A. Yu. Zaitsev, The rate of Gaussian strong approximation for the sums of i.i.d. multidimensional random vectors, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2009, Volume 364, 148–165

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 364, 2009 г.

А. Ю. Зайцев

ТОЧНОСТЬ СИЛЬНОЙ ГАУССОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

1. Введение

Точность сильной гауссовской аппроксимации для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов обычно оценивается в двух следующих различных, но тесно связанных ситуациях. Оценивание точности сильной аппроксимации в вероятностном принципе инвариантности может быть сведено к этим задачам.

(A) Требуется построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов $X, X_1, X_2, \dots$ (с заданным распределением) и последовательность независимых гауссовских случайных векторов $Y_1, Y_2, \dots$ таким образом, чтобы $\left\| \sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n Y_j \right\| = O(f(n))$ или $o(f(n))$ почти наверное (п.н.) для последовательности $f(n)$, стремящейся к бесконечности как можно медленнее. При этом обычно предполагается, что $\mathbf{E}\, \|X\|^2 < \infty$, $\mathbf{E}\, X = 0$.

(B) Требуется построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов $X, X_1, \dots, X_n$ (с заданным распределением) и последовательность независимых гауссовских случайных векторов $Y_1, \dots, Y_n$ таким образом, чтобы величина

$$\Delta_n(X, Y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left\| \sum_{j=1}^k X_j - \sum_{j=1}^k Y_j \right\| \tag{1.1}$$

была бы по возможности мала с достаточно большой вероятностью.

Существуют аналоги задач (A) и (B) для неодинаково распределенных случайных векторов, а также для зависимых векторов.

Работа поддержана грантом НШ 638.2008.1, Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Цель этой статьи – вывести новые оценки в задаче (A) для независимых одинаково распределенных $\mathbf{R}^d$-значных случайных векторов $X, X_1, X_2, \ldots$ с конечными моментами $\mathbf{E}\, H\,(\|X\|) < \infty$, где $H\,(x)$ – монотонная функция, растущая не медленнее чем $x^{2+\delta}$ и не быстрее чем e^{cx} (см. теорему 1 ниже). Приближающие векторы Y_j имеют при этом те же средние и ковариационные операторы как приближаемые векторы X_j. Мы обобщим некоторые результататы У. Айнмаля [14]. В работе [14] он получил многомерные результаты для случая, когда функция H растет не медленнее, чем $x^{3+\delta}$ и не быстрее, чем $e^{c\sqrt{x}}$. Заметим, что случай, когда функция H растет не медленнее, чем $x^{2+\delta}$ и не быстрее, чем x^3, был исследован ранее Бергером [3]. В настоящей статье, опираясь на результаты [39], мы получим результаты для функций H, которые могут расти быстрее, чем $e^{c\sqrt{x}}$.

Точность сильной аппроксимации в одномерном принципе инвариантности изучалась многими авторами (см., например, работы Ю. В. Прохорова [27], А. В. Скорохода [35], Ф. Штрассена [36, 37], А. А. Боровкова [4], М. Чёрге и П. Ревеса [8], Я. Комлоша, П. Майора и Г. Тушнади (KMT) [20], П. Майора [21, 22, 24], У. Айнмаля [11], У. Айнмаля и Д. Мейсона [16], А. И. Саханенко [28–30, 32] и библиографию в книге М. Чёрге и П. Ревеса [9] и в статьях Ш. Чёрге и П. Холла [10], П. Майора [23], А. А. Боровкова и А. И. Саханенко [5], Ки-ман Шао [34] и У. Айнмаля [15]).

Многомерные оценки точности сильной аппроксимации в принципе инвариантности можно найти в работах В. В. Городецкого [18], И. Беркеша и У. Филиппа [2], У. Филиппа [26], А. А. Боровкова и А. И. Саханенко [6], Э. Бергера [3], У. Айнмаля [12–15], А. И. Саханенко [31], автора [39–44], а также Ф. Гётце и автора [17].

Штрассен [36] начал изучение задачи (A) в одномерном случае. Он показал, что существует такое построение, что

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} Y_j \right\| = o(\sqrt{n\,\log\log n}) \quad \text{п.н.} \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{1.2}$$

предполагая лишь существование конечных $\mathbf{E}\, X^2$, $\mathbf{E}\, X = 0$. Многомерный вариант этого утверждения содержится в работе Филиппа [26]. Усиления и обобщения соотношения (1.2) при дополнительных предположениях о существовании моментов были получены в работах Штрассена [37], Бреймана [7], Джейна, Йогдео и Стаута [19] и Чёрге и Ревеса [8]. Штрассен [36, 37] использовал при построении вложение Скорохода (см. [35]).

Правильные по порядку одномерные результаты были получены в работах КМТ [20] и Майора [21] с помощью метода диадической аппроксимации. В частности, было показано, что если $\mathbf{E}\,X = 0$ и $\mathbf{E}\,|X|^\gamma < \infty$ для некоторого $\gamma > 2$, то существует такое построение, что

$$\Bigl\| \sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n Y_j \Bigr\| = o(n^{1/\gamma}) \quad \text{п.н.} \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1.3}$$

Соответствующее многомерное утверждение было доказано Айнмалем [14]. Случай $2 < \gamma \leqslant 3$ был исследован ранее Бергером [3], см. также работу Саханенко [31]. Известно, что результат (1.3) при больших γ невозможно получить, если использовать для построения вложение Скорохода.

Ниже нам потребуются некоторые обозначения. Распределения и ковариационные операторы случайных векторов ξ будут обозначаться $\mathcal{L}(\xi)$ и $\operatorname{cov}\xi$ соответственно. Мы будем обозначать $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{I}$ – тождественный оператор в $\mathbf{R}^d$ и $\lceil x \rceil$ – целую часть числа x. Обозначение $\mathbf{1}\{A\}$ будет использоваться для индикаторной функции события A. В дальнейшем $\log^* b = \max\{1, \log b\}$ для $b > 0$.

