

Общероссийский математический портал

М. Б. Давыдова, С. А. Шабров, О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стильтьеса, *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2011, том 11, выпуск 5, 13–17

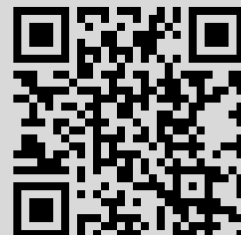
DOI: 10.18500/1816-9791-2011-11-4-13-17

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

13 февраля 2025 г., 15:44:53





УДК 517

## О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛОМ СТИЛТЬЕСА

М. Б. Давыдова, С. А. Шабров

Воронежский государственный университет,  
кафедра математического анализа  
E-mail: mbd@vsu.ru, shaspoteha@mail.ru

В работе получены достаточные условия существования нескольких решений у нелинейной краевой задачи с интегралом Стильтеса.

**Ключевые слова:** краевая задача, интеграл Стильтеса, нелинейная задача.

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее время интенсивно изучаются дифференциальные уравнения с производными по мере. Так, для линейных уравнений второго порядка построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, вплоть до осцилляционных теорем [1–4].

Эффективность использования производных по мере (или в интегродифференциальной форме) объясняется следующим обстоятельством: для применения качественных методов анализа (теорем типа Ролля) решений дифференциальных уравнений необходимо знать значения функции и её производных в каждой точке, что с позиций теории обобщённых функций затруднительно. Здесь можно отметить работу А. Д. Мышкиса [5] — доказательство аналога теоремы Штурма о перемежаемости нулей для уравнения  $u'' + qu = 0$  с обобщённым коэффициентом  $q$ .

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется получить достаточные условия существования нескольких различных решений задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv -(pu'_x)(x) + (pu'_x)(0) + \int_0^x u dQ = \int_0^x f(s, u(s)) d\sigma(s), \\ (pu'_x)(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu'_x)(l) + \gamma_2 u(l) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\sigma(x)$  — строго возрастающая функция, порождающая на  $[0; l]$  меру, причем  $p(x)$  и  $Q(x)$  —  $\sigma$ -абсолютно непрерывны на  $[0; l]$ ;  $\gamma_1 \gamma_2 \geq 0$ ,  $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$ ; функция  $f(x, u)$  порождает оператор суперпозиции

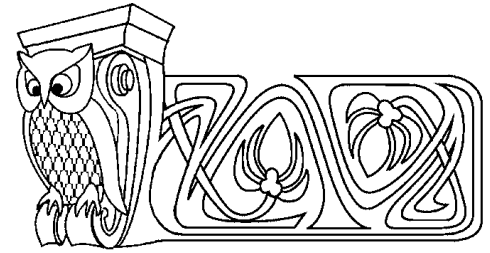
$$[Fu](x) = f(x, u(x)),$$

который непрерывно действует из  $C[0; l]$  в  $L_{p, \sigma}[0; l]$  — пространство измеримых на  $[0; l]$  функций, суммируемых с  $p$  степенью ( $1 \leq p < \infty$ ). Нормой в  $L_{p, \sigma}[0; l]$  служит величина  $\|f\|_{p, \sigma} =$

$\left( \int_0^l |f(x)|^p d\sigma(x) \right)^{1/p}$ . Для того чтобы  $F$  непрерывно действовал из  $C[0; l]$  в  $L_{1, \sigma}[0; l]$ , достаточно,

чтобы  $f(x, u)$  была совокупно равномерно  $[\sigma \times u]$ -непрерывна: для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всяких точек  $(x_1, u_1)$  и  $(x_2, u_2)$ , удовлетворяющих неравенствам  $|\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| < \delta$  и  $|u_1 - u_2| < \delta$ , справедливо неравенство  $|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_2)| < \varepsilon$ . Интегралы в (1) понимаются по Лебегу – Стильтесу.

В уравнении из (1)  $x$  принадлежит множеству  $\overline{[0; l]}_S$ , которое строится следующим образом. Через  $S(\sigma)$  обозначим множество точек разрыва функции  $\sigma(x)$ . На множестве  $J_S = [0; l] \setminus S(\sigma)$  введем



**On the Number of Solutions of Nonlinearity Boundary Value Problems with a Stieltjes Integral**

M. B. Davidova, S. A. Shabrov

Voronezh State University,  
Chair of Mathematical Analysis  
E-mail: mbd@vsu.ru, shaspoteha@mail.ru

In this paper we obtain sufficient conditions for the existence of multiple solutions for nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral.

