В. И. Буренков, Б. Л. Файн, О продолжении функций из анизотропных пространств с сохранением класса, *Тр. МИАН СССР*, 1979, том 150, 52–66

Труды Математического института АН СССР
1979, том 150

В. И. БУРЕНКОВ, Б. Л. ФАЙН

О ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ С СОХРАНЕНИЕМ КЛАССА

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье изучается вопрос о продолжении с сохранением класса за пределы области определения функций из пространств $W^{\bar{l}}_{\bar{p}}(\Omega)$ с нормой

$$\|f\|_{W^{\bar{l}}_{\bar{p}}(\Omega)} \equiv \|f\|_{W^{l_1,\ldots,l_n}_{p_0,\,p_1,\ldots,p_n}(\Omega)} = \|f\|_{L_{p_0}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|D_i^{l_i}f\|_{L_{p_i}(\Omega)}.$$

Здесь $l_1, \ldots, l_n$ — натуральные числа, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. В случае одинаковых $p_0 = p_1 = \ldots = p_n = p$ будем писать $W^{\bar{l}}_{\bar{p}}(\Omega) \equiv \equiv W^{\bar{l}}_{p}(\Omega)$.

Если Ω — параллелепипед (конечный или бесконечный) с гранями параллельными координатным плоскостям, то функции из $W^{\bar{l}}_{\bar{p}}(\Omega)$ можно продолжить с сохранением класса на E_n. Это доказывается с помощью метода Хестенса. Для областей, отличных от параллелепипеда при различных $p_0, p_1, \ldots, p_n$, результатов о продолжении в литературе нет. Если $p_0 = p_1 = \ldots = p_n = p$, $1 < p < \infty$, l_i — различные, то продолжение с сохранением класса из $W^{\bar{l}}_{p}(\Omega)$ возможно для открытых множеств Ω, удовлетворяющих сильному условию $\bar{l}$-рога (см.: О. В. Бесов, В. П. Ильин [1] или книгу О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [2]).

Ниже мы (для более узкого класса открытых множеств) дополним приведенный выше результат для пространств $W^{\bar{l}}_{p}(\Omega)$, включив крайние значения $p = 1$ и $p = \infty$ и получив в определенном смысле наилучшие оценки роста производных продолженной функции $D_i^{m_i}(Sf)(x)$, $m_i > l_i$, $x \in {}^c\bar{\Omega}$, при подходе к границе $\Gamma(\Omega)$. В случае различных $p_0, p_1, \ldots, p_n$ мы получим результат о продолжении для пространств $W^{\bar{l}}_{\bar{p}}(\Omega)$ для областей, отличных от параллелепипеда [1].

§ 1. ОТКРЫТЫЕ МНОЖЕСТВА С ГРАНИЦЕЙ КЛАССА $A(\bar{l})$, $A(\gamma, \lambda)$

Пусть $x^{(i)} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ и

$$\Omega = \{x \in E_n, \quad x_i < \varphi(x^{(i)})\}, \tag{1}$$

[1] Приводимые результаты без доказательства сформулированы в заметке авторов [4].

где функция $\varphi(x^{(i)})$ удовлетворяет условию

$$|\varphi(x^{(i)}) - \varphi(y^{(i)})|^{l_i} \leqslant M \sum_{k \neq i} |x_k - y_k|^{l_k}, \quad -\infty < x_k, y_k < \infty. \tag{2}$$

Такие области (а также со знаком $>$ вместо $<$ в (1)) будем называть специальными областями класса $A(\bar{l}) = A(l_1, \ldots, l_n)$. Будем говорить, что $\Gamma(\Omega) \in A(\bar{l})$, если существует такое $\varepsilon > 0$, целое число N, число $M > 0$ и конечный или счетный набор открытых множеств $\{V_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, s$ (s — некоторое натуральное число или ∞), что

1) если $x \in \Gamma(\Omega)$, то шар радиуса ε с центром в точке x содержится в некотором V_j;

2) никакая точка из E_n не содержится более, чем в N открытых множествах V_j;

3) для любого j существует специальная область Ω_j класса $A(\bar{l})$ с константой M, что

$$V_j \cap \Omega = \Omega_j \cap \Omega.$$

Если $\Gamma(\Omega) \in A(\bar{l})$, то нетрудно проверить, что Ω удовлетворяет сильному условию $\bar{l}$-рога. В случае одинаковых l_i $A(l, \ldots, l) \equiv \mathrm{Lip}1$.

Для описанного класса открытых множеств будет доказана теорема продолжения для пространств $W_p^{\bar{l}}(\Omega)$.

В случае различных $p_0, p_1, \ldots, p_n$ рассмотрим сначала открытые множества класса $A(\bar{\lambda})$, описываемые, как и выше, с заменой условия (2) на

$$|\varphi(x^{(i)}) - \varphi(y^{(i)})|^{\lambda_i} \leqslant M \sum_{k \neq i} |x_k - y_k|^{\lambda_k}, \quad -\infty < x_k, y_k < \infty, \tag{2'}$$

где $\lambda_i = \dfrac{l_i}{\varkappa_i}$, $\varkappa_i = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{l_k}\left(\dfrac{1}{p_k} - \dfrac{1}{p_i}\right)$.

Для таких открытых множеств справедлива теорема вложения пространств $W_{\bar{p}}^{\bar{l}}(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ такая же, как и для $\Omega = E_n$ (см. книгу О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [2, § 18.12] и работу Б. Л. Файна [5]). Поэтому казалось естественным ожидать, что для таких (как и в случае одинаковых p_i) будет справедлива теорема о продолжении с сохранением класса. Однако следующий пример показывает, что это не так. Пусть $n = 2$, $\Omega = \{x_2 > |x_1|^{\rho}, -\infty < x_1 < \infty\}$, где $\rho = \left(l_1 + \dfrac{1}{p_2} - \dfrac{1}{p_1}\right)\left(l_2 - \dfrac{1}{p_2} + \dfrac{1}{p_1}\right)^{-1}$; при указанном ρ $\Gamma(\Omega) \in A(\bar{\lambda})$. Пусть l_1 и l_2 четные, $p_1 < p_2 \leqslant p_0$.

Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2) = |x_1|^{l_1/2} |x_2|^{\alpha} \ln^{\beta} |x_2|^{-1} \mu(x_1, x_2)$, где $\mu(x_1, x_2) \in C_0^{\infty}(E_2)$, $\mu(x_1, x_2) = 1$ в некоторой окрестности начала координат. Если $\alpha = l_2 - \dfrac{1}{p_2} - \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{l_1}{2} + \dfrac{1}{p_2}\right)$ и $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}\right) < \beta < -\dfrac{1}{p_2}$, то, как показывают несложные вычисления, $f(x_1, x_2) \in W_{p_0, p_1, p_2}^{l_1, l_2}(\Omega)$, но $\dfrac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} \overline{\in} L_{\theta}(\Omega)$, где $\dfrac{1}{\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}\right)$, $m_1 = l_1/2$, $m_2 = l_2/2$. Если бы была справедлива теорема продолжения с сохранением класса, то мы пришли бы к противоречию с теоремой об оценке смешанных производных, полученной О. В. Бесовым [6].