Для неотрицательных чисел δ и x_0, введем класс $\mathcal{H}(\delta, x_0)$ таких неотрицательных неубывающих функций $H : [0, \infty) \to \mathbf{R}^1$, что функции $H(x)/x^{2+\delta}$ и $x/\log H(x)$ не убывают при $x \geqslant x_0$.

Пусть $H \in \mathcal{H}(\delta, x_0)$ и $H^{-1}(\,\cdot\,)$ – обратная функция для функции H. Тогда функции $H^{-1}(y)/y^{1/(2+\delta)}$ и $(\log y)/H^{-1}(y)$ не возрастают при $y \geqslant H(x_0)$. Более того, если $x_0 > 0$, то

$$x^{2+\delta} H(x_0)/x_0^{2+\delta} \leqslant H(x) \leqslant \exp\left(x \, \log H(x_0)/x_0\right) \quad \text{при} \quad x \geqslant x_0 \tag{1.4}$$

и

$$\frac{x_0 \log y}{\log H(x_0)} \leqslant H^{-1}(y) \leqslant \frac{y^{1/(2+\delta)} x_0}{(H(x_0))^{1/(2+\delta)}} \quad \text{при} \quad y \geqslant H(x_0). \tag{1.5}$$

Обозначим $\mathcal{H} = \bigcup_{\delta > 0, x_0 > 0} \mathcal{H}(\delta, x_0)$.

Теорема 1. *Пусть $H \in \mathcal{H}$ и ξ – случайный вектор с $\mathbf{E}\,\xi = 0$, $\operatorname{cov}\xi = \mathbb{I}$ и $\mathbf{E}\,H(\|\xi\|) < \infty$. Тогда можно построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых случайных векторов*

$X_1, X_2, \ldots$ *и последовательность независимых гауссовских случайных векторов* $Y_1, Y_2, \ldots$ *таким образом, что*

$$\mathcal{L}(X_j) = \mathcal{L}(\xi), \quad \mathbf{E}\, Y_j = 0, \quad \operatorname{cov} Y_j = \operatorname{cov} \xi \tag{1.6}$$

при всех $j = 1, 2, \ldots$ *и*

$$\mathbf{P}\left\{ \limsup_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n Y_j \right\| \Big/ H^{-1}(n) \leqslant C \right\} = 1, \tag{1.7}$$

где $C < \infty$ *– неслучайная величина, зависящая только от* d, $\mathcal{L}(\xi)$ *и от функции* $H(\,\cdot\,)$.

Легко видеть, что из (1.7) следует, что

$$\left\| \sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n Y_j \right\| = O(H^{-1}(n)) \quad \text{п.н.} \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1.8}$$

Теорема 1 обобщает на многомерный случай результаты КМТ [20] и Майора [21]. Ясно, что утверждение теоремы 1 остается справедливым без предположения $\operatorname{cov} \xi = \mathbb{I}$.

В одномерном случае то же самое утверждение было доказано в работе КМТ [20] для функций из класса $\widetilde{\mathcal{H}}(\delta, x_0)$, $\delta > 0$, таких неотрицательных неубывающих функций $H \in \mathcal{H}(\delta, x_0)$, что функции $H(x)/x^{3+\delta}$ не убывают при $x \geqslant x_0$. Майор [21] распространил результат на такие функции H из класса $\mathcal{H}(\delta, x_0)$, $\delta > 0$, что функции $H(x)/x^3$ не возрастают. Бергер [3] обобщил результат Майора [21] на многомерный случай.

Айнмаль [14] доказал то же самое утверждение для функций H из класса $\mathcal{H}^*(\delta, x_0)$, $\delta > 0$, таких неотрицательных неубывающих функций H, что функции $H(x)/x^{3+\delta}$ и $\sqrt{x}/\log H(x)$ не убывают при $x \geqslant x_0$. Ясно, что существуют функции, которые принадлежат $\mathcal{H}(\delta, x_0)$ и не принадлежат $\mathcal{H}^*(\delta, x_0)$. В качестве примера можно привести функции $H(x) = \exp\bigl(\lambda x^\beta\bigr)$, $1/2 < \beta \leqslant 1$, $\lambda > 0$.

Утверждение теоремы 1 оптимально в следующем смысле: если

$$\mathbf{E}\, H\left(\|\xi\|\right) = \infty \tag{1.9}$$

в условиях теоремы 1, то

$$\mathbf{P}\left\{ \limsup_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n Y_j \right\| \Big/ H^{-1}(n) \geqslant 1/4 \right\} = 1 \tag{1.10}$$

для любого построения независимых одинаково распределенных случайных векторов X_j и независимых гауссовских случайных векторов Y_j с требуемыми распределениями на одном вероятностном пространстве. Действительно, условие (1.9) эквивалентно тому, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\|\xi\| > H^{-1}(j)\right\} = \infty.$$

По лемме Бореля–Кантелли, с вероятностью единица бесконечно много X_j удовлетворяют неравенству $\|X_j\| > H^{-1}(j)$. С другой стороны, в силу (1.5),

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\|Y_j\| > H^{-1}(j)/2\right\} < \infty.$$

По лемме Бореля–Кантелли, с вероятностью единица лишь конечное число Y_j удовлетворяет неравенству $\|Y_j\| > H^{-1}(j)/2$. Поэтому для бесконечного множества чисел n,

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} Y_j \Big\| \Big/ H^{-1}(n) \geqslant 1/4.$$

Отсюда вытекает (1.10). Это рассуждение принадлежит Брейману [7], см. также работу Майора [23, теорема 5.3].

Утверждение теоремы 1 может не выполняться для $H \in \mathcal{H}(0, x_0)$. Брейман [7] показал, что утверждение (1.3) вообще говоря не верно для $\gamma = 2$. Майор [22] установил, что для любой последовательности $\{a_n\}$ вещественных чисел, для которой выполняется $a_n \nearrow \infty$, существует такое одномерное распределение $\mathcal{L}(\xi)$ с $\mathbf{E}\,\xi^2 < \infty$, $\mathbf{E}\,\xi = 0$, что для любого построения, удовлетворяющего (1.6),

$$\mathbf{P}\left\{ \limsup_{n\to\infty} a_n \,(n\, \log\log n)^{-1/2} \,\Big\| \sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} Y_j \Big\| = \infty \right\} = 1.$$

Это подтверждает оптимальность результата Штрассена (1.2).

