



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Елизаров, О смешанных обратных краевых задачах в двусвязных областях, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1982, выпуск 18, 53–61

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

13 января 2025 г., 06:12:31



Замечание. При доказательстве необходимости можно вместо условия $h(0) > 0$ считать, что

$$h(0) \neq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |g(t)|}{S(t)^e}.$$

Автор благодарен проф. Л. И. Чибриковой за ценные советы и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарифьянов Ф. Н. К решению однородной задачи Римана для неограниченного контура.—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980, с. 27—34.
2. Гришин А. Ф. О функциях голоморфных внутри угла и имеющих там нулевой порядок.—В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 1. Харьков, 1965, с. 41—66.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956.
4. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом степенного порядка меньше $1/2$.—В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 6. Харьков, 1968, с. 151—168.

Доложено на семинаре 4 февраля 1980 г.

УДК 517.544

А. М. Елизаров

О СМЕШАННЫХ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Рассматриваются внутренние и внешние смешанные обратные краевые задачи в двусвязной области с граничными условиями типа [1].

§ 1. Внутренняя задача для регулярной функции и функции с полюсом

1°. Постановка задачи

Пусть в плоскости z задана простая гладкая кривая Γ_0 с началом в точке z_0 , уходящая в бесконечность, и $\Psi(s)$, $0 \leq s < \infty$, — угол наклона к вещественной оси касательной к Γ_0 , причем

$$\Psi \in C_\lambda, \quad 0 < \lambda \leq 1; \quad K = \sup_{0 \leq s < \infty} \Psi(s) - \inf_{0 \leq s < \infty} \Psi(s) < \pi \quad (1)$$

(C_λ — пространство гельдеровых функций, λ — показатель Гельдера).

Пусть известный участок Γ_z^1 внешней границы Γ_z искомой конечной области D_z с замкнутой границей лежит на Γ_0 , имеет с ней общее начало, а конец Γ_z^1 не фиксирован. Оставшийся участок $\Gamma_z^2 = \Gamma_z - \Gamma_z^1$ внешней границы и вся внутренняя граница Γ_z^* неизвестны.

В плоскости w задана двусвязная область D_w с ляпуновской границей $\Gamma_w + \Gamma_w^*$ (Γ_w — внешняя граница, соответствующая Γ_z), являющаяся образом D_z при конформном отображении, осуществляемом искомой регулярной функцией $w(z)$. На Γ_w отмечено положение образов концов Γ_z^1 .

Требуется найти область D_z и функцию $w(z)$ (непрерывную вплоть до границы) по краевым условиям

$$|dw/dz|_{\Gamma_z^*} = f_*(s), \quad 0 \leq s \leq l_*; \quad |dw/dz|_{\Gamma_z^2} = \rho f(s), \quad (2)$$

где l_* — заданная длина Γ_z^* , f, f_* — однозначные положительные непрерывные ограниченные функции, f задана на интервале $[-\infty, 0]$, $\rho > 0$ — вещественная постоянная, определяемая в ходе решения задачи, а длина l дуги Γ_z^2 неизвестна и определяется впоследствии.

Пусть

$$F(s) = \int_s^0 f(u) du, \quad F_*(s) = \int_0^s f_*(u) du.$$

Будем предполагать, что длина контура Γ_w^* равна $F_*(l_*)$.

Отобразим конформно кольцо $E_q = \{\zeta : q < |\zeta| < 1\}$ на D_w функцией $w = w(\zeta)$ с нормировкой $w(1) = w_0$, где w_0 — начало дуги Γ_w^1 . Через $e^{i\theta_1}$, $0 < \theta_1 < 2\pi$ обозначим точку на $\mathcal{L}_0 = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$, соответствующую концу w_1 дуги Γ_w^1 . Тогда дуге Γ_w^2 будет соответствовать интервал $[\theta_1 - 2\pi, 0]$ изменения полярного угла. Возьмем для удобства дальнейших выкладок за начало отсчета дуговой абсциссы σ_* контура Γ_w^* точку, соответствующую $\zeta = q$.

