

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Молотков, Об эффективной модели упругой  
блочной среды с проскальзыванием на границах,  
*Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1994, том 218, 96–117

Использование Общероссийского математического портала Math-  
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-  
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.85

18 марта 2025 г., 18:49:20



Л. А. Молотков

## ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ УПРУГОЙ ВЛОЧНОЙ СРЕДЫ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ НА ГРАНИЦАХ

Для изучения распространения волн в трещиноватых и пористых средах, а также в твердых средах с инородными включениями исследуется распространение волн в упругой среде, перерезанной двумя взаимно перпендикулярными системами трещин. Этими трещинами среда разделяется на блоки, свойства которых изменяются периодически вдоль координатных осей и на границе которых выполняются условия проскальзывания. Для этой среды строятся несколькими способами четырехфазная эффективная модель, которая является обобщением слоистых эффективных моделей [1-4], получивших экспериментальное подтверждение в работах [5, 6]. Используя уравнение построенной четырехфазной модели, определяются волновые фронты и скорости распространения волн вдоль осей в этой модели и производится сравнение этих результатов с данными работы [4].

### § 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ В ДВУХ НАПРАВЛЕНИЯХ УПРУГУЮ СИСТЕМУ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ НА ГРАНИЦАХ.

Пусть задана двумерная периодическая вдоль осей  $x$  и  $z$  упругая система  $0 \leq x \leq H$ ,  $0 \leq z \leq \tilde{H}$ , в которой в направлениях осей  $x$  и  $z$  расположены соответственно  $n$  и  $\tilde{n}$  периодов с длинами  $h$  и  $\tilde{h}$  (рис. 1). Эта система разделяется на  $n\tilde{n}$  одинаковых прямоугольных ячеек, размеры которых совпадают с длинами периодов  $h$  и  $\tilde{h}$ . Каждая ячейка состоит из четырех однородных изотропных упругих сред, заполняющих прямоугольники 1, 2, 3, 4, размеры которых показаны на рис. 1. Упругая среда с номером  $i$  характеризуется плотностью  $\rho_i$  и коэффициентами Ламе  $\lambda_i$  и  $\mu_i$ , а волновое поле в этой среде описывается смещениями  $u_{x_i}$ ,  $u_{z_i}$  и напряжениями  $t_{xx_i}$ ,  $t_{zz_i}$  и  $t_{xz_i}$ . Эти величины удовлетворяют уравнениям сплошной среды

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{xx_i}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xz_i}}{\partial z} &= \rho_i \frac{\partial^2 u_{x_i}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial t_{xz_i}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zz_i}}{\partial z} &= \rho_i \frac{\partial^2 u_{z_i}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

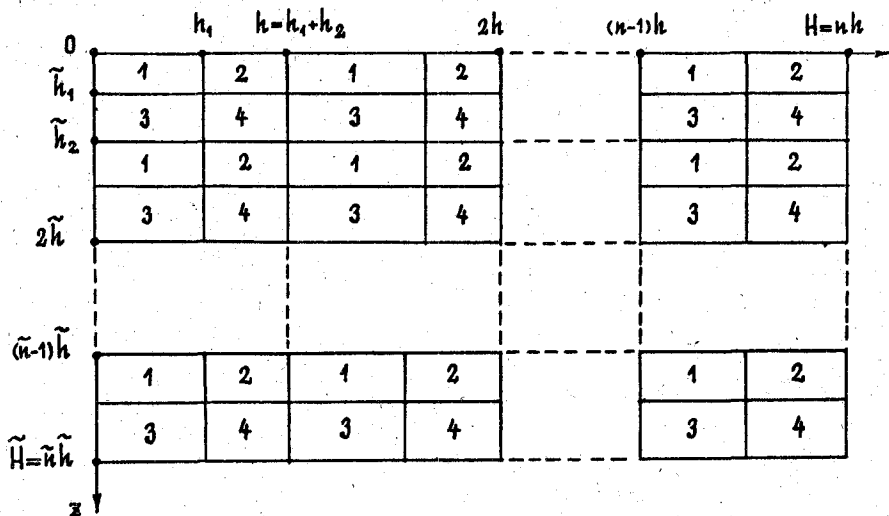


Рис. 1

и уравнениям закона Гука, которые могут быть записаны в виде равенств

$$\begin{aligned}
 t_{xx_i} &= (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial u_{x_i}}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial u_{z_i}}{\partial z}, \\
 t_{zz_i} &= \lambda_i \frac{\partial u_{x_i}}{\partial x} + (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial u_{z_i}}{\partial z}, \\
 t_{xz_i} &= \mu_i \left( \frac{\partial u_{x_i}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z_i}}{\partial x} \right),
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