В связи со сказанным выше рассмотрим иной класс открытых множеств с границей $\Gamma(\Omega) \in A(\gamma, \bar{\lambda})$ ($\gamma = \|\gamma_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ — матрица, в которой $\gamma_{ii}=\lambda_i$), описываемый, как и выше, с заменой условия (2)—(2′) на

$$|\varphi(x^{(i)})-\varphi(y^{(i)})|^{\lambda_i}\leqslant M\sum_{k\neq i}|x_k-y_k|^{\gamma_{ki}},\quad -\infty<x_k,y_k<\infty. \qquad (2'')$$

Кроме того, в этом случае мы будем еще предполагать, что участвующие в определении класса $A(\gamma,\bar\lambda)$ открытые множества V_i имеют равномерно ограниченный диаметр. Это не ограничивает общности, так как исходя из данного покрытия $\{V_i\}$ можно построить (для S допускается значение $s=\infty$) новое покрытие $\{V_i'\}$, удовлетворяющее такому условию, не нарушая остальных требований определения.

Отметим, что с увеличением γ_{ki}, $k=1,2,\ldots,i-1,\ i+1,\ldots,n$, сужается класс областей, удовлетворяющих условиям (1), (2″). С другой стороны, если хотя бы одно $\gamma_{ki}<\lambda_k$, то продолжение для такой области Ω с сохранением класса невозможно (это следует из того, что для такой области не будут верны такие же теоремы вложения, что и для E_n, см., например, примеры, приведенные в статье Б. Л. Файна [5]). В связи с этим, естественно, искать наименьшие γ_{ki} ($\gamma_{ki}\geqslant\lambda_k$), при которых возможно продолжение с областей, удовлетворяющих (1)—(2″).

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРА ПРОДОЛЖЕНИЯ

Оператор продолжения будем строить по той же схеме, что и в [3]. Пусть $G={}^c\bar\Omega=\{x\in E_n,\ \bar x_n>\varphi(\bar x)\}$. Положим

$$G_m=\{x\in G,\ 2^{-\frac{m+1}{\lambda_n}}<x_n-\varphi(\bar x)\leqslant 2^{-\frac{m}{\lambda_n}}\},\qquad m=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

где $\bar x=(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$.

Построим соответствующее разбиение единицы.

Лемма 1. *Существует такая последовательность функций $\psi_m\in C^\infty(E_n)$, что*

1) $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\psi_m(x)=1,\ x\in G,\qquad \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\psi_m(x)=0,\ x\,\bar\in\, G;$

2) $G_m\subset\operatorname{supp}\psi_m\subset G_m^*\subset G_{m-1}\cup G_m\cup G_{m+1},$

$$\text{где } G_m^*=\{2^{-\frac{m+1}{\lambda_n}}(1-\delta)<x_n-\varphi(\bar x)\leqslant 2^{-\frac{m}{\lambda_n}}(1+\delta)\},$$
$$m=0,\pm1,\pm2,\ldots,\ 0<\delta<(1-2^{-\frac{1}{\lambda_n}})(1+2^{-\frac{1}{\lambda_n}})^{-1};$$

3) $G=\bigcup\limits_{m=-\infty}^{\infty}\operatorname{supp}\psi_m$, *причем кратность покрытия $\{\operatorname{supp}\psi_m\}$ равна 2;*

4) *для любого вектора $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$*

$$|D^\alpha\psi_m(x)|\leqslant C_\alpha^{(\delta)}\cdot 2^{m\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{\gamma_{kn}}}\qquad(\gamma_{nn}=\lambda_n),$$

где $C_\alpha^{(\delta)}$ зависит только от α и δ.

Лемма 1 есть частный случай общей леммы о разбиениях единицы [7].

С помощью построенного в лемме 1 разбиения единицы оператор продолжения строится следующим образом:

$$(Tf)(x)=f(x),\quad x\in\Omega,$$
$$(Tf)(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\psi_m(x)f_m(x),\ x\in G. \qquad (1)$$

В случае $p_1 = \ldots = p_n$

$$f_m(x) = \int\limits_{E_n} f\left(x_1 - 2^{-\frac{m}{l_1}} z_1, \ldots, x_{n-1} - 2^{-\frac{m}{l_{n-1}}} z_{n-1}, x_n - A_n \cdot 2^{-\frac{m}{l_n}} z_n\right) \omega(z)\, dz \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{E_n} f\left(x - A \cdot 2^{-\frac{m}{l}} z\right) \omega(z)\, dz. \qquad (2)$$

Здесь $A = (1, 1, \ldots, 1, A_n)$,

$$\omega(z) = \omega_1(z_1), \ldots, \omega_n(z_n); \qquad (3)$$

$$\omega_i(z_i) \in C_0^\infty\left(\frac{1}{2}, 1\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad (4)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_i(z_i)\, dz_i = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad (5)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_i(z_i)\, z_i^{k_i}\, dz_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (6)$$

где

$$k_i = 1, 2, \ldots, l_i. \qquad (7)$$

Кроме того, в (2) A_n — достаточно большая постоянная, не зависящая от f и m.

В случае различных p_i функции $f_m(x)$ определяются несколько более сложно:

$$f_m(x) = \begin{cases} \int\limits_{E_n} f\left(x - A \cdot 2^{-m\sigma} z\right) \omega(z)\, dz, & m \geqslant 0; \\ \int\limits_{E_n} f\left(x - A' \cdot 2^{-m\sigma'}\right) \omega(z)\, dz, & m < 0, \end{cases} \qquad (8)$$

где $A = (1, 1, \ldots, A_n)$, $A' = (1, 1, \ldots, A_n')$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma' = (\sigma_1', \ldots, \sigma_n')$, $(x - A \cdot 2^{-m\sigma} z) = (x_1 - 2^{-m\sigma_1} z_1, \ldots, x_{n-1} - 2^{-m\sigma_{n-1}} z_{n-1}, x_n - A_n \cdot 2^{-m\sigma_n} z_n)$, A_n и A_n' — достаточно большие постоянные, не зависящие от f и m, например, $A_n = 2^{6\lambda_n^{-1} \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \sigma_k \gamma_{kn} + 1} (Mn + 1)$ (A_n' определяется аналогично). Параметры σ_i' удобно выбрать следующим образом:

$$\sigma_i' = \gamma_{in}^{-1}; \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (9)$$

а параметры σ_i (они играют главную роль) выбираются в некотором смысле оптимальным образом по ходу доказательства, при этом

$$\sigma_n = \lambda_n^{-1}. \qquad (10)$$

Оператор T определен корректно, если для $x \in \operatorname{supp} \psi_m$ определены функции $f_m(x)$, т. е. $x - A \cdot 2^{-m\sigma} \in \Omega$ для $m \geqslant 0$ и $x - A' \cdot 2^{-m\sigma'} \in \Omega$ для $m < 0$. Так как для $m \geqslant 0$ для $x \in \operatorname{supp} \psi_m \subset G_{m-1} \cup G_m \cup G_{m-1}$ согласно неравенству (2″) из § 1

$$x_n - A_n \cdot 2^{-m\sigma_n} z_n - \varphi(\bar{x} - 2^{-m\sigma} \bar{z}) = x_n - \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{x} - 2^{-m\sigma} \bar{z}) -$$

$$- A_n \cdot 2^{-m\sigma_n} z_n \leqslant 2^{-\frac{m-1}{\lambda_n}} + M \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-m\sigma_k \frac{\gamma_{kn}}{\lambda_n}} |z_k|^{\frac{\gamma_{kn}}{\lambda_n}} - A_n \cdot 2^{-m\sigma_n} z_n \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\frac{m}{\lambda_n}} \left[2^{\frac{1}{\lambda_n}} + M \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-\frac{m}{\lambda_n}(\sigma_k \gamma_{kn} - 1)} - \frac{A_n}{2} \cdot 2^{-\frac{m}{\lambda_n}(\sigma_n \lambda_n - 1)} \right],$$

то $x - A2^{-m\sigma} \in \Omega$, если при достаточно большом A_n (не зависящем от m)

$$2^{\frac{1}{\lambda_n}} + M \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-\frac{m}{\lambda_n}(\sigma_k \gamma_{kn} - 1)} - \frac{A_n}{2} \cdot 2^{-\frac{m}{\lambda_n}(\sigma_n \lambda_n - 1)} < 0. \qquad (11)$$

Для справедливости (11) необходимо, чтобы

$$\sigma_n \lambda_n - 1 \leqslant 0, \quad \sigma_k \lambda_{kn} - \sigma_n \lambda_n \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (12)$$

Ниже будет показано (см. формулу (19) из § 3), что для σ_n необходимо также выполнение неравенства $\sigma_n \lambda_n - 1 \geqslant 0$, откуда и следует (10).

