Л. Д. Альтшулер, О функториальной зависимости между группами гомологии и когомологии,
Матем. заметки, 1985, том 38, выпуск 4, 599–607

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 4 (1985)

О ФУНКТОРИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ГРУППАМИ ГОМОЛОГИЙ И КОГОМОЛОГИЙ

Л. Д. Альтшулер

1. Определение [1]. Пусть F и F_1 — функторы из некоторой категории $\mathscr{A}$ в категорию $\mathscr{B}$. Говорят, что F_1 функториально зависит от F, если для любого морфизма f, для которого $F(f)$ — изоморфизм, морфизм $F_1(f)$ тоже изоморфизм. Обозначение: $F \Rightarrow F_1$.

Пусть $\mathscr{A}$ — категория всех топологических пространств, $\mathscr{B}$ — категория градуированных абелевых групп. Пусть $H_*(\cdot; \mathbf{Z})$, $H^*(\cdot; G)$ — функторы сингулярных гомологий и когомологий с коэффициентами в группах $\mathbf{Z}$ и G. В работе [1] устанавливаются зависимости

$$H_*(\cdot; \mathbf{Z}) \Leftrightarrow H^*(\cdot; \mathbf{Z}),$$
$$H^*(\cdot; \mathbf{Z}) \Rightarrow H^*(\cdot; G).$$

Из результатов работы [2] вытекает, что аналогичные результаты имеют место и для модулей коэффициентов G над счетным кольцом главных идеалов R.

Рассмотрим теперь следующие категории. $\mathscr{L}^{\mathrm{prop}}$ — категория локально компактных пространств со второй аксиомой счетности и их собственных отображений. На этой категории рассматриваются когомологии Александера — Спеньера с компактными носителями $H_c^*(\cdot; G)$ и гомологии Стинрода — Ситникова $H_*(\cdot; G)$ с любыми замкнутыми носителями (теории второго рода). $\mathscr{L}$ — категория локально компактных пространств со второй аксиомой счетности и их любых непрерывных отображений Здесь рассматриваются обычные когомологии Александера — Спеньера $H^*(\cdot;\ G)$ и гомологии Стинрода — Ситникова с компактными носителями $H_*^c(\cdot;\ G)$ (обычные теории). Описание теорий H_* и H_*^c см. в [3] или [4].

Основное кольцо R на протяжении всей работы предполагается счетным кольцом главных идеалов. С помощью формулы универсальных коэффициентов

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_c^{n+1}(X),\ G) \to H_n(X;\ G) \to \to \operatorname{Hom}(H_c^n(X),\ G) \to 0$$

и естественных изоморфизмов $H_*(X;\ G) = H_*(\dot{X};\ G)$, $H_c^*(X;\ G) = H^*(\dot{X};\ G)$, где $\dot{X}$ — одноточечная компактификация X, так же как и в [1], устанавливается следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G — произвольный R-модуль. В категории $\mathcal{L}^{\mathrm{prop}}$ имеют место функториальные зависимости*

$$H_c^*(\cdot;\ R) \Leftrightarrow H_*(\cdot;\ R),$$
$$H_*(\cdot;\ R) \Rightarrow H_*(\cdot;\ G).$$

Основной результат настоящей работы — аналогичная теорема в категории $\mathcal{L}$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G — модуль над счетным кольцом главных идеалов R. В категории $\mathcal{L}$ имеют место функториальные зависимости*

$$H^*(\cdot;\ R) \Rightarrow H_*^c(\cdot;\ G), \tag{1}$$
$$H_*^c(\cdot;\ R) \Rightarrow H^*(\cdot;\ R), \tag{2}$$
$$H^*(\cdot;\ R) \Rightarrow H^*(\cdot;\ G). \tag{3}$$

Из нее вытекает

Следствие. *В категории $\mathcal{L}$*

$$H^*(\cdot;\ R) \Leftrightarrow H_*^c(\cdot;\ R), \quad H_*^c(\cdot;\ R) \Rightarrow H_*^c(\cdot;\ G),$$
$$H_*^c(\cdot;\ R) \Rightarrow H^*(\cdot;\ G).$$

Замечание. Зависимость (3) подтверждает для локально компактных пространств со второй аксиомой счетности гипотезу, высказанную в [1]. Будет показано, что никаких формул (типа универсальных коэффициентов, например), связывающих между собой исследуемые в работе зависимые функторы, не существует.

2. В отличие от теоремы 1 для доказательства теоремы 2 метод, разработанный в [1], уже неприменим (цилиндр отображения локально компактных пространств не локально компактен). Доказательство опирается на алгебраическую конструкцию конуса цепного отображения [5, § 4.2].