или в виде соотношений

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_{x_i}}{\partial z} &= \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{4\mu_i(\lambda_i + \mu_i)} t_{xx_i} - \frac{\lambda_i}{4\mu_i(\lambda_i + \mu_i)} t_{zz_i}, \\
 \frac{\partial u_{z_i}}{\partial z} &= -\frac{\lambda_i}{4\mu_i(\lambda_i + \mu_i)} t_{xx_i} + \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{4\mu_i(\lambda_i + \mu_i)} t_{zz_i}, \\
 \frac{\partial u_{x_i}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z_i}}{\partial x} &= \frac{t_{xz_i}}{\mu_i}.
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

На внутренних границах имеет место контакт с проскальзыванием, описываемый равенствами

$$\begin{aligned}
 u_{x_1} = u_{x_2}, \quad u_{x_3} = u_{x_4}, \quad t_{xx_1} = t_{xx_2}, \quad t_{xx_3} = t_{xx_4}, \\
 t_{xz_1} = t_{xz_2} = t_{xz_3} = t_{xz_4} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

при  $x = lh$  и  $x = h_1 + lh$  ( $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ) и

$$\begin{aligned} u_{z_1} = u_{z_3}, \quad u_{z_2} = u_{z_4}, \quad t_{zz_1} = t_{zz_3}, \quad t_{zz_2} = t_{zz_4}, \\ t_{xz_1} = t_{xz_2} = t_{xz_3} = t_{xz_4} = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

при  $z = \tilde{l}\tilde{h}$  и  $z = \tilde{h}_1 + \tilde{l}\tilde{h}$  ( $l = 0, 1, 2, \dots, \tilde{n} - 1$ ). На внешних границах системы выполняются некоторые линейные краевые условия сопряжения системы с окружающей средой, однако конкретный вид этих условий оказывается несущественным. Также несущественными являются характер и расположение линейных источников, возбуждающих заданную систему. Чтобы получить для этой системы эффективную модель совершим в образующихся волновых полях предельный переход при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{n} \rightarrow \infty$ ,  $H = \text{const}$ ,  $\tilde{H} = \text{const}$ ,  $\varepsilon_1 = h_1/h = \text{const}$ ,  $\varepsilon_2 = \tilde{h}_2/\tilde{h} = \text{const}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_1 = \tilde{h}_1/\tilde{h} = \text{const}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_2 = \tilde{h}_2/\tilde{h} = \text{const}$  и получим уравнения, которым удовлетворяют смещения и напряжения после этого перехода. Указанный предельный переход аналогичен предельным переходам, осуществленным в работах [3, 4], и отличается от последних переходов только тем, что является двойным и проводится сразу по двум направлениям. Каждая фиксированная точка системы с координатами  $x$  и  $z$  при неограниченном возрастании  $n$  и  $\tilde{n}$  оказывается бесчисленное число раз в каждой из четырех сред, если  $x/H$  и  $z/\tilde{H}$  - иррациональные числа [3]. Поэтому из значений смещений  $u_{x_i}$ ,  $u_{z_i}$  и напряжений  $t_{xx_i}$ ,  $t_{zz_i}$ ,  $t_{xz_i}$ , относящихся к случаю, когда рассматриваемая точка находится в среде  $i$ , можно составить пять последовательностей, зависящих от двух параметров. Обозначим через  $u_x^{(i)}$ ,  $u_z^{(i)}$ ,  $t_{xx}^{(i)}$ ,  $t_{zz}^{(i)}$  и  $t_{xz}^{(i)}$  соответствующие пределы этих последовательностей при  $n \rightarrow \infty$  и  $\tilde{n} \rightarrow \infty$ . Существование указанных пределов будет доказано в конце этого параграфа в частных случаях, когда число периодов неограниченно возрастает сперва вдоль одной оси, а затем вдоль другой. Эти пределы не зависят от того, вдоль какой оси осуществляется первый предельный переход и совпадают с пределами, когда оба числа  $n$  и  $\tilde{n}$  одновременно стремятся к нулю.