Случай, когда $H(x)/x^2 \to \infty$ и $H(x)/x^{2+\delta} \to 0$ для любого $\delta > 0$, был исследован Айнмалем [13] как в одномерном, так и в многомерном случаях. Для $H \in \mathcal{H}(0, x_0)$ точность аппроксимации может быть существенно улучшена, если мы возьмем Y_j с ковариационными операторами урезанных векторов X_j. См. работы Майора [22, 24], Айнмаля [13, 15], а также Айнмаля и Мейсона [16]. История вопроса изложена в статье Айнмаля [15], в которой также получены содержательные результаты даже для случая, когда не предполагается конечность вторых моментов у векторов X_j.

Пусть $\mathcal{A}_d(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, $d \in \mathbf{N}$, – класс d-мерных распределений, введенный в работе автора [38], см. также [39, 40, 42]. Класс $\mathcal{A}_d(\tau)$ (с фиксированным $\tau \geqslant 0$) состоит из d-мерных распределений F, для которых функция $\varphi(z) = \varphi(F,z) = \log \int_{\mathbf{R}^d} e^{\langle z,x\rangle} F\{dx\}$ ($\varphi(0)=0$) определена и аналитична при $\|z\|\,\tau < 1$, $z \in \mathbf{C}^d$, и $\left|d_u d_v^2\,\varphi(z)\right| \leqslant \|u\|\tau \left\langle \mathbb{D}\,v, v\right\rangle$ для всех $u,v \in \mathbf{R}^d$ и $\|z\|\,\tau < 1$, где $\mathbb{D}$ – ковариационный оператор, соответствующий F, а $d_u\varphi$ – производная функции φ в направлении u. Простейшие свойства классов $\mathcal{A}_d(\tau)$ перечислены в работе [42].

Доказательство теоремы 1 основано на следующей теореме 2, доказанной автором в [39].

Теорема 2. *Пусть $\tau \geqslant 1$ и $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые случайные векторы с $\mathcal{L}(\xi_j) \in \mathcal{A}_d(\tau)$, $\mathbf{E}\,\xi_j = 0$, $\operatorname{cov}\xi_j = \mathbb{I}$, $j = 1,2,\ldots$. Тогда можно построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых случайных векторов $X_1, X_2 \ldots$ и последовательность независимых гауссовских случайных векторов $Y_1, Y_2, \ldots$ таким образом, что $\mathcal{L}(X_j) = \mathcal{L}(\xi_j)$, $\mathbf{E}\,Y_j = 0$, $\operatorname{cov}Y_j = \mathbb{I}$, $j = 1,2,\ldots$, и для всех $n = 1,2,\ldots$*

$$\mathbf{E}\,\exp\left(\frac{a_1\,\Delta_n(X,Y)}{\tau}\right) \leqslant \exp\left(a_2\,\log^*\left(n/\tau^2\right)\right), \tag{1.11}$$

где a_1 и a_2 – положительные величины, зависящие только от d.

Теорема 2 позволила устранить логарифмический множитель из результата Айнмаля [14] и получить многомерный аналог результата КМТ [20] для векторов с конечными экспоненциальными моментами. В работе [40] автор обобщил теорему 2 на случай неодинаково распределенных слагаемых с различными ковариационными операторами. В статье [39] теорема 2 была сформулирована и доказана при фиксированном n. Это означает, что вероятностное пространство зависело от этого n. Однако, с помощью многократного применения результата при фиксированном n можно построить векторы $\{X_j\}$ и $\{Y_j\}$ таким образом, что (1.11) выполняется при всех n одновременно на одном и том же вероятностном пространстве. Достаточно взять независимые построения из формулировки теоремы 2 с фиксированными $n = 2^{2^m}$, $m = 1, 2, \dots$, как собственно и было сделано в работе КМТ [20, часть II, с. 48]. Это построение описано в работе автора [41], в которой дано подробное доказательство следующего ниже следствия 1. В работе [39] постоянные a_1 и a_2 были выписаны в явном виде, как некоторые степенные функции от размерности d. Разумеется, они имеют тот же вид и в утверждении теоремы 2, которое выполняется при всех n. При этом достаточно увеличить в четыре раза величину a_2, оставляя прежней величину a_1.

Поскольку в настоящей работе исследуется задача (A), мы не рассматриваем здесь подробно историю вопроса для задачи (B), отсылая читателя к работам [9–11, 14, 17, 20, 28–32, 39, 40] и [42–44].

Из теоремы 2 вытекает следующее следствие 1.

Следствие 1. *Предположим, что случайный вектор* ξ *с* $\mathbf{E}\,\xi = 0$, $\operatorname{cov}\xi = \mathbb{I}$, *имеет конечный экспоненциальный момент* $\mathbf{E}e^{\lambda\|\xi\|}$ *для некоторого* $\lambda > 0$. *Тогда можно построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых случайных векторов* $X_1, X_2, \dots$ *и последовательность независимых гауссовских случайных векторов* $Y_1, Y_2, \dots$ *таким образом, что* $\mathcal{L}(X_j) = \mathcal{L}(\xi)$, $\mathbf{E}\,Y_j = 0$, $\operatorname{cov} Y_j = \mathbb{I}$, $j = 1, 2, \dots$, *и*

$$\sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} Y_j = O(\log n) \quad \textit{п.н.} \quad \textit{при} \ \ n \to \infty. \tag{1.12}$$

Аналог этого результата был получен Айнмалем [14] при дополнительных ограничениях на гладкость распределений $\mathcal{L}(\xi)$. Айнмаль доказал также аналог теоремы 2 (см. [14, теорема 10]), но только для достаточно гладких распределений $\mathcal{L}(\xi)$. Следствие 1 является частным случаем теоремы 1 при $H(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$. Одномерный вариант следствия 1 был доказан в работе КМТ [20]. Как было отмечено в работе [20], из результатов Бартфаи [1] следует, что точность аппроксимации в (1.12) наилучшая из возможных, в (1.12) нельзя заменить O большое на o малое, если распределение вектора ξ не является нормальным.