Пусть K и L — цепные комплексы, а $f\colon K \to L$ — цепной гомоморфизм. Конус отображения f — это комплекс Cf, определяемый следующим образом:

$$Cf_q = K_{q-1} \oplus L_q, \quad \partial(k, l) = (-\partial_K k, f(k) + \partial_L l).$$

В случае, если f — отображение коцепных комплексов,

$$Cf^q = K^q \oplus L^{q-1}, \quad \delta(k, l) = (-\delta_K k, f(k) + \delta_L l).$$

Имеется короткая точная последовательность цепных комплексов:

$$0 \to L \to Cf \to K^+ \to 0 \qquad (K_q^+ = K_{q-1},\ \partial_{K^+} = -\partial_K).$$

Она расщепляется в каждой размерности. Этой последовательности соответствует длинная точная последовательность модулей гомологий

$$\ldots \to H_{q+1}(Cf) \to H_q(K) \xrightarrow{f_*} H_q(L) \to H_q(Cf) \to \ldots \tag{4}$$

Отсюда вытекает, что f — тогда и только тогда изоморфизм, когда $H_*(Cf) = 0$. Аналогичное утверждение верно и для когомологий.

Нетрудно видеть, что функтор конуса перестановочен с любым аддитивным ковариантным функтором из категории модулей в себя. С контравариантным аддитивным функтором перестановочность имеет место с точностью до изменения знака у граничных операторов комплексов K и L. В самом деле, если $f\colon K_q \to L_q$, то

$$Ff\colon F(L_q) \to F(K_q),$$
$$F(Cf_q) \simeq F(K_{q-1}) \oplus F(L_q) \simeq F(L_q) \oplus F(K_{q-1}).$$

Дифференциал $\partial\colon Cf_{q+1} \to Cf_q$ в комплексе Cf определяется четырьмя отображениями

$$K_q \xrightarrow{-\partial_K} K_{q-1}, \quad K_q \xrightarrow{f} L_q, \quad L_{q+1} \xrightarrow{0} K_{q-1}, \quad L_{q+1} \xrightarrow{\partial_L} L_q.$$

Применяя к этим отображениям функтор F, получим

$$F(K_{q-1}) \xrightarrow{-F\partial_K} F(K_q), \quad F(L_q) \xrightarrow{Ff} F(K_q),$$

$$F(K_{q-1}) \xrightarrow{0} F(L_{q+1}), \quad F(L_q) \xrightarrow{F\partial_L} F(L_{q+1}).$$

Таким образом, если $Cf = C(f, \partial_K, \partial_L)$, то

$$FC(f, \partial_K, \partial_L) = C(Ff, -F\partial_L, -F\partial_K).$$

В дальнейшем конус $C(f, -\partial_K, -\partial_L)$ обозначается $C^{\ominus}f$. В частности, если $F = \mathrm{Hom}(\cdot; G)$ или $F = \cdot \otimes G$, то

$$\mathrm{Hom}(Cf, G) = C^{\ominus}\hat{f}, \quad Cf \otimes G = Cf_G,$$

где

$$\hat{f}\colon \mathrm{Hom}(L, G) \to \mathrm{Hom}(K, G), \quad f_G\colon K \otimes G \to L \otimes G$$

— отображения, индуцируемые f. В частности, функтор конуса перестановочен с прямыми и обратными пределами.

3. Пусть $C^*(X; G)$ — модуль локально конечнозначных коцепей Александера — Спеньера с коэффициентами в G (см. [4, § 8.2]) и $C^*(X) = C^*(X; R)$. Пусть $C_*^c(X; G)$— модуль цепей с компактными носителями, $C_*^c(X) = C_*^c(X; R)$. Имеем

$$C_*^c(X; G) = \varinjlim C_*(K; G),$$

где прямой предел берется по всем компактным подмножествам $K \subset X$, $C_*(K; G) = \mathrm{Hom}(C^*(K), G)$ (см. [4, § 4.4]). Известно, что $C^*(K)$ — свободный комплекс. Имеем также $C^*(X; G) = \varprojlim C^*(K; G)$, где обратный предел берется по всем компактным $K \subset X$ (см. [4, лемма 11.9]). Пусть $f\colon X \to Y$ непрерывное отображение.