Так как функция $w(\zeta)$ известна, то можно определить функции $\sigma_* = \sigma_*(\theta)$, $-2\pi \leq \theta \leq 0$, и $\sigma = \sigma(\theta)$, $\theta_1 - 2\pi \leq \theta \leq 0$ (σ — дуговая абсцисса контура Γ_w). Из тождества

$$dz/d\zeta = (dw/d\zeta)/(dw/dz), \quad (3)$$

выводим, что

$$F_*[s(\theta)] = \sigma_*(\theta), \quad -2\pi \leq \theta \leq 0, \quad \sigma_*(-2\pi) = s(-2\pi) = 0, \\ \rho F[s(\theta)] = \sigma(\theta), \quad \theta_1 - 2\pi \leq \theta \leq 0, \quad \sigma(0) = s(0) = 0. \quad (4)$$

Из (4), используя обратные функции F_*^{-1}, F^{-1} , определяем значения дуговой абсциссы s на Γ_z^* и Γ_z^2 в виде

$$s(\theta) = F_*^{-1}[\sigma_*(\theta)] = g_*(\theta), \quad -2\pi \leq \theta \leq 0;$$

$$s(\theta) = F^{-1}[\sigma(\theta)/\rho] = g(\theta, \rho), \theta_1 - 2\pi \leq \theta \leq 0.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} f_*[g_*(\theta)] &= g_1^*(\theta), \quad -2\pi \leq \theta \leq 0, \\ f[g(\theta, \rho)] &= g_1(\theta, \rho), \quad \theta_1 - 2\pi \leq \theta \leq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что из свойств функции f следует, что $g_1(\theta, \rho)$ — ограниченная положительная функция (независимо от ρ).

2°. Вывод системы уравнений

Рассмотрим функцию $F(\zeta) = \ln(dw/dz)(\zeta)$, $\zeta \in E_q$. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} F(e^{i\theta}) &= \Phi(\theta) - \Psi[s(\theta)], \quad \theta \in [0, \theta_1], \\ \operatorname{Re} F(e^{i\theta}) &= \ln \rho + \ln g_1(\theta, \rho), \quad \theta \in [\theta_1, 2\pi], \\ \operatorname{Re} F(qe^{i\theta}) &= \ln g_1^*(\theta), \quad \theta \in [-2\pi, 0], \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Phi(\theta)$ — угол наклона к вещественной оси касательной к дуге Γ_w^1 , определяемый по значениям $w(e^{i\theta})$. Функция $\Phi(\theta)$ по условию гельдера.

Перепишем (6) в виде одного условия:

$$a(t)u(t) - b(t)v(t) = c(t), \quad t \in \mathcal{L} = \partial E_q, \quad (7)$$

где $F(t) = u(t) + iv(t)$,

$$\begin{aligned} a &= 0, \quad b = 1, \quad c(t) = \Phi(\theta) - \Psi[s(\theta)], \quad t = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, \theta_1], \\ a &= 1, \quad b = 0, \quad c(t) = \begin{cases} \ln g_1^*(\theta), & t = qe^{i\theta}, \quad \theta \in [-2\pi, 0], \\ \ln \rho + \ln g_1(\theta, \rho), & t = e^{i\theta}, \quad \theta \in [\theta_1, 2\pi]. \end{cases} \end{aligned}$$

Получили краевую задачу Гильберта для кольца (с разрывными коэффициентами). Решение задачи (7) может быть найдено методом работы [2] и построено В. В. Селезневым:

$$F(\zeta) = \frac{\exp X(\zeta)}{\zeta - e^{i\theta_1/2}} \left\{ \mathcal{S}(c_1; \zeta) - \frac{2}{\pi} \int_{\mathcal{L}} c_1(t) \left[\zeta \left(-\frac{2}{i} \ln t \right) + \beta_1(t) \gamma_1 \right] \frac{dt}{t} \right\}, \quad (8)$$

где

$$c_1(t) = c(t) |t - t_*| e^{-X_0(t)} \sec[\pi\beta(t)], \quad t_* = e^{i\theta_1/2},$$

$\beta(t)$ зависит от выбора класса решений (в данном случае — ограниченных в точках разрыва) и имеет в рассматриваемой задаче вид:

$$\beta(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathcal{L}_1 = \{t: |t| = q\}, \text{ и } t = e^{i\theta}, \theta \in [\theta_1/2, 2\pi], \\ 1, & t = e^{i\theta}, \theta \in [0, \theta_1/2], \end{cases}$$

$\beta_1(t) = 0$ на $\mathcal{L}_0 = \{t: |t| = 1\}$, $\beta_1(t) = 1$ на \mathcal{L}_1 , а $X(\zeta)$ — однозначная и аналитическая в кольце E_q функция, причем $X_0(t) =$

граничное значение $\operatorname{Re} X(\zeta)$. В силу [2], функция $X(\zeta)$ определяется формулой

$$X(\zeta) = iS(\psi; \zeta), \quad (9)$$

где $\psi(t) = \arg[a(t) - ib(t)] - \pi\beta(t) + \arg(t - e^{i\theta/2}) = \operatorname{Im} X(t)$, $t \in \mathcal{L}$, а ветвь $\arg[a(t) - ib(t)]$ выбрана так, что $-\pi \leq \arg[a(t) - ib(t)] \leq \pi$.