**Key words:** boundary value problem, Stieltjes integral, nonlinear problem.



метрику  $\rho(x, y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$ . Если  $S(\sigma) \neq \emptyset$ , то метрическое пространство  $(J_S, \rho)$ , очевидно, не является полным. Стандартное пополнение  $(J_S, \rho)$ , при котором каждая точка  $\xi \in S(\sigma)$  заменяется парой собственных элементов  $\{\xi - 0, \xi + 0\}$ , и приводит нас к  $\overline{[0; l]}_S$ . В каждой точке  $\xi \in S(\sigma)$  уравнение в (1) принимает вид

$$-\Delta(pu'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = f(\xi, u(\xi)),$$

где  $\Delta\psi(\xi) = \psi(\xi + 0) - \psi(\xi - 0)$  — скачок функции  $\psi(x)$  в точке  $\xi$ .

Будем говорить, что однородное уравнение  $Lu = 0$  не осциллирует на  $[0; l]$ , если всякое нетривиальное решение имеет на  $[0; l]$  не более одного нуля.

Более подробно с теорией неосцилляции этого уравнения можно ознакомиться в работах [2, 3].

Введем обозначение

$$K = \{u(x) \in C[0; l] : u(x) \geq 0 \forall x \in [0; l]\}.$$

Множество  $K$  является телесным, нормальным конусом в  $C[0; l]$ . В дальнейшем нам понадобится  $u_0$ -норма:

$$\|u\|_{u_0} = \sup_{0 < x < l} \left| \frac{u(x)}{u_0(x)} \right|,$$

где

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\max_{(x,s)} g(x,s)}, & \text{если } \gamma_1 < \infty \text{ и } \gamma_2 < \infty, \\ x/(2l), & \text{если } \gamma_1 = \infty \text{ и } \gamma_2 < \infty, \\ (l-x)/(2l), & \text{если } \gamma_1 < \infty \text{ и } \gamma_2 = \infty, \\ x(l-x)/l, & \text{если } \gamma_1 = \infty \text{ и } \gamma_2 = \infty. \end{cases}$$

Запись  $\gamma_1 = \infty$  мы понимаем следующим образом: краевое условие  $(pu'_x)(0) - \gamma_1 u(0) = 0$  заменяется условием  $u(0) = 0$ . Аналогично понимается запись  $\gamma_2 = \infty$ . Как нетрудно видеть,  $\|\cdot\|_{u_0}$  является нормой в пространстве  $E_{u_0}$  функций  $u(x)$  из  $C[0; l]$ , для каждой из которых  $\|u\|_{u_0}$  конечна, более того,  $E_{u_0}$  является полным пространством по этой норме. Множество  $K_{u_0} = K \cap E_{u_0}$  является телесным конусом. Кроме того, отношение  $u \leq v$  эквивалентно по определению включению  $v - u \in K_{u_0}$ .

## ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

**Теорема.** Пусть выполнены следующие условия:

- 1) однородное уравнение  $Lu = 0$  не осциллирует на  $[0; l]$ ;
- 2)  $f(x, u)$  — равномерно  $[\sigma \times u]$ -непрерывна на  $[0; l] \times R^1$ ;
- 3) функция  $f(x, u)$  не убывает по  $u$  при каждом  $x \in [0; l]$  и

$$f(x, 0) \geq 0; \tag{2}$$

- 4) существует  $N$  пар чисел  $\alpha_i, \beta_i$ , удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_n < \beta_n, \tag{3}$$

$$f(x, \beta_k u_0(x)) < \frac{\beta_k}{\int_0^l h_2(s) d\sigma(s)} \quad (x \in [0; l]). \tag{4}$$

- 5) для каждого  $k$  существует множество  $w_k \subset [0; l]$  положительной  $\sigma$ -меры такое, что

$$f(x, \alpha_k u_0(x)) > \frac{1}{\int_{w_k} h_1(s) d\sigma(s)} \quad (x \in [0; l], k = 1, \dots, N). \tag{5}$$