В направленных множествах всех компактных подмножеств $K \subset X$, $L \subset Y$ выберем такие счетные конфинальные последовательности $\{K_n\}$, $\{L_n\}$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $\bigcup_n K_n = X$, $\bigcup_n L_n = Y$, $K_n \subset \mathrm{Int}\, K_{n+1}$, $L_n \subset \mathrm{Int}\, L_{n+1}$, $f(K_n) \subset L_n$.

Пусть $C\hat{f}$, $C(\hat{f}; G)$ — конусы коцепных отображений $\hat{f}\colon C^*(Y) \to C^*(X)$, $C^*(Y; G) \to C^*(X; G)$, $C^{\ominus}f$, $C^{\ominus}(f; G)$ — конусы цепных отображений

$$f\colon C_*^c(X) \to C_*^c(Y), \; C_*^c(X; G) \to C_*^c(Y; G).$$

Тот же смысл имеют обозначения $C\widehat{f_n}$, $C(\widehat{f_n};\ G)$, $C^{\ominus}f_n$, $C^{\ominus}(f_n;\ G)$ для отображений $f_n = f \mid K_n\colon K_n \to L_n$. Тогда, $C^{\ominus}(f_n; G) = \operatorname{Hom}(C\widehat{f_n}, G)$, $C(\widehat{f_n}; G) = C\widehat{f_n} \otimes G$, $C(\widehat{f}; G) = \varprojlim_n C(\widehat{f_n};\ G)$, $C^{\ominus}(f;\ G) = \varinjlim_n C^{\ominus}(f_n;\ G)$. При этом $\varprojlim_n{}^{(1)} C(\widehat{f_n};\ G) = 0$, так как проекции

$$C^*(K_{n+1};\ G) \to C^*(K_n;\ G),\quad C^*(L_{n+1};\ G) \to C^*(L_n;\ G)$$

— эпиморфизмы (см. [6, лемма 1] и [4, § 8.2]).

Докажем функториальные зависимости (1) и (3). Пусть $f^*\colon H^*(Y) \to H^*(X)$ — изоморфизм. Тогда $H^*(C\widehat{f}) = 0$. Имеет место короткая точная последовательность (см. [6, лемма 7])

$$0 \to \varprojlim_n{}^{(1)} H^{q-1}(C\widehat{f_n}) \to H^q(C\widehat{f}) \to \varprojlim_n H^q(C\widehat{f_n}) \to 0. \qquad (5)$$

Отсюда

$$\varprojlim H^q(C\widehat{f_n}) = \varprojlim{}^{(1)} H^{q-1}(C\widehat{f_n}) = 0$$

для любого q. Так как модули $H^q(C^*(K_n)) = H^q(K_n)$ и $H^q(C^*(L_n)) = H^q(L_n)$ счетны, то из точной последовательности типа (4) вытекает, что $H^q(C\widehat{f_n})$ — счетные модули. Отсюда (см. [6, следствие 1]) спектры $\{H^q(C\widehat{f_n})\}$ тривиальны (спектр $\{G_i\}_{i \in I}$ тривиален, если для каждого $i \in I$ существует такое $j \geqslant i$, что $\operatorname{Im}(G_j \to G_i) = 0$). Так как комплексы $C\widehat{f_n}$ свободны, имеет место формула универсальных коэффициентов

$$0 \to \operatorname{Ext}(H^{q+1}(C\widehat{f_n}), G) \to$$
$$\to H_q(C^{\ominus}(f_n;\ G)) \to \operatorname{Hom}(H^q(C\widehat{f_n}), G) \to 0. \qquad (6)$$

Переходя в последовательности (6) к прямому пределу, используя тривиальность спектров $\{H^q(C\widehat{f_n})\}$, аддитивность функторов Ext и Hom и формулу $C^{\ominus}(f;\ G) = \varinjlim C^{\ominus}(f_n;\ G)$ для каждого q получаем $H_q(C^{\ominus}(f;\ G)) = 0$. Это означает, что $f_*\colon H_*^c(X;\ G) \to H_*^c(Y;\ G)$ — изоморфизм. Зависимость (1) доказана.

Используя формулу универсальных коэффициентов

$$0 \to H^q(C\widehat{f_n}) \otimes G \to H^q(C(\widehat{f_n};\ G)) \to \operatorname{Tor}(H^{q+1}(C\widehat{f_n}), G) \to 0,$$

аддитивность функторов $\otimes$ и Tor и тривиальность спектров $\{H^q(C\hat{f}_n)\}$, можно методом диаграммного поиска (ср. [7, 2.16.3]) доказать, что спектры $\{H^q(C(\hat{f}_n;\ G))\}$ тоже тривиальны. Поэтому из короткой точной последовательности

$$0 \to \varprojlim^{(1)} H^{q-1}(C(\hat{f}_n;\ G)) \to$$
$$\to H^q(C(\hat{f};\ G)) \to \varprojlim H^q(C(\hat{f}_n;G)) \to 0$$

получаем $H^q(C(\hat{f};\ G)) = 0$, а это значит, что $f^*\colon H^*(Y;\ G) \to H^*(X;\ G)$ — изоморфизм. Зависимость (3) доказана.

