\forall t(t\in z\leftrightarrow(t=u\vee t=v))$.

Доказательство. Из A4 и T5 (полагая в ней $D(t)\leftrightarrow t=u$ и $v=w$) непосредственно следует, что $\forall u\exists!z\forall t(t\in z\leftrightarrow t=u)$. Положим, по определению,

F3. $z=\{u\}\leftrightarrow\forall t(t\in z\leftrightarrow t=u)$,

и предположим что теорема неверна. Тогда по A3 для некоторых u и v должна существовать f такая, что $B(f)\&\forall x(f(x)=u\vee f(x)=v)$. Но это невозможно, так как $\neg\varnothing=\{\varnothing\}\&\neg\varnothing=\{\{\varnothing\}\}\&\neg\{\varnothing\}=\{\{\varnothing\}\}$, откуда следует

$$\neg f(\varnothing)=u\,\&\neg f(\varnothing)=v\vee\neg f(\{\varnothing\})=u\,\&\neg f(\{\varnothing\})= =v\vee\neg f(\{\{\varnothing\}\})=u\,\&\neg f(\{\{\varnothing\}\})=v.$$

F4. $z=\{u, v\}\leftrightarrow\forall t(t\in z\leftrightarrow(t=u\vee t=v))$.

ТЕОРЕМА 7 (подстановки). $\forall v\forall g\exists!z\forall t(t\in z\leftrightarrow\exists s(s\in v\&t=g(s)))$.

Доказательство. Предположим, что для некоторых v и g эта теорема неверна. Тогда по А3 существует f такая, что $B(f)\&\forall x\exists s(s\in v\&\&f(x)=g(s))$. По Т5 $\exists!y\forall s(s\in y\leftrightarrow s\in v\&\exists x(f(x)=g(s)\&\neg s\in x))$. Так как $\forall x\exists s(s\in v\&f(x)=g(s))\&B(f)$, то и для этого y должно существовать s такое, что $s\in v\&f(y)=g(s)\&\forall x(f(x)=g(s)\to x=y)$, что вместе с определением y влечёт $s\in y\leftrightarrow\neg s\in y$, откуда следует эта теорема.

F5. $z=g[v]\leftrightarrow\forall t(t\in z\leftrightarrow\exists s(s\in v\&t=g(s)))$.

ТЕОРЕМА 8. $\forall g\exists!f(\forall x(f(x)=g[x])\&(B(g)\to B(f)))$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную g. Так как по Т7 $\forall x\exists!y(y=g[x])$, то по А2 $\exists!f\forall x(f(x)=g[x])$. Если $B(g)$, то $\forall y(\exists x(y==g[x])\to\exists!x(y=g[x]))$, откуда по Т1 следует $\exists!f(B(f)\&\forall x(f(x)==g[x]))$.

ТЕОРЕМА 9 (степени). $\forall u\exists!z\forall t(t\in z\leftrightarrow t\subseteq u)$.

Доказательство. Рассмотрим w, получаемое по А4 из некоторого u. Поскольку $u\in w$, то по А4 $\forall t(t\subseteq u\to t\in w)$ (так как $t\subseteq u$ влечёт $t\subseteq w$, а $u<w$ и $t\subseteq u$ влекут $t<w$). Отсюда и по Т5 (полагая в ней $v=w$ и $D(t)\leftrightarrow t\subseteq u$) следует эта теорема.

F6. $z=P(u)\leftrightarrow\forall t(t\in z\leftrightarrow t\subseteq u)$.

ТЕОРЕМА 10 (Кантора). $\forall v(v<P(v))$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого v существует f такая, что $B(f)\&\forall x(x\subseteq v\to f(x)\in v)$. По Т5

$$\exists!z\forall t(t\in z\leftrightarrow t\in v\&\exists x(f(x)=t\&\neg t\in x)).$$

Для этого z: $z\subseteq v$, и, следовательно, в силу предположения $f(z)\in v$. В результате, полагая в определении z: $t=f(z)$ и учитывая $B(f)$, получаем $f(z)\in z\leftrightarrow\neg f(z)\in z$, откуда следует эта теорема.

