1996. Т. 32, № 1. С. 133 — 134

УДК 517.956.227

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С КОМПЛЕКСНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

А. С. Макин

Рассмотрим следующую несамосопряженную краевую задачу:

$$\Delta u - qe^{-i(m,x)}u + \lambda u = 0,\ x \in G = (0,2\pi)^N \quad u|_{x_j=0} = u|_{x_j=2\pi},\ \partial u/\partial x_j|_{x_j=0} = \partial u/\partial x_j|_{x_j=2\pi},\ j = 1,\ldots,N. \quad (1)$$

Здесь q — произвольное комплексное число, $m = (m_1,\ldots,m_N)$ — целочисленный вектор такой, что $m_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,N$, и $|m| = (\sum\limits_{j=1}^{N} m_j^2)^{1/2} > 0$, $(m,x) = \sum\limits_{j=1}^{N} m_j x_j$.

Теорема 1. *Резольвента $R_\lambda f$ оператора (1) имеет полюсы не выше второго порядка.*

Доказательство. Из работы [1] следует, что спектр задачи (1) такой же, как и при $q = 0$, т.е. он состоит из целых чисел, представимых в виде суммы N квадратов целых чисел. В [2] показано, что резольвента $R_\lambda f$ имеет вид

$$R_\lambda f(x) = \sum_{p=0}^{\infty}(-q)^p \sum_{n\in Z} \frac{f_{n+pm}\exp(i(n,x))}{F_p(\lambda)}, \quad (2)$$

где $f_k = (2\pi)^{-N} \int\limits_G \exp(-i(k,y))f(y)dy$, $F_p(\lambda) = \prod\limits_{l=0}^{p}(|n+lm|^2 - \lambda)$, а ряд в правой части (2) сходится в норме $L_2(G)$ при любом λ, лежащем вне спектра оператора (1).

Так как $|n+lm|^2 = \sum\limits_{j=1}^{N} n_j^2 + 2l\sum\limits_{j=1}^{N}(n_j,m_j) + l^2\sum\limits_{j=1}^{N} m_j^2$, то уравнение $|n+lm|^2 = \lambda$ при любых n, m, λ имеет не более двух решений. Данное утверждение будем называть утверждением 1.

Обозначим через λ_k $(k = 1,2,\ldots)$ собственные значения задачи (1), взятые в порядке возрастания и занумерованные без учета кратности. В силу утверждения 1 в произведении $F_p(\lambda_k)$ обращается в нуль не более двух сомножителей. Тогда из сходимости ряда (2) вытекает справедливость теоремы 1.

Замечание. Из теоремы 1 следует, что задача (1) не может иметь присоединенных функций выше первого порядка.

В каждом из корневых подпространств S_k, отвечающих собственным значениям λ_k, произвольным образом выберем ортонормированный базис u_j^k $(j = 1,\ldots,\dim S_k)$. Имеет место

Теорема 2. *Система функций $\{u_j^k\}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(G)$.*

Доказательство. Пусть $k \in \Omega$, где Ω — произвольное конечное множество натуральных чисел, Γ_k — окружность радиуса $1/2$ с центром в точке $\lambda_k, \Gamma = \bigcup\limits_{k\in\Omega} \Gamma_k$. Оценим норму проектора

$$P_S f(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R_\lambda f(x)d\lambda$$

на объединение корневых подпространств $S = \bigcup\limits_{k\in\Omega} S_k$. Из (2) и равенства Парсеваля следует неравенство

$$\|P_S f(x)\|_{L_2(G)} \leq \frac{1}{2\pi}\|f(x)\|_{L_2(G)} \sum_{p=0}^{\infty}|q|^p \sup_{n\in Z}\left|\int\limits_\Gamma \frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}\right|, \quad (3)$$

в правой части которого оценим интеграл. Легко видеть, что

$$\int\limits_\Gamma \frac{d\lambda}{F_p(\lambda)} = \int\limits_{\Gamma'} \frac{d\lambda}{F_p(\lambda)},$$

где $\Gamma' = \bigcup\limits_{k\in\Omega'} \Gamma_k$,а Ω' есть подмножество Ω, состоящее из тех номеров k, для которых собственные значения λ_k являются корнями функции $F_p(\lambda)$. Так как $F_p(\lambda)$ имеет не более p+1 различных корней, то

$$\left|\int\limits_{\Gamma'} \frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}\right| \leq \sum_{k\in\Omega'}\left|\int\limits_{\Gamma_k} \frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}\right| \leq (p+1)\max_{k\in\Omega'}\left|\int\limits_{\Gamma_k} \frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}\right|. \quad (4)$$