Остановимся на выводе уравнений, которым удовлетворяют указанные пределы. Поскольку каждая ячейка в результате предельного перехода сокращается до точки, в которой имеет место четырехфазное волновое поле, то на основании граничных усло-

вий (1.4) и (1.5) приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} t_{xx}^{(1)} &= t_{xx}^{(2)}, \quad t_{xx}^{(3)} = t_{xx}^{(4)}, \quad t_{zz}^{(1)} = t_{zz}^{(3)}, \quad t_{zz}^{(2)} = t_{zz}^{(4)}, \\ u_x^{(1)} &= u_x^{(2)}, \quad u_x^{(3)} = u_x^{(4)}, \quad u_z^{(1)} = u_z^{(3)}, \quad u_z^{(2)} = u_z^{(4)}, \\ t_{xz}^{(1)} &= t_{xz}^{(2)} = t_{xz}^{(3)} = t_{xz}^{(4)} = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Эти равенства связывают смещения и напряжения в четырех фазах и сокращают количество независимых величин до 8:  $t_{xx}^{(1,2)}$ ,  $t_{xx}^{(3,4)}$ ,  $t_{zz}^{(1,3)}$ ,  $t_{zz}^{(2,4)}$ ,  $u_x^{(1,2)}$ ,  $u_x^{(3,4)}$ ,  $u_z^{(1,3)}$  и  $u_z^{(2,4)}$ . Производные этих величин, как и в работе [4], могут быть определены равенствами

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial x} &= \varepsilon_1 \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_x^{(3,4)}}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial u_x^{(3)}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_x^{(4)}}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_z^{(1,3)}}{\partial z} &= \tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} + \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_z^{(3)}}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_z^{(2,4)}}{\partial z} = \tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial z} + \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_z^{(4)}}{\partial z}, \\ \frac{\partial t_{xx}^{(1,2)}}{\partial x} &= \varepsilon_1 \frac{\partial t_{xx}^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial t_{xx}^{(2)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial t_{xx}^{(3,4)}}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial t_{xx}^{(3)}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial t_{xx}^{(4)}}{\partial x}, \\ \frac{\partial t_{zz}^{(1,3)}}{\partial z} &= \tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial t_{zz}^{(1)}}{\partial z} + \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial t_{zz}^{(3)}}{\partial z}, \quad \frac{\partial t_{zz}^{(2,4)}}{\partial z} = \tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial t_{zz}^{(2)}}{\partial z} + \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial t_{zz}^{(4)}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

которые соответствуют классическому определению производных по сокращающимся размерам ячейки. После указанного предельного перехода уравнения (1.1) и (1.3) с учетом условий (1.6) заменяются соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{xx}^{(i)}}{\partial x} &= \rho_i \frac{\partial^2 u_x^{(i)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial t_{zz}^{(i)}}{\partial z} = \rho_i \frac{\partial^2 u_z^{(i)}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial x} &= A_i t_{xx}^{(i)} - B_i t_{zz}^{(i)}, \\ \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z} &= -B_i t_{xx}^{(i)} + A_i t_{zz}^{(i)}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где применяются обозначения

$$a_i = \frac{4\mu_i(\lambda_i + \mu_i)}{\lambda_i + 2\mu_i}, \quad b_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + 2\mu_i}, \quad A_i = \frac{1}{a_i}, \quad B_i = \frac{b_i}{a_i}. \quad (1.9)$$

После подстановки равенств (1.8) в формулы (1.7) приходим к

уравнениям закона Гука

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial x} &= A_{12} t_{xx}^{(1,2)} - \varepsilon_1 B_1 t_{zz}^{(1,3)} - \varepsilon_2 B_2 t_{zz}^{(2,4)}, \\
 \frac{\partial u_x^{(3,4)}}{\partial x} &= A_{34} t_{xx}^{(3,4)} - \varepsilon_1 B_3 t_{zz}^{(1,3)} - \varepsilon_2 B_4 t_{zz}^{(2,4)}, \\
 \frac{\partial u_z^{(1,3)}}{\partial z} &= -\tilde{\varepsilon}_1 B_1 t_{xx}^{(1,2)} - \tilde{\varepsilon}_2 B_3 t_{xx}^{(3,4)} + A_{13} t_{zz}^{(1,3)}, \\
 \frac{\partial u_z^{(2,4)}}{\partial z} &= -\tilde{\varepsilon}_1 B_2 t_{xx}^{(1,2)} - \tilde{\varepsilon}_2 B_4 t_{xx}^{(3,4)} + A_{24} t_{zz}^{(2,4)}.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

и к уравнениям сплошной среды

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 t_{xx}^{(1,2)}}{\partial x} &= \rho_{12} \frac{\partial^2 u_x^{(1,2)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial t_{xx}^{(3,4)}}{\partial x} = \rho_{34} \frac{\partial^2 u_x^{(3,4)}}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial t_{zz}^{(1,3)}}{\partial z} &= \rho_{13} \frac{\partial^2 u_z^{(1,3)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial t_{zz}^{(2,4)}}{\partial z} = \rho_{24} \frac{\partial^2 u_z^{(2,4)}}{\partial t^2},
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