Рассуждая аналогично для $m < 0$, мы получим, что

$$\sigma_n' \lambda_n - 1 \geqslant 0, \quad \sigma_k' \gamma_{kn} - \sigma_n' \lambda_n \leqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (13)$$

В дальнейшем можно рассматривать любые σ_n', удовлетворяющие (13), и мы определим их формулой (9).

Отметим еще, что в случае одинаковых $p_1, \ldots, p_n$ для $\gamma_{in} = l_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, параметры σ_i и σ_i' принимают вид $\sigma_i = \sigma_i' = l_i^{-1}$, и формула (8) переходит в формулу (2).

§ 3. ТЕОРЕМЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ С СОХРАНЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВ

Проследим за свойствами оператора продолжения T. Ряд этих свойств (леммы 2, 3, 4, 6) мы приведем без доказательства, ссылаясь на соответствующие утверждения, доказанные в работе [3].

Пусть область Ω удовлетворяет условиям (1), (2) из § 1 (для определенности будем считать $i = n$). Положим $G = E_n \setminus \overline{\Omega}$.

Лемма 2. *Пусть* $f \in L^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *тогда*

$$(Tf)(x) \in C^\infty(G).$$

Лемма 3. *Пусть* $f_k(x) \to f(x)$ в $L^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *при* $k \to \infty$, *тогда для любого* $x \in G$ *и любого вектора* α

$$\lim_{k \to \infty} D^\alpha (Tf_{(k)})(x) = D^\alpha (Tf)(x).$$

Пусть $a_j \equiv a_j(x)$, $b_j = b_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$,
и

$$L \equiv L(x) = \{a_j < y_j < b_j, \ j = 1, 2, \ldots, n\},$$

$$L^{(i)} \equiv L^{(i)}(x) = \{a_j < y_j < b_j, \ j = 1, 2, \ldots, i\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

$(L^{(n)} \equiv L)$.

Лемма 4. *Пусть* $f, D_1^{\mu_1}, f_1, \ldots, D_n^{\mu_n} f \in C(L)$, *а функции* $\lambda_i(x, \xi_i) \in C_0^\infty[a_i(x), b_i(x)]$ *(по переменной* ξ_i*) и* $\int\limits_{a_i}^{b_i} \lambda_i(x, \xi_i)\, d\xi_i = 1$.

Пусть, далее, $x \in L$ *(т. е.* $a_j(x) < x_j < b_j(x)$*), тогда имеет место следующее интегральное представление функции*

$$f(x) = \int\limits_L P(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \sum_{i=1}^n \int\limits_{L^{(i)}} Q_i(x, \xi) D_i^{\mu_i} f(\xi_1, \ldots, \xi_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_i, \qquad (1)$$

где

$$P(x,\xi) = p_1(x,\xi_1)\ldots p_n(x,\xi_n),$$

$$Q_i(x,\xi) = p_1(x,\xi_1)\ldots p_{i-1}(x,\xi_{i-1})\,q_i(x,\xi_i),$$

$$p_s(x,\xi_s) = \sum_{k_s=0}^{\mu_s-1} \alpha_{k_s}(x_s-\xi_s)^{k_s}\lambda_{\xi_s}^{(k_s)}(x,\xi_s), \qquad s=1,2,\ldots,n$$

$$\left(\alpha_{k_s} = \frac{1}{k_s!}\sum_{j=k_j}^{\mu_s-1}(-1)^j C_j^{k_s}\right),$$

$$q_s(x,\xi_s) = \frac{(x_s-\xi_s)^{\mu_s-1}}{(\mu_s-1)!}\Lambda_s(x,\xi_s),$$

$$\Lambda_j(x,\xi_s) = \begin{cases} \int\limits_{a_s}^{\xi_s}\lambda_s(x,\eta_s)\,d\eta_s, & a_s\leqslant\xi_s\leqslant x_s,\\ -\int\limits_{\xi_s}^{b_s}\lambda_s(x,\eta_s)\,d\eta_s, & x_s<\xi_s\leqslant b_s.\end{cases}$$

Причем для функций $p(x,\xi)$ и $Q_i(x,\xi)$ справедливы следующие оценки:

$$|P(x,\xi)|\leqslant c\prod_{j=1}^{n}(b_j-a_j)^{-1}, \tag{2}$$

$$|Q_i(x,\xi)|\leqslant c\prod_{j=1}^{i}(b_j-a_j)^{-1}(b_i-a_i)^{\mu_i}. \tag{3}$$

Положим

$$\Phi_m(x) = \begin{cases}\int\limits_{E_n}\omega(z)\Phi(x-B\cdot 2^{-m\sigma}z)\,dz, & B=(1,1,\ldots,B_n), \quad m\geqslant 0,\\ \int\limits_{E_n}\omega(z)\Phi(x-B'\cdot 2^{-m\sigma'}z)\,dz, & B'=(1,1,\ldots,B_n'), \quad m<0,\end{cases}$$

где $\omega(z)$ — функция, удовлетворяющая соотношениям (3)—(7) из § 2.

Лемма 5. *Пусть* $\Phi(x)\in C^\infty(\Omega)$, $\operatorname{diam}\operatorname{supp}\psi\leqslant R$, $1\leqslant p_k\leqslant\infty$, $k=1,2,\ldots,n$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. *Пусть, далее,*

$$\hat G_m = \{x\in E_n,\ a\cdot 2^{-m/\lambda_n} < x_n-\varphi(\bar x)\leqslant b\cdot 2^{-m/\lambda_n}\}, \qquad 0<a<b<\infty.$$

Существуют такие постоянные B_n, B_n' и такая функция $F_\beta(x)$, не зависящие от m, что

$$\|D^\beta\Phi_m\|_{L_q(\hat G_m)}\leqslant c_1\|D^\beta\Phi\|_{L_q(\hat\Omega_m)}, \qquad m=0,\pm 1,\ldots, \tag{4}$$

при $m>0$

$$\|D^\beta\Phi_m-F_\beta\|_{L_q(\hat G_m)}\leqslant c_2\Big\{\sum_{p_s\leqslant q}2^{m\left[(\sigma,\beta)-\sigma_s l_s+|\sigma|\left(\frac{1}{p_s}-\frac{1}{q}\right)\right]}\|D_s^{l_s}\Phi\|_{L_{p_s}(\hat\Omega_m)}+$$

$$+\sum_{p_s>q}2^{m\left[(\sigma,\beta)-\sigma_s l_s+\sigma_n\left(\frac{1}{p_s}-\frac{1}{q}\right)\right]}R^{(n-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_s}\right)}\|D_s^{l_s}\Phi\|_{L_{p_s}(\hat\Omega_m)}\Big\}, \tag{5}$$

при $m\leqslant 0$

$$\|D^\beta\Phi_m\|_{L_q(\hat G_m)}\leqslant c_3\|\Phi\|_{L_q(\hat\Omega_m)}, \tag{6}$$

где

$$\hat{\Omega}_m = \{x \in E_n, -a_0 2^{-m/\lambda_n} < x_n - \varphi(\bar{x}) \leqslant b_0 \cdot 2^{-m/\lambda_n}\}, \qquad 0 < b_0 < a_0 < \infty,$$

причем a_0 и b_0 не зависят от m. Постоянные c_1, c_2, c_3 не зависят от Φ, m и R.