Тогда задача (1) имеет  $2N - 1$  нетривиальных решений  $\{u_i(x)\}_{i=1}^{i=2N-1}$ , удовлетворяющих неравенствам

$$u_i(x) \geq 0 \quad (i = 1, 3, \dots, 2N - 1) \tag{6}$$

и

$$u_{2i-1}(x) \leq u_{2i+1}(x) \quad (i = 1, 2, \dots, N - 1).$$



Неравенства (6) связывают лишь решения  $u_i(x)$  с нечетными номерами. По отношению к этим решениям остальные расположены «между» ними в следующем смысле: при каждом  $k = 1, 2, \dots, N-1$  существуют точки  $x'_k$  и  $x''_k$  такие, что

$$u_{2k-1}(x'_k) < u_{2k}(x'_k) \quad \text{и} \quad u_{2k}(x''_k) \leq u_{2k+1}(x''_k).$$

**Доказательство.** Вопрос о разрешимости краевой задачи (1) можно заменить вопросом о разрешимости нелинейного интегрального уравнения

$$u(x) = \int_0^l G(x, s) f(s, u(s)) d\sigma(s), \quad (7)$$

где  $G(x, s)$  — функция Грина краевой задачи

$$\begin{cases} -(pu'_x)(x) + (pu'_x)(0) + \int_0^x u dQ = -pu'_x(0) + F^*(x) - F^*(0), \\ (pu'_x)(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu'_x)(l) + \gamma_2 u(l) = 0, \end{cases}$$

здесь  $F^*(x)$  —  $\sigma$ -абсолютно непрерывна на  $[0; l]$ .

Уравнение (7) можно записать в виде

$$u = GFu, \quad (8)$$

где  $G$  — интегральный оператор с ядром  $G(x, s)$ :  $(GF^*)(x) = \int_0^l G(x, s) \frac{d}{d\sigma} F^*(s) d\sigma$  и  $F$  — оператор суперпозиции:  $(Fu)(x) = f(x, u(x))$ .

Уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$\frac{u(x)}{u_0(x)} = \int_0^l \frac{G(x, s)}{u_0(x)} f\left(s, \frac{u(s)}{u_0(s)} \cdot u_0(s)\right) d\sigma(s),$$

или

$$\hat{u}(x) = (\hat{G}\hat{F}\hat{u})(x),$$

где  $\hat{G}$  — интегральный оператор с ядром  $\frac{G(x, s)}{u_0(x)}$ ,  $\hat{F}$  — оператор суперпозиции  $(\hat{F}u)(x) = f(x, u(x)) \times u_0(x)$  и  $\hat{u}(x) = \frac{u(x)}{u_0(x)}$ .

По условию теоремы  $\hat{F}$  непрерывно действует из  $E_{u_0}$  в  $L_{1,\sigma}[0; l]$ ;  $\hat{G}$  — действует и вполне непрерывен из  $L_{1,\sigma}[0; l]$  в  $E_{u_0}$ . Поэтому  $\hat{G}\hat{F}$  действует и вполне непрерывен из  $E_{u_0}$  в  $E_{u_0}$ .

Покажем, что  $\hat{G}\hat{F}$  удовлетворяет всем условиям теоремы из [6, § 45, с. 373] (при соответствующем выборе  $E$  и  $K$ ). Для удобства читателя приведем формулировку этой теоремы.

**Теорема.** Пусть  $K$  — нормальный телесный конус в банаховом пространстве  $E$ ,  $A$  — действующий в  $E$  монотонный вполне непрерывный оператор. Пусть существует  $N$  пар элементов

$$u_1 \leq v_1 \leq u_2 \leq v_2 \leq \dots \leq u_N \leq v_N \quad (9)$$

таких, что

$$u_i \ll Au_i, \quad Av_i \ll v_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (10)$$

Тогда существует  $2N-1$  неподвижных точек  $x_1, x_2, \dots, x_{2N+1}$  оператора  $A$ , удовлетворяющих неравенствам

$$u_i \leq x_{2i-1} \leq v_i, \quad u_i \leq x_{2i} \leq v_{i+1}, \quad u_{i+1} \not\leq x_{2i}, \quad x_{2i} \not\leq v_i$$

при всех  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Положим  $E = E_{u_0}$  и в качестве конуса  $K$  возьмем множество  $K_{u_0}$ . Телесность и нормальность этого конуса очевидны, причем  $u \gg 0$  эквивалентно  $u(x) > 0$  при всех  $x \in [0; l]$ . По условию теоремы



$f(x, u)$  монотонна по  $u$ . Отсюда и из неотрицательности  $\frac{G(x, s)}{u_0(x)}$  следует монотонность оператора  $\hat{G}\hat{F}$ . Компактность установлена ранее.