Заметим, что если условия теоремы 1 выполнены при $H(x) = |x|^\gamma$, то удается обеспечить выполнение соотношения (1.3), которое сильнее, чем (1.8). С другой стороны, Шао [33] показал, что для функций

$H(x) = e^{x^\beta}$, $0 < \beta < 1$, невозможно заменить O большое на o малое в соотношении (1.8), по крайней мере для тех распределений $\mathcal{L}(X)$, для которых $\mathbf{E}\, e^{2\|X\|^\beta} = \infty$. В работе [33] отмечается, что это легко следует из приведенного выше рассуждения Бреймана [7] (см. (1.9) и (1.10)). В этом случае (1.8) превращается в

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} Y_j \Big\| = O((\log n)^{1/\beta}) \quad \text{п.н.} \quad \text{при} \ \ n \to \infty.$$

Остается открытым вопрос об описании класса функций $H \in \mathcal{H}$, для которых можно заменить O большое на o малое в соотношении (1.8).

Доказательство теоремы 1 представляет собой слегка модифицированный вариант соответствующего доказательства из работы Айнмаля [14], см. также [11]. Он построил доказательство на основе собственного результата для векторов с конечными экспоненциальными моментами. Последний содержал лишний дополнительный логарифмический множитель в соответствующем неравенстве. Как уже было отмечено выше, теорема 2 настоящей работы является усилением упомянутого результата. Неудивительно поэтому то, что именно использование теоремы 2 позволяет нам получить более общий результат теоремы 1. Более существенное отличие состоит в том, что в теореме 2 мы рассматриваем распределения из классов $\mathcal{A}_d(\tau)$, определение которых несколько отличается от определения класса распределений, рассмотренного Айнмалем в работе [14]. Отметим также, что при доказательстве мы будем пользоваться тем, что распределения урезанных векторов принадлежат классам $\mathcal{A}_d(\tau)$ с параметрами τ, которые существенно меньше уровней урезания u (см. лемму 3). Близкая идея использовалась Айнмалем в [14], см. также работы Гётце и автора [17] и автора [44].

Автор благодарен Уве Айнмалю за полезные исторические комментарии и за указание ссылок на работы, которые были ранее неизвестны автору.

2. Доказательство теоремы 1

Символами $c, c_1, c_2, \ldots$ мы будем обозначать положительные величины, зависящие только от d, $\mathcal{L}(\xi)$ и функции $H(\,\cdot\,)$, фигурирующих в условиях теоремы 1. Запись $A \ll B$, будет означать, что существует такая c, что $A \leqslant cB$. Мы будем также использовать обозначение $A \asymp B$, если $A \ll B \ll A$.

Пусть ξ – произвольный случайный вектор, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Мы будем обозначать $\xi^{[u]}$ его срезку на уровне $u > 0$:

$$\xi^{[u]} = \begin{cases} \xi, & \text{если} \quad \|\xi\| \leqslant u, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Положим

$$\xi^{(u)} = \xi - \xi^{[u]}, \quad \xi^{\{u\}} = \xi^{[u]} - \mathbf{E}\,\xi^{[u]}. \tag{2.2}$$

Ясно, что $\mathbf{E}\,\xi^{(u)} + \mathbf{E}\,\xi^{[u]} = \mathbf{E}\,\xi = 0$ и, следовательно,

$$\bigl\|\mathbf{E}\,\xi^{(u)}\bigr\| = \bigl\|\mathbf{E}\,\xi^{[u]}\bigr\| \leqslant \mathbf{E}\,\bigl\|\xi^{(u)}\bigr\|.$$

Пусть $\mathbb{D}_u \overset{\text{def}}{=} \operatorname{cov}\xi^{\{u\}}$. Легко видеть, что

$$2\,\mathbf{E}\,\bigl\langle \xi^{(u)}, v\bigr\rangle^2 \geqslant \bigl\langle v, v\bigr\rangle - \bigl\langle \mathbb{D}_u v, v\bigr\rangle \geqslant \mathbf{E}\,\bigl\langle \xi^{(u)}, v\bigr\rangle^2 \tag{2.3}$$

при всех $v \in \mathbf{R}^d$ (см., например, неравенство (2.4) в работе [43]). Таким образом, операторы $\mathbb{I} - \mathbb{D}_u$ и $\mathbb{I} - \mathbb{D}_u^{1/2}$ положительно определены. Пусть $s_j^2 = s_j^2(u)$, $j = 1, \ldots, d$, – собственные числа оператора $\mathbb{D}_u$. Согласно соотношению (2.3), мы имеем

$$0 \leqslant 1 - s_j^2 \leqslant 2\,\mathbf{E}\,\bigl\|\xi^{(u)}\bigr\|^2, \quad j = 1, \ldots, d. \tag{2.4}$$

Собственные числа оператора $\mathbb{I} - \mathbb{D}_u^{1/2}$ равны $1 - s_j$, где $0 \leqslant s_j \leqslant 1$. Поэтому, в соответствии с (2.4),

$$\mathbf{E}\,\bigl\|\xi^{\{u\}} - \mathbb{D}_u^{-1/2}\xi^{\{u\}}\bigr\|^2 = \sum_{j=1}^{d}(1 - s_j)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{d}(1 - s_j^2)^2 \leqslant 4\,d\,\bigl(\mathbf{E}\,\bigl\|\xi^{(u)}\bigr\|^2\bigr)^2. \tag{2.5}$$