Отметим, что в формулах (8), (9) через S обозначен оператор Шварца для кольца (см., например, [3], с. 238):

$$S(c; \zeta) = \frac{2}{\pi} \int_{\mathcal{L}} c(t) \left\{ \zeta \left[\frac{2}{i} \ln(\zeta/t) \right] + \beta_1(t) \gamma_1 \right\} \frac{dt}{t},$$

где ζ — дзета-функция Вейерштрасса с периодами $\omega_1 = 2\pi$,

$$i\omega_2/2 = -i \ln q, \quad \gamma_1 = \zeta(\pi).$$

Пусть $X_1(\zeta) = |\zeta - e^{i\theta/2}| \exp[-X_0(\zeta)]$, $\zeta \in E_q$. Так как индекс задачи (7) в классе ограниченных функций равен -1 (см. [2]), то должно выполняться одно условие разрешимости

$$0 = \int_{\mathcal{L}} c_1(t) \frac{dt}{t} \equiv T_1(s) + T_2(\rho) + N \ln \rho, \quad (10)$$

где

$$N = \int_{\theta_1}^{2\pi} X_1(e^{i\theta}) d\theta \neq 0,$$

$$T_1(s) = \int_0^{\theta_1/2} \{\Phi(\theta) - \Psi[s(\theta)]\} X_1(e^{i\theta}) d\theta - \\ - \int_{\theta_1/2}^{\theta_1} \{\Phi(\theta) - \Psi[s(\theta)]\} X_1(e^{i\theta}) d\theta - \int_0^{2\pi} \ln g_1^*(\theta) X_1(qe^{i\theta}) d\theta;$$

$$T_2(\rho) = \int_{\theta_1}^{2\pi} \ln g_1(\theta, \rho) \cdot X_1(e^{i\theta}) d\theta.$$

Соотношение (10) служит для определения ρ . Перепишем его в виде

$$\rho = \mathfrak{A}_1(s, \rho) \equiv \exp\{-N^{-1}(T_1(s) + T_2(\rho))\}. \quad (10')$$

Продолжим функцию Ψ на всю ось $-\infty \leq s \leq \infty$ с сохранением ограничения (1). Очевидно, что оператор \mathfrak{A}_1 непрерывен по совокупности переменных. Кроме того, в силу ограниченности функций $\Psi(s)$ и $g_1(\theta, \rho)$ независимо от s и ρ , справедлива оценка

$$0 < M_1 \leq \mathfrak{A}_1(s, \rho) \leq M_2 < \infty$$

с постоянными M_i , $i = 1, 2$, не зависящими от s и ρ .

Таким образом, оператор $\mathfrak{A}_1(s, \rho)$ при любом s переводит топологическое произведение $C_v \times [M_1, M_2]$ в интервал $M_1 \leq \rho \leq M_2$.

Из (3) и (8) выводим уравнение для определения $s(\varphi)$:

$$s(\varphi) = \int_0^{\varphi} \exp \{-\operatorname{Re} F(e^{i\varphi})\} G(\varphi) d\varphi, \quad \varphi \in [0, \theta_1], \quad (11)$$

где $G(\varphi)$ — граничное значение функции $|d\omega/d\zeta|$, $\zeta = e^{i\varphi}$. Разрешимость задачи эквивалентна разрешимости системы уравнений (10'), (11).

3°. Доказательство разрешимости системы

Определенный формулой (11) непрерывный по совокупности переменных оператор $\mathfrak{A}_2(s, \rho)$ действует из пространства $C_v \times [M_1, M_2]$ в C_v . Как и в [4], для доказательства его компактности необходимо показать, что \mathfrak{A}_2 переводит любое ограниченное множество из $C_v \times [M_1, M_2]$ в ограниченное множество из $C_{v+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Для этого понадобится полученное нами обобщение результата Зигмунда ([5], с. 405).