Для доказательства функториальной зависимости (2) требуется

ЛЕММА 1. *Пусть* $\{G_i\}_{i \in I}$ — *счетный обратный спектр счетных модулей над счетным кольцом главных идеалов. Спектр* $\{G_i\}$ *тривиален тогда и только тогда, когда*

$$\varinjlim \operatorname{Hom}(G_i,\ R) = \varinjlim \operatorname{Ext}(G_i,\ R) = 0.$$

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть

$$\varinjlim \operatorname{Hom}(G_i,\ R) = \varinjlim \operatorname{Ext}(G_i,\ R) = 0.$$

В этом случае спектр $\{G_i\}$ удовлетворяет условию clc Митчела [8], т. е. для каждого $i \in I$ существует такое $j \geqslant i$, что модуль $\operatorname{Im}(G_j \to G_i)$ конечно порожден. Не ограничивая общности, можно считать, что каждый G_i — конечно порожденный модуль. В самом деле, переходя к конфинальной части спектра, можно считать, что конечно порождены модули $E_i = \operatorname{Im}(G_{i+1} \to G_i)$, а спектры $\{E_i\}$ и $\{G_i\}$ являются конфинальными частями третьего спектра $G_1 \leftarrow E_1 \leftarrow G_2 \leftarrow E_2 \leftarrow \ldots$ Диаграммный поиск (указывавшегося выше типа) показывает, что если лемма верна по отдельности для спектров из периодических модулей и для спектров из модулей без кручения, то она верна вообще.

Пусть все G_i — конечно порожденные модули без кручения. Так как $\varinjlim \operatorname{Hom}(G_i,\ R) = 0$, то поскольку модули $\operatorname{Hom}(G_i,\ R)$ конечно порождены, для каждого $i \in I$ существует такое $j \geqslant i$, что

$$\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}(G_i,\ R) \to \operatorname{Hom}(G_j,\ R)) = 0,$$

G_i — свободный модуль конечного ранга, и, следовательно, $G_i = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G_i, R), R)$. Из аддитивности функтора Hom следует, что спектр $\{G_i\}$ тривиален.

Пусть все G_i — конечно порожденные периодические модули. Так как $\varinjlim \mathrm{Ext}(G_i, R) = 0$, то для каждого $i \in I$ существует такое $j \geqslant i$, что

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Ext}(G_i, R) \to \mathrm{Ext}(G_j, R)) = 0$$

(модули $\mathrm{Ext}(G_i, R)$ конечно порождены). Положим $B_{ji} = \mathrm{Im}(G_j \to G_i)$. Из точной последовательности для функторов Ext заключаем, что отображение $\mathrm{Ext}(G_i, R) \to \mathrm{Ext}(B_{ji}, R)$, индуцированное включением $B_{ji} \subset G_i$, эпиморфно, а отображение $\mathrm{Ext}(B_{ji}, R) \to \mathrm{Ext}(G_j, R)$, индуцированное эпиморфизмом $G_j \to B_{ji}$, мономорфно, так как $\mathrm{Ker}(G_j \to B_{ji})$ — периодический модуль. Отсюда следует, что $\mathrm{Ext}(B_{ji}, R) = 0$, а так как B_{ji} — конечно порожденные периодические модули, то $B_{ji} = 0$ и спектр $\{G_i\}$ тривиален. Лемма доказана.

Пусть f: $X \to Y$ — непрерывное отображение такое, что f_*: $H_*^c(X) \to H_*^c(Y)$ — изоморфизм. Тогда $H_*(C^{\ominus} f) = 0$. В последовательности (6) при $G = R$, переходя к прямому пределу, получим

$$\varinjlim_n \mathrm{Ext}(H^q(C\hat{f}_n), R) = \varinjlim_n \mathrm{Hom}(H^q(C\hat{f}_n), R) = 0.$$

Модули $H^q(C\hat{f}_n)$ счетны, поэтому из леммы 1 вытекает, что спектры $\{H^q(C\hat{f}_n)\}$ тривиальны для каждого q, а из последовательности (5) следует $H^q(C\hat{f}) = 0$. Таким образом, f^*: $H^*(Y) \to H^*(X)$ — изоморфизм. Этим завершается доказательство теоремы 2.