Пусть $H \in \mathcal{H}(\delta, x_0)$ с $\delta > 0$, $x_0 > 0$ и

$$h \overset{\text{def}}{=} \mathbf{E}\,H\bigl(\|\xi\|\bigr). \tag{2.6}$$

Легко видеть, что

$$H^{-1}(kh) \asymp H^{-1}(k), \tag{2.7}$$

где $H^{-1}(\,\cdot\,)$ обозначает обратную функцию для $H(\,\cdot\,)$. Ясно, что если функция $H(x)/x^2$ не убывает при $x \geqslant x_0$, то для всех $y \geqslant x_0$

$$\mathbf{E}\,\bigl\|\xi^{(y)}\bigr\|^2/y^2 \leqslant \frac{\mathbf{E}\,H\bigl(\|\xi\|\bigr)}{H(y)}. \tag{2.8}$$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые копии вектора ξ. Положим

$$m_0 = 0, \quad m_n = \lceil H(2^n)/h\rceil,\ n \in \mathbf{N}. \tag{2.9}$$

Обозначим

$$\overline{\xi}_k = \xi_k\,\mathbf{1}\bigl\{\|\xi_k\| \leqslant 2^n\bigr\} = \xi_k^{[2^n]}, \quad m_{n-1} < k \leqslant m_n, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{2.10}$$

и

$$\widetilde{\xi}_k = \mathbb{D}_{2^n}^{-1/2}\bigl(\overline{\xi}_k - \mathbf{E}\,\overline{\xi}_k\bigr) = \mathbb{D}_{2^n}^{-1/2}\,\xi_k^{\{2^n\}}, \qquad m_{n-1} < k \leqslant m_n, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{2.11}$$

где урезанные случайные векторы $\xi_k^{[u]}$ и $\xi_k^{\{u\}}$ определены в соответствии с (2.1) и (2.2). Заметим, что

$$\mathbb{D}_{2^n} = \operatorname{cov}\,\overline{\xi}_k, \quad \operatorname{cov}\,\widetilde{\xi}_k = \mathbb{I}, \quad \text{при} \quad m_{n-1} < k \leqslant m_n, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{2.12}$$

Покажем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\left\{\xi_k \neq \overline{\xi}_k\right\} < \infty, \tag{2.13}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bigl\|\mathbf{E}\,\overline{\xi}_k\bigr\|}{H^{-1}(k)} < \infty \tag{2.14}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}\,\bigl\|\overline{\xi}_k - \mathbf{E}\,\overline{\xi}_k - \widetilde{\xi}_k\bigr\|^2}{\bigl(H^{-1}(k)\bigr)^2} < \infty. \tag{2.15}$$

Мы будем оценивать величины $\mathbf{P}\left\{\xi_k \neq \overline{\xi}_k\right\}$ и $\bigl\|\mathbf{E}\,\overline{\xi}_k\bigr\|$, предполагая, что $m_{n-1} < k \leqslant m_n$. Тогда, согласно (2.10), (2.11) и (2.12),

$$\overline{\xi}_k = \xi_k^{[u]}, \quad \overline{\xi}_k - \mathbf{E}\,\overline{\xi}_k = \xi^{\{u\}}, \quad \widetilde{\xi}_k = \mathbb{D}_u^{-1/2}\,\xi_k^{\{u\}} \quad \text{с} \quad u = 2^n \tag{2.16}$$

и

$$\left\|\mathbf{E}\,\overline{\xi}_k\right\| \leqslant \mathbf{E}\,\|\xi\|\,\mathbf{1}\bigl\{\|\xi\| > 2^n\bigr\} \leqslant \mathbf{E}\,\|\xi\|\,\mathbf{1}\bigl\{H(\|\xi\|) > kh\bigr\}. \tag{2.17}$$

Аналогично,

$$\mathbf{P}\left\{\xi_k \neq \overline{\xi}_k\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\|\xi\| > 2^n\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{H(\|\xi\|) > kh\right\}. \tag{2.18}$$

Для $m \geqslant k \geqslant c_1$ с достаточно большим c_1 мы имеем

$$\frac{H^{-1}((m+1)\,h)}{(m+1)^{1/2}} \leqslant \frac{H^{-1}(kh)}{k^{1/2}}. \tag{2.19}$$

Мы выберем $c_1 \in \mathbf{N}$ настолько большим, насколько это будет необходимо для справедливости проводимых ниже рассуждений. Согласно (2.17) и (2.19),

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=c_1}^{\infty} \frac{\left\|\mathbf{E}\,\overline{\xi}_k\right\|}{H^{-1}(kh)} \leqslant \sum_{k=c_1}^{\infty} \frac{1}{H^{-1}(kh)} \sum_{m=k}^{\infty} \mathbf{E}\,\bigl\|\xi\bigr\|\,\mathbf{1}\bigl\{mh < H(\|\xi\|) \leqslant (m+1)\,h\bigr\}\\
&\leqslant \sum_{k=c_1}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{H^{-1}((m+1)\,h)}{H^{-1}(kh)}\,\mathbf{P}\left\{mh < H(\|\xi\|) \leqslant (m+1)\,h\right\}\\
&= \sum_{m=c_1}^{\infty} \sum_{k=c_1}^{m} \frac{H^{-1}((m+1)\,h)}{H^{-1}(kh)}\,\mathbf{P}\left\{mh < H(\|\xi\|) \leqslant (m+1)\,h\right\}\\
&\leqslant \sum_{m=c_1}^{\infty} \Bigl(\sum_{k=c_1}^{m} \frac{(m+1)^{1/2}}{k^{1/2}}\Bigr)\,\mathbf{P}\left\{mh < H(\|\xi\|) \leqslant (m+1)\,h\right\}\\
&\leqslant c \sum_{m=c_1}^{\infty} m\,\mathbf{P}\left\{mh < H(\|\xi\|) \leqslant (m+1)\,h\right\} \leqslant c < \infty.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Используя (2.6), (2.7) и (2.20), мы получаем (2.14). Аналогично, из неравенства (2.18) следует, что

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\xi_k \neq \overline{\xi}_k\right\} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{H(\|\xi\|) > kh\right\}\\
&\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} m\,\mathbf{P}\left\{mh < H(\|\xi\|) \leqslant (m+1)\,h\right\} \leqslant c < \infty.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Доказано соотношение (2.13).