Пусть максимум абсолютной величины интеграла в правой части последнего неравенства достигается при некотором $k = \tilde{k}$. Представим функцию $F_p(\lambda)$ в виде произведения $F_p(\lambda) = F_p^{(0)}(\lambda)F_p^{(1)}(\lambda)F_p^{(2)}(\lambda)$, где

$$F_p^{(0)}(\lambda) = \prod_{|n+lm|^2=\lambda_{\tilde{k}}} (|n+lm|^2-\lambda), \quad F_p^{(1)}(\lambda) = \prod_{|n+lm|^2<\lambda_{\tilde{k}}} (|n+lm|^2-\lambda), \quad F_p^{(2)}(\lambda) = \prod_{|n+lm|^2>\lambda_{\tilde{k}}} (|n+lm|^2-\lambda), \quad l = 0, 1, \ldots, p.$$

Обозначим через p_i $(i = 0, 1, 2)$ число сомножителей в произведении $F_p^{(i)}(\lambda)$. Очевидно, $1 \le p_0 \le 2$, $p_1 \ge 0$, $p_2 \ge 0$, $p_0 + p_1 + p_2 = p + 1$. (Если $p_i = 0$, то формально считаем $F_p^{(i)}(\lambda) = 1$.) Легко видеть, что для любого $\lambda \in \Gamma_{\tilde{k}}$ имеют место неравенства

$$|F_p^{(0)}(\lambda)| \ge 1/4, \tag{5}$$

$$|F_p^{(1)}(\lambda)| \ge \prod_{|n+lm|^2<\lambda_{\tilde{k}}} ||n + lm|^2 - \lambda_{\tilde{k}} + 1/2|. \tag{6}$$

Из утверждения 1 вытекает, что $\prod\limits_{|n+lm|^2<\lambda_{\tilde{k}}} ||n + lm|^2 - \lambda_{\tilde{k}} + 1/2| \ge (1/4)([(p_1 - 2)/2]!)^2$, если $p_1 \ge 2$. Очевидно, что $\prod\limits_{|n+lm|^2<\lambda_{\tilde{k}}} ||n + lm|^2 - \lambda_{\tilde{k}} + 1/2| \ge 1/4$, если $p_2 < 2$. Отсюда и из (6) следует что

$$|F_p^{(1)}(\lambda)| \ge (1/4)([|p_1 - 2|/2]!)^2. \tag{7}$$

Аналогично получим, что для любого $\lambda \in \Gamma_{\tilde{k}}$

$$|F_p^{(2)}(\lambda)| \ge (1/4)([|p_2 - 2|/2]!)^2. \tag{8}$$

Из (5), (7), (8) и известного неравенства $(\alpha + \beta)! \le 2^{\alpha+\beta}\alpha!\beta!$, справедливого для любых неотрицательных α и β, вытекает, что для любого $\lambda \in \Gamma_{\tilde{k}}$ $|F_p(\lambda)| = \prod\limits_{i=0}^{2} |F_p^{(i)}(\lambda)| \ge p!/c_1^p$, где $c_1 > 0$, тогда имеем

$$\left|\int\limits_{\Gamma_{\tilde{k}}} \frac{d\lambda}{F_p(\lambda)}\right| \le \int\limits_{\Gamma_{\tilde{k}}} \frac{d\lambda}{|F_p(\lambda)|} \le \frac{\pi c_1^p}{p!}. \tag{9}$$

Из оценок (3), (4), (9) получаем неравенство

$$\|P_S f(x)\|_{L_2(G)} \le (1/2)\|f(x)\|_{L_2(G)} \sum_{p=0}^{\infty} (p + 1)\frac{(c_1|q|)^p}{p!} \le c_2\|f(x)\|_{L_2(G)},$$

из которого следует (см.[3]), что подпространства S_k образуют в $L_2(G)$ базис, эквивалентный ортогональному. Отсюда в силу выбора функций u_j^k (см. [3]) вытекает утверждение теоремы 2.

Замечание. В работе [4] показано, что при дополнительном условии $|q| < 1/2$ корневые подпространства S_k образуют в $L_2(G)$ базис, эквивалентный ортогональному (более подробные литературные ссылки приведены в [2]).

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Ильину и Е. И. Моисееву за внимание к настоящей работе.

Литература

1. *Лидский В. Б.* //Функц. анализ и его приложения. 1976. Т. 10, № 4. С. 89 — 90.
2. *Макин А. С.* //Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 12. С. 2071 — 2081.
3. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
4. *Муртазин Х. Х.* Свойства решений и спектра сингулярного уравнения Шредингера: Дис. ... д -ра физ.-мат. наук. М., 1993.

Московская государственная академия приборостроения и информатики

Поступила в редакцию 19 сентября 1995 г.