Доказательство. Пусть $m \geqslant 0$. Выберем произвольным образом b_0 и пусть

$$B_n > 2\frac{b}{a}\left[M_n\left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda} + b + b_0\right], \qquad a_0 = \frac{b}{a}\left[B_n + M_n\left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda-1}\right]^1, \tag{7}$$

здесь $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \sigma_k \gamma_{kn}$.

Докажем неравенство (4). При $\beta = 0$ достаточно оценить

$$J = \|\Phi(x - B \cdot 2^{-m\sigma} z)\|^q_{L_q(\hat{G}_m)} = \int\limits_{E_{n-1}} d\bar{x} \int\limits_{\varphi(\bar{x})+a\cdot 2^{-m/\lambda_n}}^{\varphi(\bar{x})+b\cdot 2^{-m/\lambda_n}} |\Phi(x - 2^{-m\sigma} z)|^q \, dx_n.$$

Выполняя замену переменных $x - B \cdot 2^{-m\sigma} z = \xi$, получаем

$$J = \int\limits_{E_{n-1}} d\bar{\xi} \int\limits_{\varphi(\bar{\xi}+2^{-m\bar{\sigma}}\bar{z})+a\cdot 2^{-m/\lambda_n}-B_n\cdot 2^{-m/\lambda_n} z_n}^{\varphi(\bar{\xi}+2^{-m\bar{\sigma}}\bar{z})+b\cdot 2^{-m/\lambda_n}-B_n\cdot 2^{-m/\lambda_n} z_n} |\Phi(\xi)|^q \, d\xi_n \leqslant \|\Phi\|^q_{L_q(\hat{\Omega}_m)},$$

так как из условия (7) и соотношений (10), (12) § 2 имеют место следующие неравенства:

$$\varphi(\bar{\xi} + 2^{-m\bar{\sigma}}\bar{z}) + b \cdot 2^{-m/\lambda_n} - B_n \cdot 2^{-m/\lambda_n} z_n = \varphi(\bar{\xi} + 2^{-m\bar{\sigma}}\bar{z}) - \varphi(\bar{\xi}) + \varphi(\bar{\xi}) +$$

$$+ b \cdot 2^{-m/\lambda_n} - B_n \cdot 2^{-m/\lambda_n} z_n \leqslant M \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-\frac{m}{\lambda_n}\sigma_k \gamma_{kn}} + b \cdot 2^{-m/\lambda_n} - \frac{B_n}{2} \cdot 2^{-m/\lambda_n} +$$

$$+ \varphi(\bar{\xi}) \leqslant 2^{-m/\lambda_n}\left[M \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-\frac{m}{\lambda_n}(\sigma_k \gamma_{kn} - 1)} + b - \frac{B_n}{2}\right] + \varphi(\bar{\xi}) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-m/\lambda_n}\left[Mn + b - \frac{B_n}{2}\right] + \varphi(\bar{\xi}) < \varphi(\bar{\xi}) - b_0 \cdot 2^{-m/\lambda_n}$$

и, кроме того,

$$\varphi(\bar{\xi} + 2^{-m\bar{\sigma}}\bar{z}) + a \cdot 2^{-m/\lambda_n} - B_n \cdot 2^{-m/\lambda_n} z_n \geqslant 2^{-m/\lambda_n}[-M_n + a - B_n] + \varphi(\bar{\xi}) >$$
$$> \varphi(\bar{\xi}) - a_0 \cdot 2^{-m/\lambda_n}.$$

При $m < 0$ таким же образом получаются аналогичные неравенства. При $|\beta| > 0$ выполним дифференцирование под знаком интеграла и воспользуемся проведенными выкладками.

Для доказательства неравенств (5) и (6) запишем (при $m \geqslant 0$) $D^\beta \Phi_m$ в виде

$$D^\beta \Phi_m = 2^{m(\sigma,\beta)} B_n^{-\beta_n} \int\limits_{E_n} \Phi(x - B \cdot 2^{-m\sigma} z) D^\beta \omega(z) \, dz. \tag{7'}$$

При $m < 0$ имеем аналогичную формулу (с σ' вместо σ и B' вместо B). Так как при этом $2^{m(\sigma,\beta)} \leqslant 1$, то неравенство (6) доказывается исходя из (7) так же, как неравенство (4) (для случая $\beta = 0$ с $D^\beta \omega$ вместо ω).

[1] При $m < 0$ B'_n и a'_0 находятся так же, как и в (7) (надо положить $\sigma'_k \gamma_{kn} = 1$).

Далее, как и при доказательстве леммы 8 из [3] разложим в (7′) $\Phi\ x - B\cdot 2^{-m\sigma}z)$ по формуле (1) ($\mu_1 = l_1, \ldots, \mu_n = l_n$)

$$\Phi(x - B\cdot 2^{-m\sigma}z) = \int\limits_L P(x - B\cdot 2^{-m\sigma}z, \xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{L_i} Q_i(x - B\cdot 2^{-m\sigma}z, \xi)\, D_i^{l_i}\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_i, x_{i+1} - 2^{-m\sigma_{i+1}}z_{i+1}, \ldots, x_n -$$

$$- B_n\cdot 2^{-m\sigma_n}z_n)\,d\xi_1\ldots d\xi_i \equiv \sum_{i=0}^{n} r_i^{(m)}(x, z), \tag{8}$$

где в этот раз

$$\begin{aligned} a_i &= x_i - [a^{-1}(x_n - \varphi(\bar{x}))]^{\sigma_i\lambda_n}, & b_i &= x_i - \frac{1}{2}[b^{-1}(x_n - \varphi(\bar{x}))]^{\sigma_i\lambda_n}, \\ a_n &= x_n - B_n a^{-1}(x_n - \varphi(\bar{x})), & b_n &= x_n - \frac{B_n}{2}b^{-1}(x_n - \varphi(\bar{x})). \end{aligned} \tag{9}$$

Согласно (7′) и (8)

$$D^\beta\Phi_m(x) = \sum_{i=0}^{n} 2^{m(\sigma,\beta)}B_n^{-\beta_n}\int\limits_{E_n} D^\beta\omega(z)\,r_i^{(m)}(x, z)\,dz \equiv \sum_{i=0}^{n} R_i^{(m)}(x). \tag{10}$$

Здесь $R_0^{(m)}(x)$ не зависит от m и $F_\beta(x) = R_0^{(m)}(x)$, для функций $R_i^{(m)}(x)$ получим для любых $i = 1, 2, \ldots, n$ неравенства

$$|R_i^{(m)}(x)| \leqslant c_4\cdot 2^{m[(\sigma,\beta)-\sigma_i l_i]}\int\limits_{\rho_1}^{k_1}\ldots\int\limits_{\rho_n}^{k_n}|D_i^{l_i}\Phi(x - B\cdot 2^{-m\sigma}z)|\,dz \equiv c_4 2^{m[(\sigma,\beta)-\sigma_i l_i]}J, \tag{11}$$

где

$$k_i = \left(\frac{b}{a}\right)^{\sigma_i\lambda_n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1; \quad k_n = \frac{b}{a};\ \ \rho_i = (2k_i)^{-1},\ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

В дальнейших рассуждениях мы будем учитывать, что $q, p_1, \ldots, p_n$ могут быть различными (если $q = p_1 = \ldots = p_n$, то достаточно применить к (11) неравенство Минковского).