4. В этом пункте показывается, что зависимости (1), (2) и (3) не являются следствиями каких бы то ни было «формул», выражающих один функтор через другой.

ЛЕММА 2. *Существует счетный локальный конечный полиэдр* X_1 *такой, что* $H_0^c(X_1) = \mathbf{Z}$, $H_1^c(X_1) = \mathbf{Q}$, $H_q^c(X_1) = 0$ *при* $q > 1$.

Доказательство. Пусть S_i^1, $i = 1, 2, 3, \ldots,$ — окружности, φ_i: $S_i^1 \to S_{i+1}^1$ — $(i+1)$-кратные накрытия, X_1 — локально конечный полиэдр, полученный из дискретного объединения цилиндров отображений φ_i после попарных отождествлений окружностей S_i^1. Полиэдр X_1 имеет требуемые гомологии.

ЛЕММА 3. *Существует компакт X_2 такой, что*

$$H^0(X_2) = \mathbf{Z}, \quad H^1(X_2) = \mathbf{Q}, \quad H^q(X_2) = 0, \quad q > 1.$$

Требуемые когомологии имеют компакт, являющийся обратным пределом спектра $\{S_i^1\}$ окружностей, в котором $S_{i+1}^1 \to S_i^1$ — $(i+1)$-кратные накрытия.

Пусть $Y_1 = X_1 \vee X_2$, $Y_2 = X_2 \vee X_2$ — топологические букеты, $H_0^c(Y_1) = \mathbf{Z}$, $H_1^c(Y_1) = \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}$, $H_q^c(Y_1) = 0$ при $q > 1$. С помощью формул универсальных коэффициентов получаем

$$H^0(X_1) = H^0(Y_1) = \mathbf{Z},\ H^1(Y_1) = H^1(X_1) = 0,$$
$$H^2(X_1) = \operatorname{Ext}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}),$$
$$H^2(Y_1) = \operatorname{Ext}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}).$$

При этом $\operatorname{Ext}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \cong \operatorname{Ext}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ (см. [9, § 51, упр. 8]). Аналогично имеем

$$H^0(X_1; \mathbf{Q}) = H^0(Y_1; \mathbf{Q}) = \mathbf{Q},$$
$$H^1(X_1; \mathbf{Q}) = \operatorname{Hom}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}, \quad H^1(Y_1; \mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}.$$

Таким образом, $H^*(X_1) \cong H^*(Y_1)$, но $H_*^c(X_1) \not\cong H_*^c(Y_1)$ и $H^*(X_1; \mathbf{Q}) \cong H^*(Y_1; \mathbf{Q})$. Это означает, что зависимости (1) и (3) не являются следствием каких-либо формул. Аналогичное утверждение для зависимости (2) получается после вычисления гомологий пространств X_2 и Y_2:

$$H_0(X_2) = \mathbf{Z} \oplus \operatorname{Ext}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}),$$
$$H_0(Y_2) = \mathbf{Z} \oplus \operatorname{Ext}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}),$$
$$H_q(X_2) = H_q(Y_2) = 0,\ q > 1.$$

В заключение автор благодарит Е. Г. Скляренко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Институт физики Земли
АН СССР

Поступило
19.09.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Bredon G. E. On the Künneth formula and functorial dependence in algebraic topology.— Amer. J. Math., 1968, v. 90, № 2, p. 522—527.

[2] Huber M. Klassen von Moduln über Dedekind-Ringen und Satz von Stein — Serre.— Comment. Math. Helv., 1976, v. 52, № 4, p. 527—546.

[3] Скляренко Е. Г. Теория гомологий и аксиома точности.— Успехи мат. наук, 1969, т. 24, вып. 5, с. 47—140.
[4] Масси У. Теория гомологий и когомологий.— М.: Мир, 1981.
[5] Спеньер Э. Алгебраическая топология.— М.: Мир, 1971.
[6] Харлап А. Э. Локальные гомологии и когомологии, гомологическая размерность и обобщенные многообразия.— Мат. сб., 1975, т. 96, № 3, с. 347—373.
[7] Bredon G. E. Sheaf theory.— N. Y.: McGraw-Hill, 1967.
[8] Mitchell W. J. Homology manifolds, inverse systems and cohomological local connectedness.— J. London Math. Soc., 1979, v. 19, № 2, p. 348—358.
[9] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, т. 1.— М.: Мир, 1974