в которых использованы обозначения

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= A_1 \varepsilon_1 + A_1 \varepsilon_2, \quad A_{34} = A_3 \varepsilon_1 + A_4 \varepsilon_2, \\
 A_{13} &= A_1 \tilde{\varepsilon}_1 + A_3 \tilde{\varepsilon}_2, \quad A_{24} = A_2 \tilde{\varepsilon}_1 + A_4 \tilde{\varepsilon}_2, \\
 \rho_{12} &= \rho_1 \varepsilon_1 + \rho_2 \varepsilon_2, \quad \rho_{34} = \rho_3 \varepsilon_1 + \rho_4 \varepsilon_2, \\
 \rho_{13} &= \rho_1 \tilde{\varepsilon}_1 + \rho_3 \tilde{\varepsilon}_2, \quad \rho_{24} = \rho_2 \tilde{\varepsilon}_1 + \rho_4 \tilde{\varepsilon}_2.
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

После вывода уравнений эффективной модели (1.10) и (1.11) остановимся на другом способе получения этих уравнений. Этот способ, основанный на осреднениях поля сперва вдоль одной оси, а затем вдоль другой оси и на использовании точных решений уравнений, позволяет без каких-либо предположений вывести уравнения эффективной модели. Первое осреднение вдоль оси  $z$  уже проводилось в работе [4]. После предельного перехода при  $\tilde{n} \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{\varepsilon}_1 = \text{const}$  и  $\tilde{\varepsilon}_2 = \text{const}$  в полосах, вытянутых вдоль оси  $z$  и содержащих среды 1 и 3, уравнения для осредненной модели, согласно работе [4], имеют вид

$$\begin{aligned}
 t_{xx}^{(1)} &= (a_1 + \lambda_0 b_1^2 \tilde{\varepsilon}_1) \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} + \lambda_0 b_1 b_3 \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_x^{(3)}}{\partial x} + b_1 \lambda_0 \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
 t_{xx}^{(3)} &= \lambda_0 b_1 b_3 \tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} + (a_3 + \lambda_0 b_3^2 \tilde{\varepsilon}_2) \frac{\partial u_x^{(3)}}{\partial x} + b_3 \lambda_0 \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
 t_{zz}^{(1,3)} &= \lambda_0 b_1 \tilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} + \lambda_0 b_3 \tilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial u_x^{(3)}}{\partial x} + \lambda_0 \frac{\partial u_z}{\partial z};
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial t_{xx}^{(1)}}{\partial x} = \rho_1 \frac{\partial^2 u_x^{(1)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial t_{xx}^{(3)}}{\partial x} = \rho_3 \frac{\partial^2 u_x^{(3)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial t_{zz}^{(1,3)}}{\partial z} = \rho_{13} \frac{\partial^2 u_z^{(1,3)}}{\partial t^2}, \quad (1.14)$$

где использованы обозначения (1.9) и

$$\lambda_0 = \left[ \frac{\tilde{\epsilon}_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \frac{\tilde{\epsilon}_2}{\lambda_3 + 2\mu_3} \right]^{-1}. \quad (1.15)$$

Если решить уравнения (1.13) относительно величин  $\partial u_x^{(1)}/\partial x$ ,  $\partial u_x^{(3)}/\partial x$  и  $\partial u_z^{(1,3)}/\partial z$ , то придем к другой форме закона Гука

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} &= A_1 t_{xx}^{(1)} - B_1 t_{zz}^{(1,3)}, & \frac{\partial u_x^{(3)}}{\partial x} &= A_3 t_{xx}^{(3)} - B_3 t_{zz}^{(1,3)}, \\ \frac{\partial u_z^{(1,3)}}{\partial z} &= -B_1 \tilde{\epsilon}_1 t_{xx}^{(1)} - B_3 \tilde{\epsilon}_2 t_{xx}^{(3)} + A_{13} t_{zz}^{(1,3)}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Уравнения

$$\frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial x} = A_2 t_{xx}^{(2)} - B_2 t_{zz}^{(2,4)}, \quad \frac{\partial u_x^{(4)}}{\partial x} = A_4 t_{xx}^{(4)} - B_4 t_{zz}^{(2,4)}, \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z^{(2,4)}}{\partial z} &= -B_2 \tilde{\epsilon}_1 t_{xx}^{(2)} - B_4 \tilde{\epsilon}_2 t_{xx}^{(4)} + A_{24} t_{zz}^{(2,4)}, \\ \frac{\partial t_{xx}^{(2)}}{\partial x} &= \rho_2 \frac{\partial^2 u_x^{(2)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial t_{xx}^{(4)}}{\partial x} = \rho_4 \frac{\partial^2 u_x^{(4)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial t_{zz}^{(2,4)}}{\partial z} = \rho_{24} \frac{\partial^2 u_z^{(2,4)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