Для интеграла J справедлива оценка

$$J \leqslant c_5\left(\int\limits_{\rho_1}^{k_1}\ldots\int\limits_{\rho_n}^{k_n}|D_i^{l_i}\Phi(x - B\cdot 2^{-m\sigma}z)|^{p_i}\,dz\right)^{\frac{1}{p_i}} \leqslant c_5\cdot 2^{\frac{m|\sigma|}{p_i}}\|D_i^{l_i}\Phi\|_{L_{p_i}(\hat{\Omega}_m)}, \tag{12}$$

для $x \in \hat{G}_m$, так как при этом $x - B\cdot 2^{-m\sigma} \in \hat{\Omega}_m$. Кроме того, согласно неравенству Минковского

$$\|J\|_{L_r(\hat{G}_m)} \leqslant c_6\|D_i^{l_i}\Phi\|_{L_r(\hat{\Omega}_m)}, \qquad 1 \leqslant r \leqslant \infty. \tag{13}$$

Пусть сначала $q \geqslant p_i$, тогда, используя (12) и (13) с $r = p_i$, получим

$$\|J\|^q_{L_q(\hat{G}_m)} = \int\limits_{\hat{G}_m} J^q\,dx = \int\limits_{\hat{G}_m} J^{p_i}J^{q-p_i}dx \leqslant$$

$$\leqslant c_7\cdot 2^{m|\sigma|\left(\frac{q}{p_i}-1\right)}\|D_i^{l_i}\Phi\|^{q-p_i}_{L_{p_i}(\hat{\Omega}_m)}\|J\|^{p_i}_{L_{p_i}(\hat{G}_m)} \leqslant$$

$$\leqslant c_8\cdot 2^{m|\sigma|\left(\frac{q}{p_i}-1\right)}\|D_i^{l_i}\Phi\|^q_{L_{p_i}(\hat{\Omega}_m)}. \tag{14}$$

Из (11) и (14) следует, что

$$\| R_i^{(m)} \|_{L_q(\hat G_m)} \leqslant c_9 2^{m\left[(\sigma,\beta)-\sigma_i l_i+|\sigma|\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q}\right)\right]} \| D_i^{l_i}\Phi \|_{L_{p_i}(\hat\Omega_m)}. \tag{15}$$

Пусть теперь $q < p_i$. Используя (13) с $r = q$ и неравенство Гельдера с показателями $\frac{p_i}{q}$ и $\frac{p_i}{p_i-q}$, получим ($B(R)$ — шар радиуса R)

$$\begin{aligned}\| J \|_{L_q(\hat G_m)} &\leqslant c_{10} \| D_i^{l_i}\Phi \|_{L_q(\hat\Omega_m)} = c_{10} \| D_i^{l_i}\Phi \|_{L_q(\hat\Omega_m \cap B(R))} \leqslant \\ &\leqslant c_{10} \operatorname{mes}(\hat\Omega_m \cap B(R))^{\frac{p_i-q}{p_i q}} \| D_i^{l_i}\Phi \|_{L_{p_i}(\hat\Omega_m)} \leqslant \\ &\leqslant c_{11} 2^{-m\sigma_n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_i}\right)} R^{(n-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_i}\right)} \| D_i^{l_i}\Phi \|_{L_{p_i}(\hat\Omega_m)}.\end{aligned} \tag{16}$$

Из (11) и (16) следует, что

$$\| R_i^{(m)} \|_{L_q(\hat G_m)} \leqslant c_{12} \cdot 2^{m\left[(\sigma,\beta)-\sigma_i l_i+\sigma_n\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q}\right)\right]} R^{(n-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_i}\right)} \| D_i^{l_i}\Phi \|_{L_p(\hat\Omega_m)}. \tag{17}$$

Из (15) и (17) следует искомое неравенство (5).

Лемма 6. *Пусть $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{l_i} \leqslant 1$, тогда производные $D^\alpha(Tf)(x)$, $x \in E_n$, существуют и непрерывны.*

Эта лемма доказывается аналогично лемме 9 из [3].

Для доказательства основной леммы (леммы 5) нам потребуется исследовать следующую систему неравенств:

$$\begin{aligned}&\frac{l_k}{\gamma_{kn}} + \beta_k\left(\sigma_k - \frac{1}{\gamma_{kn}}\right) - \sigma_s l_s + |\sigma|\left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_k}\right) \leqslant 0, \quad p_s \leqslant p_k;\\ &\frac{l_k}{\gamma_{kn}} + \beta_k\left(\sigma_k - \frac{1}{\gamma_{kn}}\right) - \sigma_s l_s + \sigma_n\left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_k}\right) < 0, \quad p_s > p_k.\end{aligned} \tag{18}$$

Прежде всего, при $k = s$ из (18) следует, что

$$\sigma_k \gamma_{kn} \geqslant 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \sigma_n \lambda_n \geqslant 1. \tag{19}$$

Из (19) и формулы (12) из § 2 следует, что $\sigma_n = \lambda_n^{-1}$, при этом остальные неравенства (19) совпадают с соответствующими неравенствами (12) из § 2. Далее, из (19) следует, что система (18) эквивалентна своей подсистеме, соответствующей $\beta_k = l_k - 1$:

$$\begin{aligned}&\gamma_{kn}^{-1} + \sigma_k(l_k - 1) - \sigma_s l_s + |\sigma|\left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_k}\right) \leqslant 0, \quad p_s \leqslant p_k;\\ &\gamma_{kn}^{-1} + \sigma_k(l_k - 1) - \sigma_s l_s + \sigma_n\left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_k}\right) < 0, \quad p_s > p_k.\end{aligned} \tag{20}$$

Система (20) определяет выбор чисел $\bar\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1})$, $\sigma_n = \lambda_n^{-1}$. Напомним, что при фиксированном $\gamma_{nn} = \lambda_n$ нас интересуют такие $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$, чтобы γ_{kn}, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, были по возможности меньше.

При $p_1 = \ldots = p_n$ система (20) существенно упрощается:

$$\gamma_{kn}^{-1} + \sigma_k(l_k - 1) - \sigma_s l_s \leqslant 0, \quad i, s = 1, 2, \ldots, n. \tag{21}$$

При $k = n$ из (21) следует, что $\sigma_s l_s \geqslant \sigma_n l_n = 1$, а при $k = 1, \ldots, n-1$

$$\gamma_{kn} \geqslant \max_{1 \leqslant s \leqslant n} [-\sigma_k(l_k - 1) + \sigma_s l_s]^{-1} = [-\sigma_k(l_k - 1) + 1]^{-1}.$$

Отсюда следует, что $(\gamma_{kn})_{\min} = l_k$, причем этот min реализуется при $\sigma_k = l_k^{-1}$. Этим и определяется выбор условия (2) в § 1 и выбор параметров в формуле (2) из § 2.