Лемма. Пусть регулярная в E_q функция $F_0(\zeta)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\operatorname{Re} F_0(e^{i\theta}) = h(\theta), \quad \theta \in [0, \theta_1]; \quad \operatorname{Im} F_0(e^{i\theta}) = 0, \quad \theta \in [\theta_1, 2\pi],$$

$$\operatorname{Im} F_0(qe^{i\theta}) = h_1(\theta), \quad \theta \in [-2\pi, 0]; \quad h, h_1 \in C_\lambda,$$

причем колебание K_h функции $h(\theta)$ на $[0, \theta_1]$ меньше $p\pi$, $0 < p \leq 1$. Тогда справедлива оценка

$$\int_0^{\theta_1} \exp \{\pm p^{-1} \operatorname{Im} F_0(e^{i\theta})\} d\theta \leq R_0, \quad (12)$$

где

$$R_0 = 4\pi [1 + R'/r] \sec [K_h/(2p)],$$

$$r = [c_0^2(1+q)^2/(1-q)^2 + 1]^{1/2} - c_0(1+q)/(1-q), \quad c_0 = \operatorname{tg}(\theta_1/4),$$

$$R' = 4c_0q(1-q)^{-2} \sec(\theta_1/4) [1 + c_0(1+q)r_1^{-1/4}] \max_{[-2\pi, 0]} \exp[-h_1(\theta)],$$

$$r_1 = (1+q^2)^2 - 4q(1+q^2) |\cos(\theta_1/2)| - 4q^2 \sin^2(\theta_1/2).$$

Доказательство леммы из-за громоздкости выкладок опускается. Оно может быть получено аналогично доказательству леммы 1 из [6], с. 200. Переходим к обоснованию основного результата.

Теорема. При выполнении (1) система уравнений (10'), (11) разрешима.

Доказательство. Пусть регулярная в кольце E_q функция $\tilde{F}(\zeta)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tilde{F}(e^{i\theta}) &= \Phi(\theta), \quad \theta \in [0, \theta_1]; \\ \operatorname{Re} \tilde{F}(qe^{i\theta}) &= \rho_0 = \text{const}, \quad \theta \in [-2\pi, 0], \\ \operatorname{Re} \tilde{F}(e^{i\theta}) &= \ln \rho + \ln g_1(\theta, \rho), \quad \theta \in [\theta_1, 2\pi], \end{aligned} \quad (13)$$

где ρ_0 — неизвестная постоянная. Из результатов п. 2° следует, что такая функция существует при выполнении условия (10), принимающего в данном случае вид

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta_1/2} \Phi(\theta) X_1(e^{i\theta}) d\theta - \int_{\theta_1/2}^{\theta_1} \Phi(\theta) X_1(e^{i\theta}) d\theta + \int_{\theta_1}^{2\pi} \ln[\rho g_1(\theta, \rho)] \times \\ \times X_1(e^{i\theta}) d\theta - \rho_0 \int_0^{2\pi} X_1(qe^{i\theta}) d\theta = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как интеграл при ρ_0 в (14) отличен от нуля, то (14) всегда можно удовлетворить подбором ρ_0 , которое будет ограничено при любом $\rho \in [M_1, M_2]$, независимо от искомой функции $s(\theta)$.

Пусть $F_0(\zeta) = -i[F(\zeta) - \tilde{F}(\zeta)]$. Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F_0(e^{i\theta}) &= \Psi[s(\theta)], \quad \theta \in [0, \theta_1]; \quad \operatorname{Im} F_0(e^{i\theta}) = 0, \quad \theta \in [\theta_1, 2\pi], \\ \operatorname{Im} F_0(qe^{i\theta}) &= \rho_0 - \ln g_1^*(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

В силу (12); справедлива оценка

$$\int_0^{\theta_1} \exp\{-p^{-1} \operatorname{Im} F_0(e^{i\theta})\} d\theta \leq R_0,$$