Оценим теперь $\mathbf{E}\left\|\overline{\xi}_k-\mathbf{E}\,\overline{\xi}_k-\widetilde{\xi}_k\right\|^2$, предполагая что $m_{n-1}<k\leqslant m_n$. Тогда, согласно (2.2), (2.5), (2.10) и (2.11),

$$\mathbf{E}\left\|\overline{\xi}_k-\mathbf{E}\,\overline{\xi}_k-\widetilde{\xi}_k\right\|^2\leqslant 4\,d\left(\mathbf{E}\left\|\xi^{(u)}\right\|^2\right)^2 \quad \text{с} \quad u=2^n. \tag{2.22}$$

Далее, согласно (2.9) и определению классов $\mathcal{H}(\delta,x_0)$, если $k\geqslant c_1$ с достаточно большим c_1, мы имеем

$$H^{-1}(kh)\leqslant u=2^n<4\,H^{-1}(kh). \tag{2.23}$$

Используя (2.1), (2.6), (2.23) и (2.8) с $y=4\,H^{-1}(kh)$, мы получим, что при $k\geqslant c_1$ с достаточно большим c_1 справедливы неравенства

$$\mathbf{E}\left\|\xi^{(u)}\right\|^2\leqslant\mathbf{E}\left\|\xi^{(y)}\right\|^2\leqslant 16\left(H^{-1}(kh)\right)^2/k. \tag{2.24}$$

Таким образом, согласно (2.22) и (2.24),

$$\sum_{k=c_1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}\left\|\overline{\xi}_k-\mathbf{E}\,\overline{\xi}_k-\widetilde{\xi}_k\right\|^2}{\left(H^{-1}(kh)\right)^2}\leqslant 2^{10}\,d\sum_{k=c_1}^{\infty}\left(H^{-1}(kh)\right)^2/k^2. \tag{2.25}$$

С помощью (1.5) нетрудно доказать, что

$$\sum_{k=c_1}^{\infty}\left(H^{-1}(k)\right)^2/k^2\leqslant c\sum_{k=c_1}^{\infty}k^{-\frac{2+2\delta}{2+\delta}}<\infty \tag{2.26}$$

и, следовательно, используя (2.7), (2.25) и (2.26), мы получаем (2.15).

Следующие леммы 1 и 2 можно найти с доказательствами в книге В. В. Петрова [25, сс. 221 и 222] соответственно.

Лемма 1 (лемма Кронекера). *Предположим, что $a_k\nearrow\infty$ и $\{x_k\}$ – последовательности вещественных чисел и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ сходится. Тогда $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}a_k\,x_k\to 0$ при $n\to\infty$.*

Лемма 2. *Предположим, что $X_1,X_2,\dots$ – последовательность независимых случайных величин. Пусть $a_k\nearrow\infty$ – последовательность положительных чисел и $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{-2}\,\mathbf{D}\,X_k<\infty$. Тогда*

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\mathbf{E}\,X_k\right)\to 0 \quad \text{п.н.} \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Применяя лемму 1 с $a_k = H^{-1}(k)$ и $x_k = \left\|\mathbf{E}\,\overline{\xi}_k\right\|$, мы видим, что из (2.14) следует соотношение

$$\frac{1}{H^{-1}(n)}\left\|\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\,\overline{\xi}_k\right\| \leqslant \frac{1}{H^{-1}(n)}\sum_{k=1}^{n}\left\|\mathbf{E}\,\overline{\xi}_k\right\| \to 0 \qquad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{2.27}$$

Используя лемму 2 покоординатно с $a_k = H^{-1}(k)$, мы выводим из (2.15), что

$$\frac{1}{H^{-1}(n)}\sum_{k=1}^{n}\bigl(\overline{\xi}_k - \mathbf{E}\,\overline{\xi}_k - \widetilde{\xi}_k\bigr) \to 0 \quad \text{п.н.} \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{2.28}$$

Из соотношений (2.27) и (2.28) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n}\bigl(\overline{\xi}_k - \widetilde{\xi}_k\bigr) = o(H^{-1}(n)) \quad \text{п.н.} \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{2.29}$$

Рассмотрим независимые одинаково распределенные гауссовские случайные векторы $\eta, \eta_1, \dots, \eta_n, \dots$ с $\mathbf{E}\,\eta = 0$ и $\operatorname{cov}\eta = \mathbb{I}$. Используя стандартное средство доказательства теорем о сильной аппроксимации – лемму А из работы Беркеша и Филиппа [2], мы можем взять ξ_k в качестве X_k и η_k в качестве Y_k в доказательстве теоремы 1, выбирая ниже специальным образом совместное распределение $\bigl\{\widetilde{\xi}_k\bigr\}$ и $\bigl\{\eta_k\bigr\}$.

Следующая лемма 3 доказана в процессе доказательства теоремы 2 из работы автора [44] (см. выделенную формулу после формулы (2.44) в [44]).

Лемма 3. *Предположим, что случайный вектор ξ и функция $H(\,\cdot\,)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда существуют такие положительные величины $c_2 \geqslant 1$ и c_3, зависящие только от d, $\mathcal{L}(\xi)$ и от функции $H(\,\cdot\,)$, что при $k \geqslant c_3$ из неравенства*

$$u \geqslant H^{-1}(kh) \tag{2.30}$$

следует, что

$$\mathcal{L}\bigl(\mathbb{D}_u^{-1/2}\,\xi^{\{u\}}\bigr) \in \mathcal{A}_d(c_2\,w_0),$$

где величина h определена в (2.6), а

$$w_0 = \frac{u}{\log H(u)}. \tag{2.31}$$

Ясно, что формулировку леммы 3 можно упростить, заменяя условие (2.30) на условие $u \geqslant c_3$. Мы не стали этого делать, чтобы облегчить читателю проверку доказательства леммы 3 в [44].