При различных $p_1, \ldots, p_n$ рассуждения несколько усложняются. Перепишем (20) в виде

$$\gamma_{kn} > f_{sk}(\bar\sigma) \equiv [-\sigma_k(l_k - 1) + \delta_{sk}(\bar\sigma)]^{-1}, \tag{22}$$

где

$$\delta_{sk}(\bar\sigma) = \begin{cases} \sigma_s l_s - |\sigma| \left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_k}\right), & p_s \leqslant p_k; \\ \sigma_s l_s - \sigma_n \left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_k}\right), & p_s > p_k, \end{cases} \tag{23}$$

причем в (22) при $p_s \leqslant p_k$ допустимо равенство. Условие (22) можно переписать так:

$$\gamma_{kn} > \max_{1 \leqslant s \leqslant n} f_{sk}(\bar\sigma) \equiv g_k(\bar\sigma), \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{24}$$

причем допустим знак равенства, если max реализуется при $p_s \leqslant p_k$.

Нас интересуют такие $\sigma_1^{(k)}, \ldots, \sigma_{n-1}^{(k)}$, которые реализуют $\inf g_k(\bar\sigma)$ на множестве $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$, удовлетворяющих неравенству $\lambda_n > g_n(\bar\sigma)$ (с соответствующими оговорками относительно знака равенства), которое более подробно имеет вид

$$\begin{aligned} &\sigma_n l_n - \sigma_s l_s + |\sigma| \left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_n}\right) \leqslant 0, \qquad p_s \leqslant p_n; \\ &\sigma_n l_n - \sigma_s l_s + \sigma_n \left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_n}\right) < 0, \qquad p_s > p_n. \end{aligned} \tag{25}$$

Обозначим это множество через S.

Л е м м а 7. *Числа (не зависящие от k)*

$$\sigma_s^* = (l_s \lambda_n)^{-1} \left[l_n + \theta \left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_n}\right)\right], \qquad s = 1, \ldots, n-1, \tag{26}$$

где $\theta = 1$ при $p_s > p_n$ и

$$\theta = (\varkappa_n - \delta_n)^{-1} \left[l_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{l_k} - \delta_n \right], \ \delta_n = \sum_{p_s > p_n} \frac{1}{l_s} \left(\frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_s}\right),$$

$$\varkappa_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{l_k} \left(\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p_n}\right)$$

при $p_s \leqslant p_n$ таковы, что

$$\inf_{\bar\sigma \in S} g_k(\bar\sigma) = g_k(\bar\sigma^*), \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{27}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, прежде всего, что множество S непустое и обладает следующим свойством:

$$\inf_{\bar\sigma \in S} \sigma_s = \sigma_s^*, \qquad s = 1, \ldots, n-1, \tag{28}$$

где σ_j^*, определяемые равенствами (26), являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned} &\sigma_n l_n - \sigma_s l_s + |\sigma| \left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_n}\right) = 0, \qquad p_s \leqslant p_n; \\ &\sigma_n l_n - \sigma_s l_s + \sigma_n \left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_n}\right) = 0, \qquad p_s > p_n. \end{aligned} \tag{29}$$

Это вытекает из того, что для векторов нормали N_s, N_t, смотрящих в сторону полупространств, определяемых неравенствами (25), справедливо соотношение $(N_s, N_t) \leqslant 0$.

Далее, для $\bar{\sigma} \in S$

$$\min_{1 \leqslant s \leqslant n} \delta_{sk}(\bar{\sigma}) = \delta_{nk}(\bar{\sigma}), \tag{30}$$

например при $p_s > p_n > p_k$ в силу (25)

$$\delta_{sk} - \delta_{nk} = \sigma_s l_s - \sigma_n \left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_k}\right) - \left(\sigma_n l_n - \sigma_n \left(\frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_k}\right)\right) =$$
$$= \sigma_s l_s - \sigma_n l_n - \sigma_n \left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_n}\right) > 0,$$

а при $p_n \geqslant p_s > p_k$

$$\delta_{sk} - \delta_{nk} = \sigma_s l_s - \sigma_n \left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_k}\right) - \left(\sigma_n l_n - \sigma_n \left(\frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_k}\right)\right) =$$
$$= \sigma_s l_s - \sigma_n l_n + \sigma_n \left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_n}\right) \geqslant (|\sigma| - \sigma_n) \left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_n}\right) \geqslant 0.$$

Подобным же образом рассматриваются остальные возможные случаи для p_k, p_s и p_n.

Таким образом,

$$g_k(\bar{\sigma}) = f_{nk}(\bar{\sigma}) = \begin{cases} \left[-\sigma_k (l_k - 1) + \sigma_n l_n - \sigma_n \left(\frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_k}\right)\right]^{-1}, & p_k < p_n; \\ \left[-\sigma_k (l_k - 1) + \sigma_n l_n - |\sigma| \left(\frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_k}\right)\right]^{-1}, & p_k \geqslant p_n, \end{cases} \tag{31}$$

откуда в силу (28) следует (27).

Пользуясь леммой 7, подсчитаем теперь $g_k(\bar{\sigma}^*)$ и получим, что

$$\inf_{\bar{\sigma} \in S} g_k(\bar{\sigma}) = \frac{\lambda_k}{1 - \Delta_{kn}}, \tag{32}$$

где

$$\Delta_{kn} = \lambda_n (\varkappa_n - \delta_n)^{-1} (\varkappa_n - \mu_n l_k^{-1}) \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{l_s} - \lambda_n\right) \left|\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p_n}\right| \tag{33}$$

и $\mu_n = \delta_n l_k^{-1}$ при $p_k \leqslant p_n$, $\mu_n = (\varkappa_n - \delta_n) l_k^{-1}$ при $p_k > p_n$.

Лемма 8. *Пусть Ω имеет вид (1)—(2″) из § 1 при $i = n$, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и $\operatorname{diam} \operatorname{supp} f \leqslant R$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Если*

$$\gamma_{kn} > \frac{\lambda_k}{1 - \Delta_{kn}}, \tag{34}$$

то

$$\|Tf\|_{W^{\bar{l}}_{\bar{p}}(E_n)} \leqslant c_{13} \|f\|_{W^{\bar{l}}_{\bar{p}}(\Omega)}, \tag{35}$$

где c_{13} не зависит от f при фиксированном R. Кроме того, для $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$

в случае $p_1 = \ldots = p_n = p$, *если*

$$\gamma_{kn} = \lambda_k = l_k, \tag{36}$$

при $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{l_i} \leqslant 1$

$$\| D^{\alpha}(Tf) \|_{L_p(E_n)} \leqslant c_{14} (\| D^{\alpha} f \|_{L_p(\Omega)} + \| f \|_{W_p^{\bar{l}}(\Omega)}), \tag{37}$$

а при $m_i > l_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\| (x_n - \varphi(\bar{x}))^{l_n \left(\frac{m_i}{l_i} - 1\right)} D_i^{m_i}(Tf) \|_{L_p(^c\bar{\Omega})} \leqslant c_{15} \| f \|_{W_p^{\bar{l}}(\Omega)}, \tag{38}$$

где константы c_{14}, c_{15} *не зависят от* f *и* p.

