



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Сергеев, Представления супералгебр Ли $gl(n, m)$ и $Q(h)$ в пространстве тензоров, *Функци. анализ и его прил.*, 1984, том 18, выпуск 1, 80–81

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

11 декабря 2024 г., 08:58:03



ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ $\mathfrak{gl}(n, m)$ И $Q(n)$ В ПРОСТРАНСТВЕ ТЕНЗОРОВ

А. Н. Сергеев

В дальнейшем основное поле всегда \mathbb{C} . Известно (см. [1]), что все неприводимые конечномерные представления простых алгебр Ли серии A_n можно получить, разлагая тензорные степени тождественного представления. В настоящей работе, следуя методу Г. Вейля, мы изучаем разложение тензорных степеней тождественного представления супералгебр Ли $\mathfrak{gl}(n, m)$ и $Q(n)$. В качестве следствия получаем формулу для характеров неприводимых конечномерных представлений супералгебры $Q(n)$, входящих в тензорную алгебру тождественного представления. Кроме того, результаты настоящей работы объясняют использование диаграмм Юнга для описания подпредставлений супергруппы Ли $GL(n, m)$ в тензорной алгебре, как это сделано в [7, 8].

Пусть A — свободная коммутативная супералгебра, порожденная семейством образующих $\{x_i\}_{i \in I}$. Определим для $x = (x_1, \dots, x_k)$ элемент $p(x)$ по правилу $p(x) = (p(x_1), \dots, p(x_k))$, где $p(x_i) = \text{четность } x_i$. Если S_k — симметрическая группа порядка k и $\sigma \in S_k$, то $c(p(x), \sigma)$ определяется из соотношения $c(p(x), \sigma) x_1 \dots x_k = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(k)}$. Легко проверить, что c является коциклом, т. е. $c(p(x), \sigma\tau) = c(\sigma^{-1}p(x), \tau) c(p(x), \sigma)$. Пусть V — тождественное представление $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, m)$ и W его k -тензорная степень, ρ_k — соответствующее представление \mathfrak{g} и $U(\mathfrak{g})$ (универсальная обертывающая алгебра супералгебры \mathfrak{g}). Группа S_k действует в W по правилу $\pi(\sigma)(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = c(\sigma^{-1}(p(v)), \sigma) v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}$. Разложение модуля W на неприводимые \mathfrak{g} подмодули основано на следующем результате, который доказывает также его полную приводимость.

Теорема 1. $\pi(S_k)^1 = \rho_k(U(\mathfrak{g}))$ (1 — обозначение для коммутанта).

Для описания разложения модуля W введем следующие объекты (см. [2]): μ — разбиение k_1 , ν — разбиение k_2 , причем $k = k_1 + k_2$, λ — разбиение k . Через S^λ обозначим неприводимый S_k -модуль, соответствующий λ , а через V^λ — соответствующий ему неприводимый \mathfrak{g} подмодуль в W . Определим теперь модули над S_k по правилу $M^\lambda = [\lambda_1] \dots [\lambda_l]$, $M^{\mu, \nu} = [\mu_1] \dots [\mu_r] [1^{(\nu_1)}] \dots [1^{(\nu_s)}]$. Кроме того, пусть $m(\lambda, \eta)$ и $n(\mu, \nu, \lambda)$ — кратности вхождения модулей S^λ и S^η в модули M^λ и $M^{\mu, \nu}$ соответственно. Наконец, через $\{l \in \mathbb{N}\}$ и $\{\eta\}$ обозначим след матрицы $\text{diag}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ в l -й симметрической степени пространства V и в модуле V^λ соответственно.

Лемма 1. $\{\lambda_1\} \dots \{\lambda_l\} = \sum m(\lambda, \eta) \{\eta\}$. Следовательно, справедлива детерминантная форма $\{\lambda\} = \det |\lambda_i - i + j|$. Явное выражение для функции $\{\lambda\}$ дает

Лемма 2. $\{\lambda\} = \sum n(\mu, \nu, \lambda) \omega(x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} y_1^{\nu_1} \dots y_m^{\nu_m})$, здесь ω — симметризация по группе $S_n \times S_m$.

Из теоремы 1, лемм 1, 2, следует справедливость следующей теоремы, которая описывает разложение W на неприводимые \mathfrak{g} модули.

Теорема 2. Модуль $V^\lambda \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda_{n+1} \leq m$, кратность его вхождения в W равна размерности S^λ , его старший вес равен $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \langle \lambda_1 - n \rangle, \dots, \langle \lambda_m - n \rangle)$, где λ_i — длина i -го столбца диаграммы λ и $\langle l \rangle = l$, если $l \geq 0$ и $l = 0$ — в противном случае. Кроме того, числа $n(\mu, \nu, \lambda)$ задают кратность веса (μ, ν) в модуле V^λ .

С л е д с т в и е. Полилинейные \mathfrak{g} инвариантные формы p -векторов из V и q -ковекторов из V^* существуют, если только $p = q$. В этом случае они являются линейными комбинациями инвариантов вида $\langle u_1, v_1 \rangle \dots \langle u_p, v_p \rangle$, где $u_i \in V$, $v_j \in V^*$, $\langle \ , \ \rangle$ — скалярное произведение вектора и ковектора.

З а м е ч а н и е. Тензорное произведение модулей V^λ и V^η , очевидно, вполне приводимо, и его разложение на неприводимые модули задается правилом Литлвуда — Ричардсона для пары диаграмм λ и η .