если $K < p\pi$, $0 < p \leq 1$. В силу (1), такое p существует. Положим $0 < \nu < 1 - p$. Тогда для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, \theta_1]$ с учетом (12) будем иметь:

$$\begin{aligned} & |[\mathfrak{A}_2(s, \rho)](\varphi_2) - [\mathfrak{A}_2(s, \rho)](\varphi_1)| \leq \\ & \leq \left| \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \exp\{-\operatorname{Im} F_0(e^{i\varphi}) / (1 - \nu - \varepsilon)\} d\varphi \right|^{1-\nu-\varepsilon} \times \\ & \times \exp\left\{ \max_{[0, \theta_1]} [-\operatorname{Re} \tilde{F}(e^{i\varphi})] \right\} \max_{[0, \theta_1]} G(\varphi) |\varphi_1 - \varphi_2|^{\nu+\varepsilon} \leq \\ & \leq R_0^{1-\nu-\varepsilon} |\varphi_1 - \varphi_2|^{\nu+\varepsilon} \exp\left\{ \max_{[0, \theta_1]} [-\operatorname{Re} \tilde{F}(e^{i\varphi})] \right\} \max_{[0, \theta_1]} G(\varphi) = \\ & = R_1 |\varphi_1 - \varphi_2|^{\nu+\varepsilon}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ таково, что $0 < \nu < 1 - p - \varepsilon$. Итак, оператор $\mathfrak{A}_2(s, \rho)$ вполне непрерывен и переводит множество $\Omega \times [M_1, M_2]$ в себя, где $\Omega = \{s \in C, \|s\| \leq R_1(1 + \theta_1^\nu)\}$.

Запишем систему (10'), (11) в виде одного уравнения:

$$\hat{s} = \mathfrak{A} \hat{s} \equiv \{\mathfrak{A}_1(s, \rho), \mathfrak{A}_2(s, \rho)\},$$

где $\hat{s} = \{s, \rho\}$. Оператор \mathfrak{A} на выпуклом замкнутом множестве $\mathfrak{Q} \times [M_1, M_2]$ вполне непрерывен и переводит его в свою часть. По принципу неподвижной точки Шаудера (см., например, [7], с. 616), система разрешима. Теорема доказана.

Замечание 1. В силу замкнутости границы D_z , исходная задача будет разрешима при выполнении условия (ср. с [8], с. 79)

$$\int_0^{2\pi} \exp\{-F(qe^{i\varphi})\} \frac{dw}{d\zeta}(qe^{i\varphi}) d\varphi = 0, \quad (15)$$

которое проверяется после решения системы (10'), (11). После определения значения ρ длина l дуги Γ_z^2 определяется из равенства

$$l = \int_{\theta_1 - 2\pi}^0 g(\theta, \rho) d\theta.$$

§ 2. Внешние задачи

Рассмотрим внешнюю смешанную обратную краевую задачу для регулярной функции. В этом случае ни один из контуров Γ_z , Γ_z^* не является ни внутренним, ни внешним. Дуга Γ_z^1 задается как в § 1.

Пусть, для определенности, внешняя граница заданной двусвязной области D_w соответствует Γ_z и на ней отмечена дуга Γ_w^1 . Требуется найти область D_z и функцию $w(z)$ по крайевым условиям (2), если дополнительно задано значение $w_0 = w(\infty)$.

По заданной величине w_0 и функции $w(\zeta)$ определим значение ζ_0 , $w(\zeta_0) = w_0$. Так как $dz/d\zeta$ имеет в этой точке полюс 2-го порядка, то аналитической будет функция $dz_1/d\zeta = (dz/d\zeta) \times (\zeta - \zeta_0)^2$. Пусть $G_1(\zeta) = \ln(dz_1/d\zeta)$, $G(\zeta) = \ln(dz/d\zeta)$. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} G_1(re^{i\theta}) &= \operatorname{Re} G(re^{i\theta}) + \ln[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \gamma_0)], \\ &\theta \in [0, 2\pi], \zeta_0 = r_0 e^{i\gamma_0}, r = 1, q, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} G_1(e^{i\theta}) &= \Psi[s(\theta)] - \theta - \pi/2 + 2H(\theta), \theta \in [0, \theta_1], \\ H(\theta) &= \arg(e^{i\theta} - \zeta_0). \end{aligned}$$

Рассуждая как в § 12 из [8], можно показать, что G_1 однозначна. Далее, по крайевым условиям задачи определим функции $g_s(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$; $g(\theta, \rho)$, $\theta \in [\theta_1, 2\pi]$ (ср. с § 1). Тогда, подставляя полученные выражения в (16), приходим к краевой задаче (7), где

$$c(t) = \begin{cases} \Psi [s(\theta)] + 2H(\theta) - \theta - \pi/2, & \theta \in [0, \theta_1], \\ \ln \{g'_*(\theta) [q^2 + r_0^2 - 2qr_0 \cos(\theta - \gamma_0)]\}, & \theta \in [0, 2\pi], \\ \ln \{\tilde{g}_1(\theta, \rho) [1 + r_0^2 - 2r_0 \cos(\theta - \gamma_0)]\} - \ln \rho, & \theta \in [\theta_1, 2\pi], \end{cases}$$

и $\tilde{g}_1(\theta, \rho) = \sigma'(\theta)/g_1(\theta, \rho)$ обладает теми же свойствами, что и функция $g_1(\theta, \rho)$.