Доказательство. Согласно лемме 6 при $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{l_i} \leqslant 1$ существуют производные $D^{\alpha}(Tf)(x)$, $x \in E_n$. Оценим $\| D^{\alpha}(Tf) \|_{L_q(E_n)}$. Имеем при $x \in G$

$$D^{\alpha}(Tf)(x) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D^{\alpha-\beta}\psi_m(x) D^{\beta} f_m(x) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} J_{\alpha\beta}(x). \tag{39}$$

I. Оценим, прежде всего,

$$K_{\alpha\alpha} = \| J_{\alpha\alpha}(x) \|_{L_q(G)}^q = \int_G \Big| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(x) D^{\alpha} f_m(x) \Big|^q dx.$$

Так как при каждом $x \in G$ в сумме по m отлично от нуля не более двух слагаемых, то

$$K_{\alpha\alpha} \leqslant 2^q \int_G \sum_{m=-\infty}^{\infty} | \psi_m(x) D^{\alpha} f_m(x) |^q dx.$$

Далее,

$$\int_G \sum_{m=-\infty}^{\infty} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{G_s} \sum_{m=s-1}^{s+1} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{m=s-1}^{s+1} \int_{G_s} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{s=m-1}^{m+1} \int_{G_s} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{G}_m}, \tag{40}$$

где $\tilde{G}_m = G_{m-1} \cup G_m \cup G_{m+1}$.

Из определения множеств G_k следует, что

$$\tilde{G}_m = \{2^{-\frac{m+2}{\lambda_n}} < x_n - \varphi(\bar{x}) \leqslant 2^{-\frac{m-1}{\lambda_n}}\}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Таким образом,

$$K_{\alpha\alpha} \leqslant 2^q \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{G}_m} | \psi_m(x) D^{\alpha} f_m(x) |^q dx \leqslant 2^q \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{G}_m} | D^{\alpha} f_m(x) |^q dx. \tag{41}$$

Применяя лемму 5, получим

$$K_{\alpha\alpha} \leqslant c_{16}^q \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{\Omega}_m} | D^{\alpha} f(x) |^q dx.$$

Здесь c_{16} не зависит от q, а

$$\tilde{\Omega}_m = \{-(2^{\lambda+1} + 1)(2^{\lambda/2} + 1)(Mn + 1) 2^{-m/\lambda_n} < x_n - \varphi(\bar{x}) \leqslant$$
$$\leqslant -(Mn + 1) 2^{-m/\lambda_n}\},$$

где $\lambda = \frac{6}{\lambda_n} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sigma_k \gamma_{kn}$ в лемме 5 мы положим $a = 2^{-2/\lambda_n}$, $b = 2^{1/\lambda_n}$, $b_0 = Mn + 1$, тогда $A_n = (2^{\lambda+1} + 1)(Mn + 1)$, $a_0 = (2^{\lambda+1} + 1)(2^{\lambda/2} + 1) \times \times (Mn + 1)$, см. формулу (7)).

Далее, воспользовавшись леммой 11 из [3], получим

$$K_{\alpha\alpha} \leqslant c_{16}^q \int\limits_{E_{n-1}} d\bar{x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\varphi(\bar{x})-a_0\cdot 2^{-m/\lambda_n}}^{\varphi(\bar{x})-b_0\cdot 2^{-m/\lambda_n}} |D^\alpha f(x)|^q dx_n \leqslant c_{16}^q \left(1 + \log_2 \frac{a_0}{b_0}\right) \times$$

$$\times \int\limits_{E_{n-1}} d\bar{x} \int\limits_{-\infty}^{\varphi(\bar{x})} |D^\alpha f(x)|^q dx_n.$$

Таким образом,

$$K_{\alpha\alpha} \leqslant c_{17}^q \int\limits_{\Omega} |D^\alpha f(x)|^q dx, \qquad (41')$$

где c_{17} не зависит от q.

II. При $\beta \neq \alpha$ ($\beta \leqslant \alpha$) будем рассуждать следующим образом. Разобьем множество G на два подмножества $G = G' \cup G''$, где

$$G' = \left\{\frac{1}{2}(1 + 2^{-1/\lambda_n}) < x_n - \varphi(\bar{x}) < \infty\right\},$$

$$G'' = \left\{0 < x_n - \varphi(\bar{x}) \leqslant \frac{1}{2}(1 + 2^{-1/\lambda_n})\right\}.$$

Заметим, что

$$G' \subset \bigcup_{m=-\infty}^{0} G_m, \qquad G'' \subset \bigcup_{m=0}^{\infty} G_m,$$

и, кроме того, в силу свойства 3 разбиения единицы на G'

$$\psi_m(x) = 0, \qquad m \geqslant 1, \qquad \sum_{m=-\infty}^{0} \psi_m(x) = 1, \qquad (42)$$

а на G''

$$\psi_m(x) = 0, \qquad m \leqslant -1, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(x) = 1. \qquad (43)$$

Далее,

$$K_{\alpha\beta} = \| J_{\alpha\beta}(x) \|_{L_q(G)}^q = \int\limits_{G'} | J_{\alpha\beta} |^q dx + \int\limits_{G''} | J_{\alpha\beta}(x) |^q dx \equiv K_{\alpha\beta}^{(1)} + K_{\alpha\beta}^{(2)}.$$

Оценим $K_{\alpha\beta}^{(1)}$. В силу (42) на G'

$$J_{\alpha\beta}(x) = \sum_{m=-\infty}^{0} D^{\alpha-\beta}\psi_m(x) D^\beta f_m(x).$$

Рассуждая аналогично тому, как было получено соотношение (41) и учитывая свойство 4) разбиения единицы, получаем

$$K_{\alpha\beta}^{(1)} \leqslant 2^q \sum_{m=-\infty}^{1} \int\limits_{\tilde{G}_m} | D^{\alpha-\beta}\psi_m(x) D^\beta f_m(x) |^q dx \leqslant$$

$$\leqslant C_{18}^q \sum_{m=-\infty}^{1} 2^{m\left[\left(\alpha, \beta, \frac{1}{\gamma}\right)\right] q} \int\limits_{\tilde{G}_m} | D^\beta f_m(x) |^q dx. \qquad (44)$$

Используя, далее, неравенство (6), окончательно имеем

$$K_{\alpha\beta}^{(1)} \leqslant c_{19}^q \sum_{m=-\infty}^{1} \int\limits_{\tilde{\Omega}_m} | f(x) |^q dx \leqslant c_{19}^q \int\limits_{\Omega} | f(x) |^q dx, \qquad (45)$$

где константа c_{19} не зависит от q.

Так как на G'' в силу (43) $\sum\limits_{m=0}^{\infty} D^{\alpha-\beta}\psi_m(x) = 0$, то можно написать

$$J_{\alpha\beta} = \sum_{m=0}^{\infty} D^{\alpha-\beta}\psi_m(x)\,[D^{\beta} f_m(x) - F_{\beta}(x)], \qquad x \in G'',$$

где $F_{\beta}(x)$ — функция из леммы 5 (не зависящая от m). Тогда аналогично неравенству (44) получаем

$$K_{\alpha\beta}^{(2)} \leqslant 2^q \sum_{m=-1}^{\infty} \int_{\widetilde{G}_m} |\, D^{\alpha-\beta}\psi_m(x)\,[D^{\beta} f_m(x) - F_{\beta}(x)]\,|^q\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_{20}^q \sum_{m=-1}^{\infty} 2^{m\left(\alpha-\beta,\ \frac{1}{\gamma}\right) q} \int_{\widetilde{G}_m} |\, D^{\beta} f_m(x) - F_{\beta}(x)\,|^q\, dx, \tag{46}$$

где c_{20} не зависит от q. Применяя теперь лемму 5, получим

$$K_{\alpha\beta}^{(2)} \leqslant c_{21}^q \sum_{m=-1}^{\infty} 2^{m\left(\alpha-\beta,\ \frac{1}{\gamma}\right) q} \Bigl\{ \sum_{p_k \leqslant q} 2^{m\left[(\sigma,\,\beta)-\sigma_k l_k+|\sigma|\left(\frac{1}{p_k}-\frac{1}{q}\right)\right] q} \,\| D_k^{l_k} f \|_{L_{p_k}(\widetilde{\Omega}_m)}^q +$$

$$+ \sum_{p_k > q} 2^{m\left[(\sigma,\,\beta)-\sigma_k l_k+\sigma_n\left(\frac{1}{p_k}-\frac{1}{q}\right)\right] q} \,\| D_k^{l_k} f \|_{L_{p_k}(\widetilde{\Omega}_m)}^q \Bigr\}. \tag{47}$$