аналогичные соотношениям (1.16) и (1.14), записываются для усредненной вдоль оси  $z$  полосы, содержащей среды 2 и 4. Основание уравнений (1.14), (1.16) и уравнений (1.17), (1.18) проводится на основе матричного метода при условиях

$$\tilde{h} \ll h_1, \quad \tilde{h} \ll h_2. \quad (1.19)$$

В результате первого осреднения получается слоистая, периодическая вдоль оси  $x$  среда. В ней слои являются двухфазными, однородными и описываются или уравнениями (1.14), (1.16), или уравнениями (1.17), (1.18). На границах между этими слоями должны выполняться первое, второе, пятое и шестое равенства (1.6). Для каждого слоя и для всей среды можно построить точное решение упомянутых уравнений с помощью интегральных преобразований и матричного метода. На основе этих решений удается обоснованно осуществить второе осреднение поля, при котором  $n \rightarrow \infty$ ,  $h \rightarrow 0$ ,  $H = \text{const}$ ,  $\epsilon_1 = \text{const}$  и  $\epsilon_2 = \text{const}$ . Результаты этого осреднения приводят к уравнениям, которые совпадают с уравнениями (1.10) и (1.11). Совершенно аналогично

можно провести осреднения в другом порядке и также получить уравнения (1.10) и (1.11). Условия применимости в этом случае даются неравенствами

$$h \ll \tilde{h}_1, \quad h \ll \tilde{h}_2. \quad (1.20)$$

Таким образом, уравнения эффективной модели (1.10) и (1.11), согласно второму выводу, оказались оправданными в двух крайних случаях, когда выполняются неравенства (1.19) или (1.20). Второй вывод также подтверждает справедливость установленных первым способом уравнений (1.10) и (1.11) при любых соотношениях между величинами  $h_1, h_2, \tilde{h}_1$  и  $\tilde{h}_2$ .

## § 2. ЗАКОН ГУКА И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ.

Закон Гука, выраженный соотношениями (1.10), представим соотношениями

$$\begin{aligned} (s_1 + s_2) \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial x} &= (s_1 A_1 + s_2 A_2) t_{xx}^{(1,2)} - s_1 B_1 t_{zz}^{(1,3)} - s_2 B_2 t_{zz}^{(2,4)}, \\ (s_3 + s_4) \frac{\partial u_x^{(3,4)}}{\partial x} &= (s_3 A_3 + s_4 A_4) t_{xx}^{(3,4)} - s_3 B_3 t_{zz}^{(1,3)} - s_4 B_4 t_{zz}^{(2,4)}, \\ (s_1 + s_3) \frac{\partial u_z^{(1,3)}}{\partial z} &= -s_1 B_1 t_{xx}^{(1,2)} - s_3 B_3 t_{xx}^{(3,4)} + (s_1 A_1 + s_3 A_3) t_{zz}^{(1,3)}, \\ (s_2 + s_4) \frac{\partial u_z^{(2,4)}}{\partial z} &= -s_2 B_2 t_{xx}^{(1,2)} - s_4 B_4 t_{xx}^{(3,4)} + (s_2 A_2 + s_4 A_4) t_{zz}^{(2,4)}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

в которых  $s_i$  - часть площади ячейки, заполненная  $i$ -ой средой, и

$$s_1 = \varepsilon_1 \tilde{\varepsilon}_1, \quad s_2 = \varepsilon_2 \tilde{\varepsilon}_1, \quad s_3 = \varepsilon_1 \tilde{\varepsilon}_2, \quad s_4 = \varepsilon_2 \tilde{\varepsilon}_2. \quad (2.2)$$

Таблица, составленная из коэффициентов, стоящих в правой части смещений (2.1), является симметричной и определенно положительной матрицей. Если из равенств (2.1) выразить напряжения, то придем к уравнениям

$$t_{xx}^{(1,2)} = \frac{\tilde{\varepsilon}_1 \Delta_{11}}{\Delta} \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial x} + \frac{\tilde{\varepsilon}_2 \Delta_{12}}{\Delta} \frac{\partial u_x^{(3,4)}}{\partial x} + \frac{\varepsilon_1 \Delta_{13}}{\Delta} \frac{\partial u_z^{(1,3)}}{\partial z} + \frac{\varepsilon_2 \Delta_{14}}{\Delta} \frac{\partial u_z^{(2,4)}}{\partial z},$$

$$t_{xx}^{(3,4)} = \frac{\tilde{\varepsilon}_1 \Delta_{12}}{\Delta} \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial x} + \frac{\tilde{\varepsilon}_2 \Delta_{22}}{\Delta} \frac{\partial u_x^{(3,4)}}{\partial x} + \frac{\varepsilon_1 \Delta_{23}}{\Delta} \frac{\partial u_z^{(1,3)}}{\partial z} + \frac{\varepsilon_2 \Delta_{24}}{\Delta} \frac{\partial u_z^{(2,4)}}{\partial z},$$