Мы будем выбирать $c_1 \geqslant c_3$, а c_4 – настолько большим, чтобы из $n \geqslant c_4$ следовало $m_{n-1} \geqslant c_1$. Тогда при $u = 2^n$, $n \geqslant c_4$, мы получим, используя лемму 3, что

$$\mathcal{L}\big(\mathbb{D}_u^{-1/2}\,\xi^{\{u\}}\big) \in \mathcal{A}_d(\tau), \quad \text{где } \tau = c_2\,w_0$$

с некоторым $c_2 \geqslant 1$. Заметим, что, в соответствии с (2.23), справедливо неравенство (2.30). Кроме того, $\tau \geqslant w_0 \geqslant c$. Согласно (применяемой к векторам $\big\{\mathbb{D}_u^{-1/2}\,\xi_k^{\{u\}}\big\} = \big\{\widetilde{\xi}_k\big\}$, $m_{n-1} < k \leqslant m_n$), существует такая конструкция, что совместное распределение $\big\{\widetilde{\xi}_k\big\}$ и $\big\{\eta_k\big\}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{E}\,\exp\left(\frac{c_5\,\Delta_n}{w_0}\right) = \mathbf{E}\,\exp\left(\frac{c_5\,\Delta_n\,\log H(u)}{u}\right) \leqslant \exp\big(c_6\,\log^*(m_n/\tau^2)\big) \tag{2.32}$$

с $u = 2^n$ и

$$\Delta_n = \max_{m_{n-1}<k\leqslant m_n}\left\|\sum_{j=m_{n-1}+1}^{k}\widetilde{\xi}_j - \sum_{j=m_{n-1}+1}^{k}\eta_j\right\|, \tag{2.33}$$

где c_5 и c_6 – положительные величины, зависящие только от d, $\mathcal{L}(\xi)$ и $H(\,\cdot\,)$. Заметим, что если $\tau < 1$, то теорему 2 следует применять при $\tau = 1$. Разумеется, мы можем считать, что описанные выше построения независимы в совокупности при различных n.

Согласно (2.32),

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\,\big(\Delta_n \geqslant x\big) &\leqslant \exp\left(c_6\,\log^*(m_n/\tau^2) - \frac{c_5\,x\,\log H(u)}{u}\right)\\ &\leqslant \exp\left(-\frac{c_5\,x\,\log H(u)}{2\,u}\right),\end{aligned} \tag{2.34}$$

если

$$c_6\,\log^*(m_n/\tau^2) \leqslant \frac{c_5\,x\,\log H(u)}{2\,u}. \tag{2.35}$$

Заметим, что, в соответствии с (2.9), для выполнения неравенства (2.35) достаточно потребовать, чтобы $x \geqslant \frac{4\,u\,c_6}{c_5} = c_7\,u$, если $n \geqslant c_4$, где c_4 достаточно велико.

Рассмотрим события

$$A_n = \big\{\Delta_n \geqslant c_8\,2^n\big\} \tag{2.36}$$

с $c_8 = \max\{4\,c_6/c_5, 2/c_5\}$. Согласно (2.34) и (2.36), сходится ряд $\sum_n \mathbf{P}\{A_n\}$. В силу леммы Бореля–Кантелли, с вероятностью единица происходит лишь конечное число событий A_n. Следовательно, для почти всех элементарных событий $\omega \in \Omega$ существуют такие $L(\omega) < \infty$, что

$$\max_{1<k\leqslant m_n} \Bigg\| \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\xi}_j - \sum_{j=1}^{k} \eta_j \Bigg\| \leqslant \sum_{s=1}^{n} \Delta_s \leqslant L(\omega) + 2\,c_8\,2^n \qquad \text{при} \quad n \in \mathbf{N} \tag{2.37}$$

и

$$\Bigg\| \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\xi}_j - \sum_{j=1}^{k} \eta_j \Bigg\| \leqslant L(\omega) + 4\,c_8\,H^{-1}(k) \quad \text{при} \quad m_{n-1} < k \leqslant m_n. \tag{2.38}$$

Утверждение теоремы 1 вытекает теперь из (2.29) и (2.38).

Литература

1. P. Bártfai, *Die Bestimmung der zu einem wiederkehrenden Prozess gehörenden Verteilungfunktion aus den mit Fehlern behafteten Daten einer einzigen Realisation.* — Studia Sci. Math. Hungar. **1** (1966), 161–168.
2. I. Berkes, W. Philipp, *Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors.* — Ann. Probab. **17** (1979), 29–54.
3. E. Berger, *Fast sichere Approximation von Partialsummen unabhängiger und stationärer ergodischer Folgen von Zufallsvectoren.* — Dissertation, Universität Göttingen (1982).
4. А. А. Боровков, *О скорости сходимости в принципе инвариантности.* — Теория вероятн. и ее примен. **18** (1973), 217–234.
5. A. A. Borovkov, A. I. Sakhanenko, *On the rate of convergence in invariance principle.* — Lect. Notes Math. **1021** (1981), 59–66.
6. А. А. Боровков, А. И. Саханенко, *Скорости сходимости в принципе инвариантности для банаховых пространств.* — Теория вероятн. и ее примен. **25** (1980), 721–731.