Пусть теперь $\mathfrak{g} = Q(n)$, P — нечетный оператор из коммутанта \mathfrak{g} в V : $P^2 = -1$, H_k — группа с образующими a_1, \dots, a_k , ε и соотношениями $a_i^2 = \varepsilon$, $a_i a_j = \varepsilon a_j a_i$, $i \neq j$ и $\varepsilon^2 = 1$. $G_k = S_k \circ H_k$ — полупрмое произведение при естественном действии S_k на H_k . Соответствия $\varphi(a_i) = 1 \otimes \dots \otimes P \otimes \dots \otimes 1$ (P стоит на i -м месте) и $\varphi(\varepsilon) = -1$, задают представление H_k в W . Вместе с представлением S_k в W это определяет представление ψ группы G_k в W . Следующий результат аналогичен теореме 1 и доказывает полную приводимость W как \mathfrak{g} -модуля.

Теорема 3. $\psi(G_k)^1 = \rho_k(U(\mathfrak{g}))$.

Характеры неприводимых однородных (в смысле четности) представлений G_k , при которых ε переходит в -1 , сводятся к проективным характеристам S_k , изучавшимся И. Шудом (см. [3]). Каждому разбиению числа k на нечетные слагаемые α соответствуют два

четных класса сопряженных элементов в G_k ; если один из них C , то другой εC (только на этих классах однородные характеры отличны от нуля). Неприводимые однородные представления, переводящие ε в -1 , будем нумеровать разбиениями λ числа k на попарно неравные слагаемые. Пусть V^λ — неприводимый \mathfrak{g} -подмодуль в W , соответствующий λ , $n_i(\alpha)$ — число частей α , равных i , $q(\alpha) = \sum n_i(\alpha)$, $|\lambda|$ — число ненулевых частей λ , $\delta(\lambda) = 0$, если $|\lambda|$ — четно и 1 — в противном случае, $\|\lambda\| = (|\lambda| - \delta(\lambda))/2$, $\Theta_\alpha^\lambda = 2^{q(\alpha) - \|\lambda\|} X_\alpha^\lambda(-1) (X_\alpha^\lambda(t) - \text{коэффициенты разложения обобщенных степенных сумм по функциям Холла — Литлвуда (см. [5])})$. Будем говорить, что представление абсолютно неприводимо, если его коммутант сводится к скалярам. Теория проективных характеров группы S_k (см. [3—5]) позволяет описать неприводимые однородные характеры G_k .

Л е м м а 3. Если λ пробегает множество разбиений k на попарно различные слагаемые, то Θ_α^λ образуют полный набор неприводимых однородных характеров G_k . Соответствующее представление абсолютно неприводимо, если и только если $\delta(\lambda) = 0$.

Пусть $\{\lambda\}$ обозначает след матрицы $\text{diag}(x_1, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n)$ в модуле V^λ , тогда несложное вычисление показывает, что

$$\{\lambda\} = \frac{2^{|\lambda| - \|\lambda\|}}{\Delta(x)} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \varpi \left(x_1^{\lambda_1 + n - 1} \dots x_n^\lambda \prod_{i_1 > 1} \left(1 + \frac{x_{i_1}}{x_1} \right) \dots \prod_{i_m > m} \left(1 + \frac{x_{i_m}}{x_m} \right) \right), \quad (1)$$

где $\Delta(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$, $m = |\lambda|$.

Положим $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1$ — подалгебра Картана, состоящая из диагональных матриц в \mathfrak{g}_0 и \mathfrak{g}_1 , X_β и F_β — четный и нечетный элементы веса β относительно \mathfrak{h}_0 . Определим $\bar{\beta} \in \mathfrak{h}_1^*$ по правилу $[h, F_\beta] = \bar{\beta}(h) X_\beta$, $h \in \mathfrak{h}_1$ и j — нечетная невырожденная билинейная форма на \mathfrak{h}^* , соответствующая инвариантной нечетной билинейной форме на \mathfrak{g} . Теорема 3, лемма 3 и формула (1) показывают, что справедлива следующая

Т е о р е м а 4. Модуль $V^\lambda \neq 0$, если и только если $\lambda_{n+1} = 0$, его старший вес равен λ и

$$ch V^\lambda = 2^{|\lambda| - \|\lambda\|} \sum \text{sgn } w \cdot w \left\{ e^{\lambda + \rho} \prod_{j(\bar{\beta}, \lambda) \neq 0} (1 + e^{-\beta_j}) \right\} 1 / \sum \text{sgn } w \cdot e^{w\rho},$$

где β — положительный корень, ρ — полусумма положительных корней и суммирование ведется по элементам группы Вейля алгебры Ли \mathfrak{g}_0^* . Модуль V^λ абсолютно неприводим тогда и только тогда, когда $\delta(\lambda) = 0$.

З а м е ч а н и е. Из результатов [6] следует, что ограничение любой инвариантной полиномиальной функции на \mathfrak{h}_0 равно нулю, поэтому V^λ однозначно определяется своим обыкновенным характером.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947.
2. Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982.
3. Schur I. — J. Reine Angew. Math., 1911, Bd 139, S. 155—250.
4. Morris A. O. — Proc. London Math. Soc., 1962, v. 12, № 3, p. 55—76.
5. Morris A. O. — Lect. Notes Math., 1977, v. 579, p. 136—154.
6. Sergeev A. N. — С. г. de l'Acad. bulgare de Sci., 1982, v. 35, p. 573—576.
7. Balantekin A., Bars I. — J. Math. Phys., 1981, v. 22, p. 1149—1162.
8. Balantekin A., Bars I. — J. Math. Phys., 1982, v. 22, p. 1810—1818.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию
11 апреля 1983 г.