$$t_{zz}^{(1,3)} = \frac{\tilde{\varepsilon}_1 \Delta_{13}}{\Delta} \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial x} + \frac{\tilde{\varepsilon}_2 \Delta_{23}}{\Delta} \frac{\partial u_x^{(3,4)}}{\partial x} + \frac{\varepsilon_1 \Delta_{33}}{\Delta} \frac{\partial u_z^{(1,3)}}{\partial z} + \frac{\varepsilon_2 \Delta_{34}}{\Delta} \frac{\partial u_z^{(2,4)}}{\partial z}, \quad (2.3)$$

$$t_{zz}^{(2,4)} = \frac{\tilde{\varepsilon}_1 \Delta_{14}}{\Delta} \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial x} + \frac{\tilde{\varepsilon}_2 \Delta_{24}}{\Delta} \frac{\partial u_x^{(3,4)}}{\partial x} + \frac{\varepsilon_1 \Delta_{34}}{\Delta} \frac{\partial u_z^{(1,3)}}{\partial z} + \frac{\varepsilon_2 \Delta_{44}}{\Delta} \frac{\partial u_z^{(2,4)}}{\partial z},$$

в которых симметричная матрица с элементами  $\Delta_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3, 4$ ) также является положительно определенной и

$$\begin{aligned} \Delta &= A_{12}A_{13}A_{24}A_{34} - s_1 B_1^2 A_{24}A_{34} - s_2 B_2^2 A_{13}A_{34} - \\ & \quad s_3 B_3^2 A_{12}A_{24} - s_4 B_4^2 A_{12}A_{13} + s_1 s_4 (B_1 B_4 - B_2 B_3)^2, \\ \tilde{\varepsilon}_1 \Delta_{11} &= A_{13}A_{24}A_{34} - s_3 B_3^2 A_{24} - s_4 B_4^2 A_{13}, \\ \Delta_{12} &= \varepsilon_1 A_{24}B_1 B_3 + \varepsilon_2 A_{13}B_2 B_4, \\ \Delta_{13} &= A_{24}A_{34}B_1 + s_4 B_4 (B_2 B_3 - B_1 B_4), \\ \Delta_{14} &= A_{13}A_{34}B_2 + s_3 B_3 (B_1 B_4 - B_2 B_3), \\ \tilde{\varepsilon}_2 \Delta_{22} &= A_{12}A_{13}A_{24} - s_1 B_1^2 A_{24} - s_2 B_2^2 A_{13}, \\ \Delta_{23} &= A_{12}A_{24}B_3 + s_2 B_2 (B_1 B_4 - B_2 B_3), \\ \Delta_{24} &= A_{12}A_{13}B_4 + s_1 B_1 (B_2 B_3 - B_1 B_4), \\ \varepsilon_1 \Delta_{33} &= A_{12}A_{24}A_{34} - s_2 B_2^2 A_{34} - s_4 B_4^2 A_{12}, \\ \Delta_{34} &= \tilde{\varepsilon}_1 A_{34}B_1 B_2 + \tilde{\varepsilon}_2 A_{12}B_3 B_4, \\ \varepsilon_2 \Delta_{44} &= A_{12}A_{13}A_{34} - s_1 B_1^2 A_{34} - s_3 B_3^2 A_{12}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Соотношения (2.3) и (1.10) представляют собой две формы закона Гука для эффективной модели и соответствуют двум формам (1.2) и (1.3) закона Гука упругой среды. Все величины (2.4) положительны и коэффициенты при производных смещений в равенствах (2.3) могут рассматриваться как коэффициенты Ламе для эффективной модели.

Для вывода соотношения энергетического баланса в рассматриваемой модели помножим обе части первого, второго, третьего и четвертого уравнений (1.11) соответственно на  $\tilde{\varepsilon}_1 \partial u_x^{(1,2)} / \partial t$ ,  $\tilde{\varepsilon}_2 \partial u_x^{(3,4)} / \partial t$ ,  $\varepsilon_1 \partial u_z^{(1,3)} / \partial t$ ,  $\varepsilon_2 \partial u_z^{(2,4)} / \partial t$  и сложим почленно получившиеся равенства. После ряда преобразований приходим к соотношению

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{\partial W_k}{\partial t} + \frac{\partial W_p}{\partial t}, \quad (2.5)$$