Введем в рассмотрение функции

$$u_i(x) \equiv \alpha_i \quad \text{и} \quad v_i(x) \equiv \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Из (3) вытекает, что функции  $u_i(x)$  и  $v_i(x)$  удовлетворяют неравенствам (9). Докажем выполнимость (10).

Интегральный оператор  $\hat{G}$  с ядром  $\hat{G}(x, s)$  обладает свойством сильной положительности: для любой неотрицательной нетривиальной функции  $f(x)$  ее образ  $(\hat{G}f)(x)$  есть функция строго положительная. По условию теоремы функция

$$w(x) = \beta_i - \int_0^l h_2(s) d\sigma(s) \cdot f(x, \beta_i u_0(x))$$

неотрицательна и отлична от тождественного нуля. Поэтому  $(\hat{G}\hat{F}w)(x) \gg 0$ , что означает

$$\beta_i \int_0^l \frac{G(x, s)}{u_0(x)} d\sigma(s) > \int_0^l h_2(s) d\sigma(s) \cdot (\hat{G}\hat{F})v_i(x). \tag{11}$$

Так как  $\frac{G(x, s)}{u_0(x)} \leq h_2(s)$  и  $\int_0^l h_2(s) d\sigma(s) > 0$ , то из (11) вытекает  $\beta_i > (\hat{G}\hat{F}v_i)(x)$  для  $x \in [0; l]$ .

Последнее и означает что  $(\hat{G}\hat{F}v_i) \ll v_i$ .

Докажем теперь неравенство  $\hat{G}\hat{F}u_k \geq u_k$ . При фиксированном  $k$  рассмотрим функцию

$$u(x) = \begin{cases} f(x, \alpha_k u_0(x)) - \frac{\alpha_k}{\int_{w_k} h_1(s) d\sigma(s)}, & x \in w_k, \\ 0, & x \notin w_k. \end{cases}$$

По условию  $u(x) \geq 0$  и положительна на множестве положительной меры. Сильно положительным оператором  $\hat{G}\hat{F}$  эта функция переводится в строго положительную функцию  $(\hat{G}\hat{F}u) > 0$  на  $[0; l]$ , т.е.  $\hat{G}\hat{F}u \gg 0$ . Так как  $G(x, s) \geq u_0(x)h_1(s)$ , то

$$\int_{w_k} \frac{G(x, s)}{u_0(x)} f(s, \alpha_k u_0(s)) d\sigma(s) \geq \frac{\alpha_k \int_{w_k} \frac{G(x, s)}{u_0(x)} d\sigma(s)}{\int_{w_k} h_1(s) d\sigma(s)} \geq \alpha_k = u_k(x). \tag{12}$$

С другой стороны, из (2) и монотонности по  $u$  функции  $f(x, u)$  вытекает неотрицательность функции  $f(x; \alpha)$  при любом  $\alpha \geq 0$ . Поэтому

$$(\hat{G}\hat{F}u_k)(x) \geq \int_{w_k} \frac{G(x, s)}{u_0(x)} f(s, \alpha_k u_0(s)) d\sigma(s).$$

Отсюда и из (12) следует  $\hat{G}\hat{F}u_k \gg u_k$ .

Итак, для оператора  $\hat{G}\hat{F}$  выполнены все условия теоремы 45.3 из [6]. Теорема доказана.  $\square$

**Библиографический список**

1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Боровских А. В., Пульсных задач // Успехи математических наук. 2008. Т. 63, вып. 1 (379). С. 98–141  
 Прядиев В. Л., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М., 2004. 272 с.  
 2. Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А. Осцилляционная теория Штурма – Лиувилля для им-  
 3. Pokornyi Yu. V., Shabrov S. A. Toward a Sturm – Liouville theory for an equation with generalized coefficients // J. of Math. Sciences. 2004. Vol. 119, № 6. P. 769–787.  
 4. Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б.,

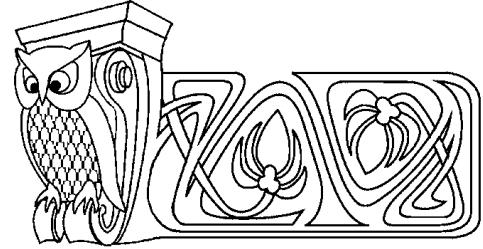


Шабров С. А. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. М., 2009. 192 с.  
 5. Мышкис А. Д. О решениях линейного однородного двучленного дифференциального неравенства второго

порядка с обобщенным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 5. С. 615–619.  
 6. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975. 512 с.