7. L. Breiman, *On the tail behaviour of sums of independent random variables.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **9** (1967), 20–24.
8. M. Csörgő, P. Révész, *A new method to prove Strassen type laws of invariance principle.* I; II. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **31** (1975), 255–259; 261–269.
9. M. Csörgő, P. Révész, *Strong approximations in probability and statistics.* — New York, Academic Press, 1981.
10. S. Csörgő, P. Hall, *The Komlós–Major–Tusnády approximations and their applications.* — Austral. J. Statist. **26**, No. 2 (1984), 189–218.
11. U. Einmahl, *A refinement of the KMT inequality for partial sum strong approximation.* — Techn. Rep. Ser. Lab. Res. Statist. Probab. No. 88 (1986). Carleton University, University of Ottawa, Ottawa, Canada.
12. U. Einmahl, *A useful estimate in the multidimensional invariance principle.* — Probab. Theor. Rel. Fields **76** (1987), 81–101.
13. U. Einmahl, *Strong invariance principles for partial sums of independent random vectors.* — Ann. Probab. **15** (1987), 1419–1440.
14. U. Einmahl, *Extensions of results of Komlós, Major, and Tusnády to the multivariate case.* — J. Multivar. Anal. **28** (1989), 20–68.
15. U. Einmahl, *A new strong invariance principle for sums of independent random vectors.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **364** (2009), 5–31.
16. U. Einmahl, D. M. Mason, *Rates of clustering in Strassen's LIL for partial sums processes.* — Probab. Theor. Rel. Fields **97** (1993), 479–487.
17. F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *Bounds for the rate of strong approximation in the multidimensional invariance principle.* — Теория вероятн. и ее примен. **53** (2008), 100–123.
18. В. В. Городецкий, *О скорости сходимости в многомерном принципе инвариантности.* — Теория вероятн. и ее примен. **20** (1975), 642–649.
19. N. C. Jain, K. Jogdeo, W. F. Stout, *Upper and lower functions for martingales and mixing processes.* — Ann. Probab. **3** (1975), 119–145.
20. J. Komlós, P. Major, G. Tusnády, *An approximation of partial sums of independent RV'-s and the sample DF.* I; II. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **32** (1975), 111–131; **34** (1976), 34–58.
21. P. Major, *The approximation of partial sums of independent r.v.'s.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **35** (1976), 213–220.
22. P. Major, *Approximation of partial sums of i.i.d.r.v.'s when summands have only two moments.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **35** (1976), 221–230.
23. P. Major, *On the invariance principle for sums of independent identically distributed random variables.* — J. Multivar. Anal. **8** (1978), 487–517.
24. P. Major, *An improvement of Strassen's invariance principle.* — Ann. Probab. **7**, (1979), 55–61.
25. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Наука, Москва, 1987.
26. W. Philipp, *Almost sure invariance principles for sums of B-valued random variables.* — Lect. Notes in Math. **709** (1979), 171–193.
27. Ю. В. Прохоров, *Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.* — Теория вероятн. и ее примен. **1** (1956), 177–238.

28. А. И. Саханенко, *Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных величин с экспоненциальными моментами.* — Труды инст. матем. СО АН СССР, Наука, Новосибирск **3** (1984), 4–49.
29. А. И. Саханенко, *Оценки в принципе инвариантности.* — Труды инст. матем. СО АН СССР, Наука, Новосибирск **5** (1985), 27–44.
30. А. И. Саханенко, *О точности сильной нормальной аппроксимации в принципе инвариантности.* — Труды инст. матем. СО АН СССР, Наука, Новосибирск **13** (1989), 40–66.
31. A. I. Sakhanenko, *A new way to obtain estimates in the invariance principle.* — In: High dimensional probability, II (Seattle, 1999), Progr. Probab. **47**, Birkhäuser Boston, Boston (2000), pp. 223–245.
32. А. И. Саханенко, *Оценки в принципе инвариантности в терминах срезанных степенных моментов.* — Сибирский матем. журн. **47** (2006), 1355–1371.
33. Qi-Man Shao, *On a problem of Csörgő and Révész.* — Ann. Probab. **17** (1989), 809–812.
34. Qi-Man Shao, *Strong approximation theorems for independent random variables and their applications.* — J. Multivar. Anal. **52** (1995), 107–130.
35. А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов.* Изд-во Киевск. ун-та, Киев, 1961.
36. V. Strassen, *An invariance principle for the law of iterated logarithm.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **3** (1967), 211–226.
37. V. Strassen, *Almost sure behavior of sums of independent random variables and martingales.* — In: Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66) **II**: Contributions to Probability Theory, Part 1, Univ. California Press, Berkeley, Calif. (1967), pp. 315–343.
38. А. Ю. Зайцев, *Оценки расстояния Леви–Прохорова в многомерной центральной предельной теореме для случайных величин с конечными экспоненциальными моментами.* — Теория вероятн. и ее примен. **31** (1986), 246–265.
39. A. Yu. Zaitsev, *Multidimensional version of the results of Koml ós, Major, and Tusnády for vectors with finite exponential moments.* — ESAIM: Probability and Statistics **2** (1998), 41–108.
40. A. Yu. Zaitsev, *Multidimensional version of the results of Sakhanenko in the invariance principle for vectors with finite exponential moments.* I; II; III. — Теория вероятн. и ее примен. **45** (2000), 718–738; **46** (2001), 535–561; 744–769.
41. A. Yu. Zaitsev, *On the strong gaussian approximation in multidimensional case.* — Annales de l'I.S.U.P. Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris **45** (2001), 3–7.
42. A. Yu. Zaitsev, *Estimates for the strong approximation in multidimensional Central Limit Theorem.* — In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Bejing 2002. Vol. III. Invited Lectures (2002), pp. 107–116.
43. А. Ю. Зайцев, *Оценки точности сильной аппроксимации в многомерном принципе инвариантности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **339** (2006), 37–53.
44. А. Ю. Зайцев, *Оценки точности сильной гауссовской аппроксимации сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **351** (2007), 141–157.

Zaitsev A. Yu. The rate of Gaussian strong approximation for the sums of i.i.d. multidimensional random vectors.

The aim of this paper is to derive new optimal bounds for the rate of strong Gaussian approximation of sums of i.i.d. $\mathbf{R}^d$-valued random variables ξ_j having finite moments of the form $\mathbf{E}\, H\,(\|\xi_j\|)$, where $H\,(x)$ is a monotone function growing not slower than $x^{2+\delta}$ and not faster than e^{cx}. We obtain some generalizations of the results of U. Einmahl (1989).

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: zaitsev@pdmi.ras.ru

Поступило 5 ноября 2008 г.