Решение этой задачи получено в § 1, величина ρ находится из условия однозначности (10). Уравнение задачи выводится из равенства

$$\ln \frac{ds}{d\theta} = \operatorname{Re} G_1(e^{i\theta}) - \ln [1 + r_0^2 - 2r_0 \cos(\theta - \gamma_0)]$$

и имеет вид (ср. с (11))

$$s(\varphi) = \int_0^\varphi \exp \{ \operatorname{Re} G_1(e^{i\varphi}) \} [1 + r_0^2 - 2r_0 \cos(\varphi - \gamma_0)]^{-1} d\varphi, \quad \varphi \in [0, \theta_1]. \quad (11')$$

Разрешимость системы уравнений (10'), (11') при условии (1) доказывается по схеме § 1.

После решения уравнений определится функция $dz/d\zeta$. Теперь необходимо выполнить требования, обеспечивающие замкнутость контуров Γ_z и Γ_z^* . Как и в [8], (с. 86), получаем:

$$\int_{|\zeta|=q} \exp \{ G(\zeta) \} d\zeta = 0 \quad (17)$$

(равенство нулю коэффициента при ζ^{-1} в разложении Лорана функции $dz/d\zeta$ в кольце $q < |\zeta| < |\zeta_0|$);

$$G_1(\zeta_0) = 0 \quad (18)$$

(равенство нулю коэффициента при $\zeta - \zeta_0$ в разложении Тейлора функции $G_1(\zeta)$ в окрестности ζ_0).

Соотношения (17), (18) являются условиями разрешимости и проверяются после решения уравнений задачи.

Во внешней задаче для функции с простым полюсом и заданной величиной $w(\infty) = w_0$ (в случае полюса в ∞ $w_0 = \infty$) область D_w содержит ∞ . Отображая ее на E_q и определяя значение ζ_0 , снова приходим к уравнению (11').

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайкин М. И. Теоремы существования для одного класса обратных смешанных краевых задач теории аналитических функций.—Тр. Казанск. авиац. ин-та, вып. 64, 1961, с. 3—24.

2. Салимов Р. Б., Селезнев В. В. Решение краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для кольца.—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1980, с. 141—154.

3. Ахнезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., „Наука“, 1970.

4. Елизаров А. М. Доказательство теорем существования и единственности для решений смешанных обратных краевых задач методом интегральных уравнений. ДЕП № 2432 — 79.

5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М., „Мир“, 1965.

6. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., „Мир“, 1964.

7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., „Наука“, 1977.

8. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1965.

Доложено на семинаре 5 декабря 1980.

УДК 517.956.6

В. И. Жегалов

К ЗАДАЧЕ ТРИКОМИ С УСЛОВИЯМИ СМЕЩЕНИЯ И ОБОБЩЕННОГО СКЛЕИВАНИЯ

Пусть D_- — внутренность треугольника $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, а D_+ — односвязная область при $y \geq 0$, ограниченная отрезком AB и простой дугой σ .

Задача. В области $D = D_+ \cup D_-$ найти решение $u(x, y)$ уравнения

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0 \quad (1)$$

непрерывное в \bar{D}_+ , а также в замкнутых областях, получаемых из D_- удалением характеристик уравнения (1), проходящих через точку $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Производная $u_y(x, y)$ непрерывно продолжается из D_+ и D_- на ось x , кроме, может быть, точки P , причем

$$\begin{aligned} u(x, -0) &= \alpha_0(x) u(x, +0) + \beta_0(x) u(1-x, +0) + \gamma_0(x), \\ u_y(x, -0) &= \alpha_1 u_y(x, +0) + \beta_1 u_y(1-x, +0) + \gamma_1(x). \end{aligned} \quad (2)$$

На линии σ и границе области D_- должны выполняться условия

$$u = \varphi(t), \quad t \in \sigma, \quad (3)$$