Положим здесь $\alpha = (0, \ldots, l_s, \ldots, 0)$, $\beta = (0, \ldots, \beta_s, \ldots, 0)$, $0 \leqslant \beta_s \leqslant$ $\leqslant l_s - 1$, $q = p_s$. Теперь для того, чтобы получить интересующую нас оценку для $K_{\alpha\beta}^{(2)}$, достаточно потребовать, чтобы выполнялась система неравенств (18). В самом деле, при этом

$$K_{\alpha\beta}^{(2)} \leqslant c_{21}^{p_s} \Bigl\{ \sum_{p_k \leqslant p_s} \sum_{m=-1}^{\infty} \| D_k^{l_k} f \|_{L_{p_k}(\widetilde{\Omega}_m)}^{p} + \sum_{p_k > p_s} \sum_{m=-1}^{\infty} 2^{-m\varepsilon_{ks} p_s} \| D_k^{l_k}(f) \|_{L_{p_k}(\widetilde{\Omega}_m)}^{p_s} \Bigr\},$$

где $\varepsilon_{ks} = \dfrac{l_s - \beta_s}{\gamma_{sn}} + \beta_s \sigma_s - \sigma_k l_k + \sigma_n \left(\dfrac{1}{p_k} - \dfrac{1}{p_s}\right) > 0.$

Далее, воспользовавшись неравенствами

$$\Bigl(\sum_{m=-1}^{\infty} \| \Phi \|_{L_{p_k}(\widetilde{\Omega}_m)}^{p_s}\Bigr)^{\frac{1}{p_s}} \leqslant \Bigl(\sum_{m=-1}^{\infty} \| \Phi \|_{L_{p_k}(\widetilde{\Omega}_m)}^{p_k}\Bigr)^{\frac{1}{p_k}} \leqslant c_{22} \| \Phi \|_{L_{p_k}(\Omega)} \text{ при } p_k \leqslant p_s$$

и

$$\Bigl(\sum_{m=-1}^{\infty} 2^{-m\varepsilon_{ks} p_s} \| \Phi \|_{L_{p_k}(\widetilde{\Omega}_m)}^{p_s}\Bigr)^{\frac{1}{p_s}} \leqslant \| \Phi \|_{L_{p_k}(\Omega)} \Bigl(\sum_{m=-1}^{\infty} 2^{-m\varepsilon_{ks} p_s}\Bigr)^{\frac{1}{p_s}} = c_{23} \| \Phi \|_{L_{p_k}(\Omega)},$$

при любых p_k и p_s получаем

$$K_{\alpha\beta}^{(2)} \leqslant c_{24} \sum_{i=1}^{n} \| D_i^{l_i} f \|_{L_{p_i}(\Omega)}. \tag{48}$$

Оценки (41′), (45), (48) доказывают утверждение п. 1 леммы 8.

В случае $p_1 = \ldots = p_n$ условия (18) выполнены при $\gamma_{in} = l_i$, $\sigma_i = l_i^{-1}$ и без существенных дополнительных изменений мы придем к неравенствам (37) и (38).

В случае различных p_i в силу (34) $\gamma_{kn} > \inf\limits_{\bar{\sigma} \in S} g_k(\bar{\sigma})$, и мы можем выбрать такое $\bar{\sigma} \in S$, достаточно близкое к $\bar{\sigma}^*$, чтобы выполнялась система (18).

Пусть теперь Ω — открытое множество с границей класса $A(l)$ или $A(\gamma, \bar{\lambda})$. Исходя из оператора T, построим как и в [3] оператор продолжения

$S = \sum_{i=0}^{s} T_i(\chi_i f)$, где χ_i — подходящее разбиение единицы, и с помощью оператора S получим теоремы о продолжении с сохранением класса. Они доказываются так же, как и теорема 2 из [3] (в случае различных p_i нужно дополнительно учесть, что диаметры носителей функций равномерно ограничены в силу условий, наложенных на параллелепипеды V_i).

Приведем формулировки соответствующих теорем.

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma(\Omega) \in A(\bar{l})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда*

$$S : W_p^{\bar{l}}(\Omega) \to W_p^{\bar{l}}(E_n),$$

причем этот оператор ограничен, норма $\| S \|$ *ограничена постоянной, не зависящей от* p, $(Sf)(x) \in C^\infty({}^c\bar{\Omega})$ *и при* $m_i > l_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\left\| \rho(x)^{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} l_k \left(\frac{m_i}{l_i} - 1\right)} D_i^{m_i}(Sf)(x) \right\|_{L_p(\bar{\Omega})} \leqslant c_{25} \| f \|_{W_p^{\bar{l}}(\Omega)}, \tag{49}$$

где c_{25} *не зависит от* f *и* p.

Теорема 2. *Пусть* $\Gamma(\Omega) \in A(\gamma, \bar{\lambda})$, *где* $\gamma_{ki} > \frac{\lambda_k}{1 - \Delta_{ki}}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, $k \neq i$ (Δ_{ki} *определяются формулой* (33) *с заменой* n *на* i), $1 \leqslant p_s \leqslant \infty$, $s = 0, 1, \ldots, n$. *Тогда*

$$S : W_{\bar{p}}^{\bar{l}}(\Omega) \to W_{\bar{p}}^{\bar{l}}(E_n),$$

причем этот оператор ограничен.

Показатель $\nu = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} l_k \left(\frac{m_i}{l_i} - 1\right)$ в (49) нельзя заменить на $\nu - \varepsilon$. Это доказывается аналогично тому, как доказывалась неулучшаемость показателя в теореме 1 из [3]. В данном случае нужно воспользоваться теоремой С. В. Успенского [8] о следах функций из анизотропных весовых пространств.

Рассмотрим еще в качестве примера область $\Omega = \{|x_1| < 1/2,\ |x_1|^\alpha < x_2 < 1\}$ и пространство $W_{p_0, p_1, p_2}^{1,1}(\Omega)$, $p_1 < p_2$. В этом случае $\Delta_{12} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$ и теорема 2 справедлива при $\alpha > \left(1 - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right)^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бесов О. В., Ильин В. П.* Естественное расширение класса областей в теоремах вложения.—Мат. сб., 1968, 75, № 4, с. 483—495.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
3. *Буренков В. И.* Об одном способе продолжения дифференцируемых функций.— Труды МИАН СССР, 1976, 140, с. 27—67.
4. *Буренков В. И., Файн Б. Л.* О продолжении функций из анизотропных пространств с сохранением класса.— ДАН СССР, 1976, 228, № 3.
5. *Файн Б. Л.* Теоремы вложения для пространств функций с частными производными, суммируемыми в разных степенях.— Мат. заметки, 1975, 18, № 3, с. 379—393.
6. *Бесов О. В.* Мультипликативные оценки для интегральных норм дифференцируемых функций многих переменных. — Труды МИАН СССР, 1974, 131, с. 3—15.
7. *Буренков В. И.* О разбиениях единицы.— Наст. сб., с. 24—30.
8. *Успенский С. В.* Теоремы вложения и продолжения для одного класса функций. II.— Сиб. мат. журн., 1966, 7, № 2, с. 409—418.