в котором величины

$$\begin{aligned} p_x &= \tilde{\varepsilon}_1 t_{xx}^{(1,2)} \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial t} + \tilde{\varepsilon}_2 t_{xx}^{(3,4)} \frac{\partial u_x^{(3,4)}}{\partial t}, \\ p_z &= \varepsilon_1 t_{zz}^{(1,3)} \frac{\partial u_z^{(1,3)}}{\partial t} + \varepsilon_2 t_{zz}^{(2,4)} \frac{\partial u_z^{(2,4)}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

являются потоками энергии вдоль осей  $x$  и  $z$ , а

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{1}{2} \left[ (\rho_1 s_1 + \rho_2 s_2) \left( \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial t} \right)^2 + (\rho_3 s_3 + \rho_4 s_4) \left( \frac{\partial u_x^{(3,4)}}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\rho_1 s_1 + \rho_3 s_3) \left( \frac{\partial u_z^{(1,3)}}{\partial t} \right)^2 + (\rho_2 s_2 + \rho_4 s_4) \left( \frac{\partial u_z^{(2,4)}}{\partial t} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

- плотность кинетической энергии.

Величина  $\partial W_p / \partial t$  представляется соотношением

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_p}{\partial t} &= \tilde{\varepsilon}_1 t_{xx}^{(1,2)} \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial x \partial t} + \tilde{\varepsilon}_2 t_{xx}^{(3,4)} \frac{\partial^2 u_x^{(3,4)}}{\partial x \partial t} + \\ &\quad + \varepsilon_1 t_{zz}^{(1,3)} \frac{\partial^2 u_z^{(1,3)}}{\partial z \partial t} + \varepsilon_2 t_{zz}^{(2,4)} \frac{\partial^2 u_z^{(2,4)}}{\partial z \partial t}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

в которое подставим равенства (2.3). После несложных преобразований приходим к формуле

$$\begin{aligned} W_p &= \frac{1}{2\Delta} \left[ \tilde{\varepsilon}_1^2 \Delta_{11} \left( \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial x} \right)^2 + 2\tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 \Delta_{12} \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial x} \frac{\partial u_x^{(3,4)}}{\partial x} + \right. \\ &\quad + 2\varepsilon_1 \tilde{\varepsilon}_1 \Delta_{13} \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial x} \frac{\partial u_z^{(1,3)}}{\partial z} + 2\varepsilon_2 \tilde{\varepsilon}_1 \Delta_{14} \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial x} \frac{\partial u_z^{(2,4)}}{\partial z} + \\ &\quad + \tilde{\varepsilon}_2^2 \Delta_{22} \left( \frac{\partial u_x^{(3,4)}}{\partial x} \right)^2 + 2\varepsilon_1 \tilde{\varepsilon}_2 \Delta_{23} \frac{\partial u_x^{(3,4)}}{\partial x} \frac{\partial u_z^{(1,3)}}{\partial z} + \\ &\quad + 2\varepsilon_2 \tilde{\varepsilon}_2 \Delta_{24} \frac{\partial u_x^{(3,4)}}{\partial x} \frac{\partial u_z^{(2,4)}}{\partial z} + \varepsilon_1^2 \Delta_{33} \left( \frac{\partial u_z^{(1,3)}}{\partial z} \right)^2 + \\ &\quad \left. + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \Delta_{34} \frac{\partial u_z^{(1,3)}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(2,4)}}{\partial z} + \varepsilon_2^2 \Delta_{44} \left( \frac{\partial u_z^{(2,4)}}{\partial z} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Сравнение коэффициентов в соотношениях (2.3) и (2.9) показывает, что величина  $W_p$  является положительно определенной квадратичной формой относительно аргументов  $\tilde{\varepsilon}_1 \partial u_x^{(1,2)} / \partial x$ ,  $\tilde{\varepsilon}_2 \partial u_x^{(3,4)} / \partial x$ ,  $\varepsilon_1 \partial u_z^{(1,3)} / \partial z$  и  $\varepsilon_2 \partial u_z^{(2,4)} / \partial z$ . Учитывая это свойство, а также энергетическое соотношение (2.5), приходим к выводу, что  $W_p$  - плотность потенциальной энергии.

Если использовать формулы (2.3), то выражение (2.9) переходит в равенство

$$W_p = \frac{1}{2} \left[ \tilde{\varepsilon}_1 t_{xx}^{(1,2)} \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial x} + \tilde{\varepsilon}_2 t_{xx}^{(3,4)} \frac{\partial u_x^{(3,4)}}{\partial x} + \varepsilon_1 t_{zz}^{(1,3)} \frac{\partial u_z^{(1,3)}}{\partial z} + \varepsilon_2 t_{zz}^{(2,4)} \frac{\partial u_z^{(2,4)}}{\partial z} \right], \quad (2.10)$$