ТЕОРЕМА 11 (объединения). $\forall u\exists!z\forall t(t\in z\leftrightarrow\exists s(s\in u\&t\in s))$.

Доказательство. Рассмотрим w, получаемое по А4 из некоторого u. Поскольку $u\in w$, то по А4 $\forall s\forall t(s\in u\&t\in s\to t\in w)$. Отсюда и по Т5 (полагая в ней $v=w$ и $D(t)\leftrightarrow\exists s(s\in u\&t\in s)$) следует эта теорема.

F7. $z=\bigcup u\leftrightarrow\forall t(t\in z\leftrightarrow\exists s(s\in u\&t\in s))$.

F8. $z=u\bigcup\{v\}\leftrightarrow\forall t(t\in z\leftrightarrow\exists s(s\in\{u,\ \{v\}\}\&t\in s))$.

R5. $\mathrm{PR}(w)\leftrightarrow\varnothing\in w\&\forall v(v\in w\to v\bigcup\{v\}\in w)$.

ТЕОРЕМА 12 (бесконечности). $\exists w(\mathrm{PR}(w))$.

Доказательство. Рассмотрим w, получаемое по А4 из u такого, что $\neg u=\varnothing$ (например из $u=\{\varnothing\}$).

Так как $\varnothing\subseteq w$, $u\in w$ и $\forall f(\neg f(u)\in\varnothing)$, то по А4 $\varnothing\in w$.

Рассмотрим произвольное $v\in w$. По А4 $v\subseteq w$ и, следовательно, $v\bigcup\{v\}\subseteq w$. Остаётся доказать, что

$$\forall g(B(g)\to\exists x(x\in w\&\neg g(x)\in v\&\neg g(x)=v)).$$

Предположим, что это не так, т. е. что существует g такая, что $B(g)\&\&\forall x(x\in w\to(g(x)\in v\bigvee g(x)=v))$. Тогда по Т1 существует f такая, что

$$B(f)\ \&\ \forall x((x=\{v\}\to f(x)=v)\ \&\ (g(x)=v\to f(x)=g(\{v\}))\ \&$$
$$\&\ (\neg x=\{v\}\ \&\ \neg g(x)=v\to f(x)=g(x))).$$

Так как $\{v\}\in w$ (поскольку $\{v\}\subseteq w\&\forall h(B(h)\to(\neg h(\varnothing)=v\bigvee\neg h(u)==v)))$, то для этой f: $\forall x(x\in w\to(f(x)\in v\bigvee f(x)\in x))$ (поскольку $f(\{v\})=v$ и, следовательно, $f(\{v\})\in\{v\}$, а для остальных $x\in w$: $f(x)\in\in v$). Отсюда и по Т5

$$\exists!z\forall t(t\in z\leftrightarrow\exists x(x\in w\&t=f(x)\&\neg t\in x)).$$

Для этого z: $z\subseteq v$ и, следовательно, $z\in w$. Теперь, полагая в определении z: $t=f(z)$ и учитывая $B(f)$, получаем $f(z)\in z\leftrightarrow\neg f(z)\in z$, откуда следует эта теорема.

ТЕОРЕМА 13 (пересечения). *Для любой формулы* $D(v)$, *не содержащей переменных* t, z,

$$\exists vD(v)\rightarrow\exists!z\forall t(t\in z\leftrightarrow\forall v(D(v)\rightarrow t\in v)).$$

Доказательство. Пусть посылка теоремы верна. Тогда (учитывая лемму и выбирая переменные x и f такими, чтобы они не входили в $D(v)$) $\forall f(B(f)\rightarrow\exists v\exists x(D(v)\&\neg f(x)\in v))$. Отсюда и по A3 (полагая в ней $C(t)\leftrightarrow\forall v(D(v)\rightarrow t\in v)$) следует эта теорема.

F9. $z=\omega\leftrightarrow\forall t(t\in z\leftrightarrow\forall w(\mathrm{PR}(w)\rightarrow t\in w))$.