УДК 539.3

## РАЗРЕШИМОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБОБЩЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТРАНСМИССИИ ДЛЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК



В. Ф. Кириченко

Саратовский государственный технический университет,  
 кафедра математики и моделирования  
 E-mail: saratuni@list.ru

С помощью метода компактности и нового способа получения априорных оценок доказана разрешимость обобщенной задачи трансмиссии в неклассической теории пологих оболочек.

**Ключевые слова:** задачи трансмиссии, нелинейные системы уравнений с частными производными, обобщенные решения краевых задач, неклассическая теория оболочек.

### Solvability of Evolutionary Equations in Generalized Transmission Problems for Shallow Shells

V. F. Kirichenko

Saratov State Technical University,  
 Chair of Mathematics and Modelling  
 E-mail: saratuni@list.ru

We prove the solvability of the generalized transmission problem in the non-classical theory of shallow shells using the method of compactness and a new way of obtaining a priori estimates.

**Key words:** transmission problems, nonlinear systems of partial differential equations, generalized solutions of boundary value problems, non-classical theory of shells.

В настоящей работе исследуется новый класс обобщенных задач трансмиссии для нелинейной системы уравнений с частными производными, характеризуемой структурной неоднородностью входящих в нее дифференциальных уравнений различного типа. Доказательство корректности такой системы имеет в своей основе метод компактности [1, 2] и новый «трехмерный» способ получения априорных оценок. Заметим, что классические задачи трансмиссии (или дифракции) исследуются, например, в работах [3–5].

Объектом исследования является пологая однородная и изотропная оболочка, занимающая в начальный момент времени наблюдения  $t_0$  трехмерную область  $D = D_1 \cup D_2$  из пространства  $R^3$ , при этом:

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset, \quad D_i = \Omega_i \times \left(-\frac{h_i}{2}; \frac{h_i}{2}\right) \quad (i = 1, 2),$$

$$\bar{\Omega}_i = \Omega_i \cup \partial\Omega_i \cup \gamma, \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \bar{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega, \quad \partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2.$$

Здесь  $\Omega$  — план оболочки;  $\partial\Omega$  — граничный контур плана;  $\gamma$  — достаточно гладкая кривая, разбивающая область  $\Omega$  на две измеримые подобласти  $\Omega_i$ ;  $h_i$  — постоянная толщина части оболочки, занимающей измеримую подобласть  $D_i$ ;  $h_1 \geq h_2 > 0$ . Как обычно, отождествляем элементы  $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$  с координатами точек в геометрическом пространстве, параметризованном декартовой системой координат таким образом, что уравнение  $x_3 = 0$  является определяющим для срединной поверхности рассматриваемой оболочки, а ось  $Ox_3$  направлена к центру кривизны оболочки.

Полагаем, что в области  $D_1$  эволюция оболочки описывается на базе обобщенных гипотез Тимошенко, а в области  $D_2$  — гипотез Кирхгофа – Лява. Математическая модель такой оболочки определяется следующим вариационным уравнением Гамильтона – Остроградского:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \left( -\rho\mu_i h_i \frac{\partial u_{30}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta u_{30}) - \rho\mu_i \frac{h_i^3}{12} \cdot \text{grad} \frac{\partial u_{30}}{\partial t} \cdot \text{grad} \frac{\partial}{\partial t} (\delta u_{30}) + h_i \mu_i \tilde{\varepsilon}_i \frac{\partial u_{30}}{\partial t} \delta u_{30} + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu_i \tilde{\varepsilon}_i \frac{h_i^3}{12} \cdot \text{grad} \frac{\partial u_{30}}{\partial t} \cdot \text{grad} \delta u_{30} + \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (\sigma_{ii} \delta \varepsilon_{ii} + \sigma_{i3-i} \delta \varepsilon_{i3-i} + 2\sigma_{i3} \delta \varepsilon_{i3}) dx_3 + \right. \right.$$