F10. $\neg u=\varnothing\rightarrow(z=\bigcap u\leftrightarrow\forall t(t\in z\leftrightarrow\forall v(v\in u\rightarrow t\in v)))$.

R6. $x\subset y\leftrightarrow x\subseteq y\&\neg x=y$.

R7. $\mathrm{ORD}(u)\leftrightarrow\forall t(t\in u\leftrightarrow\forall x(x\in t\leftrightarrow x\subset t\&x\in u))$.

ТЕОРЕМА 14. $\forall u(\mathrm{ORD}(u)\leftrightarrow\forall t(t\in u\leftrightarrow t\subset u\&\mathrm{ORD}(t)))$.

Доказательство. Пусть u таково, что $\mathrm{ORD}(u)$, т. е. $\forall t(t\in u\leftrightarrow\forall x(x\in t\leftrightarrow x\subset t\&x\in u))$. Так как $\forall t(t\in u\rightarrow\neg t=u)$ (поскольку иначе было бы: $u\in u\&u\subset u$) и так как $\forall x(x\in u\leftrightarrow\forall y(y\in x\leftrightarrow y\subset x\&y\in u))$, то

$$\forall t(t\in u\leftrightarrow t\subset u\&\forall x(x\in t\leftrightarrow x\subset t\&\forall y(y\in x\leftrightarrow y\subset x\&y\in u))),$$

откуда следует

$$\forall t(t\in u\leftrightarrow\subset u\&\forall x(x\in t\leftrightarrow\forall y(y\in x\leftrightarrow y\subset x\&y\in t))),$$

что означает $\forall t(t\in u\leftrightarrow t\subset u\&\mathrm{ORD}(t))$.

Пусть u таково, что $\forall t(t\in u\leftrightarrow t\subset u\&\mathrm{ORD}(t))$, т. е.

$$\forall t(t\in u\leftrightarrow t\subset u\&\forall x(x\in t\leftrightarrow\forall y(y\in x\leftrightarrow y\subset x\&y\in t))).$$

Тогда

$$\forall t(t\in u\leftrightarrow t\subset u\&\forall x(x\in t\leftrightarrow x\subset t\&\forall y(y\in x\leftrightarrow\\ \leftrightarrow y\subset x\&\forall z(z\in y\leftrightarrow z\subset y\&z\in t)))),$$

откуда следует

$$\forall t(t\in u\leftrightarrow\forall x(x\in t\leftrightarrow x\in u\&x\subset t\&\forall y(y\in x\leftrightarrow\forall z(z\in y\leftrightarrow z\subset y\&z\in x)))).$$

Поскольку по предположению

$$\forall x(x\in u\leftrightarrow x\subset u\&\forall y(y\in x\leftrightarrow\forall z(z\in y\leftrightarrow z\subset y\&z\in x))),$$

то $\forall t(t\in u\leftrightarrow\forall x(x\in t\leftrightarrow x\subset t\&x\in u))$, что означает $\mathrm{ORD}(u)$.

ТЕОРЕМА 15. $\forall u(\forall t(t\in u\rightarrow\mathrm{ORD}(t))\&\neg u=\varnothing\rightarrow\bigcap u\in u)$.

Доказательство. Рассмотрим u такое, что $\forall t(t\in u\rightarrow\mathrm{ORD}(t))\&\neg u=\varnothing$. Тогда по T14

$$\forall t(t\in u\rightarrow\forall x(x\in t\leftrightarrow x\subset t\&\mathrm{ORD}(x))).$$

Докажем, сначала, что $\mathrm{ORD}(\bigcap u)$. В силу того, что $\forall x(x\in\bigcap u\leftrightarrow\forall t(t\in u\rightarrow x\in t))$, получаем $\forall x(x\in\bigcap u\leftrightarrow\forall t(t\in u\rightarrow x\subset t\&\mathrm{ORD}(x)))$, а поскольку $\neg u=\varnothing$, то $\forall x(x\in\bigcap u\leftrightarrow\forall t(t\in u\rightarrow x\subset t)\&\mathrm{ORD}(x))$, что ввиду $\mathrm{ORD}(x)\rightarrow\neg x\in x$ влечёт $\forall x(x\in\bigcap u\leftrightarrow x\subset\bigcap u\&\mathrm{ORD}(x))$. Следовательно, по T14 $\mathrm{ORD}(\bigcap u)$.

Теперь докажем, что $\bigcap u\in u$, т. е. что $\exists t(t\in u\&t=\bigcap u)$. Предположим, что это не так, т. е. что $\forall t(t\in u\rightarrow\bigcap u\subset t)$. Тогда, ввиду $\mathrm{ORD}(\bigcap u)$: $\forall t(t\in u\rightarrow\bigcap u\in t)$, т. е. $\bigcap u\in\bigcap u$, что невозможно, так как по T14 $\forall t(t\in\bigcap u\rightarrow t\subset\bigcap u)$.

ТЕОРЕМА 16 (обобщённая теорема полной упорядоченности).

$$\exists f(B(f)\&\forall x(\mathrm{ORD}(f(x)))).$$

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда по А3 существует z такое, что $\forall t(t\in z\leftrightarrow \mathrm{ORD}(t))$. Учитывая Т14, получаем $\forall t(t\in z\leftrightarrow \forall x(x\in t\leftrightarrow x\subset t\&x\in z))$, т. е. $\mathrm{ORD}(z)$, что влечёт $z\in z$. Но это невозможно, так как по Т14 $\forall t(t\in z\rightarrow t\subset z)$.

ТЕОРЕМА 17 (обобщённая теорема выбора).

$$\exists g\forall x(\neg x=\varnothing\rightarrow g(x)\in x).$$

Доказательство. По Т16 существует f такая, что $B(f)\&$ $\&\forall x(\mathrm{ORD}(f(x)))$. По Т8 существует h такая, что $B(h)\&\forall x(h(x)=f[x])$. Поскольку для любого x $\forall t(t\in h(x)\rightarrow \mathrm{ORD}(t))$, то по Т15 $\forall x(\neg x=$ $=\varnothing\rightarrow \bigcap h(x)\in h(x))$. Тогда, в силу $B(f)$ и $B(h)\&\forall x(h(x)=f[x])$

$$\forall x(\neg x=\varnothing\rightarrow \exists! y(f(y)=\bigcap h(x)\&y\in x)).$$

Отсюда и по А2 следует, что существует g такая, что

$$\forall x(\neg x=\varnothing\rightarrow f(g(x))=\bigcap h(x)\&g(x)\in x).$$

Новая система аксиом полностью и адекватно выразима в теории Гёделя — Бернайса. Аксиомы А1 и А2 фактически доказаны в этой теории. Вопрос о доказуемости — недоказуемости аксиом А3 и А4 в этой теории (конечно, с включённой в неё аксиомой выбора) пока открыт. Если они доказуемы, то новая аксиоматическая теория множеств, по существу, равносильна теории Гёделя — Бернайса, а значит, до известной степени, и теории Цермело — Френкеля. Если хотя бы одна из них недоказуема, то новая аксиоматическая теория множеств мощнее этих теорий.

В любом случае, новая система аксиом имеет неоспоримые преимущества перед другими системами аксиом теории множеств:

— всего четыре аксиомы, из которых

— первые две аксиомы образуют самостоятельную общую теорию функций от одной переменной и не используют базовое отношение принадлежности;

— первые три аксиомы образуют непротиворечивую теорию;

— четвёртая аксиома утверждает, что любое множество должно принадлежать некоторой транзитивной модели непротиворечивой теории, получаемой из первых трёх аксиом.

Список литературы

1. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Т. 1, 2. М.: Наука, 1979. 1982.
2. *Карри Х.* Основания математической логики. М.: Мир, 1969.
3. *Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г.* Математическая логика. Дополнительные главы. М.: Изд-во МГУ, 1984.
4. *Коэн П. Дж.* Теория множеств и континуум-гипотеза. М.: Мир, 1969.
5. *Линдон Р.* Заметки по логике. М.: Мир, 1968.

Поступила в редакцию
22.III.1988