которое может быть записано в виде

$$W_p = \frac{1}{2} \left[ s_1 \left( t_{xx}^{(1)} \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} + t_{zz}^{(1)} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} \right) + s_2 \left( t_{xx}^{(2)} \frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial x} + t_{zz}^{(2)} \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial z} \right) + s_3 \left( t_{xx}^{(3)} \frac{\partial u_x^{(3)}}{\partial x} + t_{zz}^{(3)} \frac{\partial u_z^{(3)}}{\partial z} \right) + s_4 \left( t_{xx}^{(4)} \frac{\partial u_x^{(4)}}{\partial x} + t_{zz}^{(4)} \frac{\partial u_z^{(4)}}{\partial z} \right) \right]. \quad (2.11)$$

Аналогичная формула

$$W_k = \frac{1}{2} \left\{ \rho_1 s_1 \left[ \left( \frac{\partial U_x^{(1)}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial t} \right)^2 \right] + \rho_2 s_2 \left[ \left( \frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial t} \right)^2 \right] + \rho_3 s_3 \left[ \left( \frac{\partial u_x^{(3)}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z^{(3)}}{\partial t} \right)^2 \right] + \rho_4 s_4 \left[ \left( \frac{\partial u_x^{(4)}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z^{(4)}}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.12)$$

для плотности кинетической энергии устанавливается на основании формулы (2.7). Приведенные соотношения (2.11) и (2.12) очевидны и могут быть записаны самостоятельно. Если использовать равенства (2.11) и (2.12), граничные условия (1.4)–(1.6), определения осредненных производных (1.7) и формулы для функции Лагранжа и функции действия, то на основании вариационных

принципов могут быть выведены уравнения эффективной модели (1.10) и (1.11). Область использования этого способа, как и первого способа, не ограничивается соотношениями (1.19) и (1.21) между величинами  $h_1, h_2, \tilde{h}_1$  и  $\tilde{h}_2$ .

### § 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭФФЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ.

Рассмотрим безграничную среду, описываемую уравнениями (1.10) и (1.11). В начале координат помещен точечный источник, действующий при  $t > 0$  и заданный соотношениями

$$[t_{zz}^{(1,3)}] = f_1(t)\delta(x), [t_{zz}^{(2,4)}] = f_2(t)\delta(x), [u_z^{(1,3)}] = [u_z^{(2,4)}] = 0 \quad (3.1)$$

при  $z = 0$ , в которых квадратичные скобки обозначают скачок функции, стоящей в квадратных скобках, т.е.  $[f] = f(x+0) - f(x-0)$ . Образующееся волновое поле удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$\begin{aligned} u_x^{(1,2)} = u_x^{(3,4)} = u_z^{(1,3)} = u_z^{(2,4)} = 0, \\ \frac{\partial u_x^{(1,2)}}{\partial t} = \frac{\partial u_x^{(3,4)}}{\partial t} = \frac{\partial u_z^{(1,3)}}{\partial t} = \frac{\partial u_z^{(2,4)}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

при  $t = 0$ . Для нахождения смещений и напряжений во всех фазах представим эти величины равенствами

$$\begin{aligned} u &= \int_0^\infty \frac{e^{ikx} dx}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U e^{k(t\eta-z\alpha)} d\eta, \\ t &= \int_0^\infty \frac{k e^{ikx} dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T e^{k(t\eta-z\alpha)} d\eta, \end{aligned} \quad (3.3)$$

в которых для краткости у оригиналов и образов опущены верхние индексы (1,2), (1,3), (2,4), (3,4) и нижние индексы  $x, z, xx$  и  $zz$ . Входящая в формулы (3.3) величина  $\alpha$  определяется из условия совместности уравнений (1.10) и (1.11).

Для нахождения этой величины подставим соотношения (3.3) в

уравнения (1.10) и (1.11) и получим равенства

$$\begin{aligned}
 iU_x^{(1,2)} - A_{12}T_{xx}^{(1,2)} + \varepsilon_1 B_1 T_{zz}^{(1,3)} + \varepsilon_2 B_2 T_{zz}^{(2,4)} &= 0, \\
 iU_x^{(3,4)} - A_{34}T_{xx}^{(3,4)} + \varepsilon_1 B_3 T_{zz}^{(1,3)} + \varepsilon_2 B_4 T_{zz}^{(2,4)} &= 0, \\
 \alpha U_z^{(1,3)} + \tilde{\varepsilon}_1 B_1 T_{xx}^{(1,2)} + \tilde{\varepsilon}_2 B_3 T_{xx}^{(3,4)} - A_{13}T_{zz}^{(1,3)} &= 0, \\
 -\alpha U_z^{(2,4)} + \tilde{\varepsilon}_1 B_2 T_{xx}^{(1,2)} + \tilde{\varepsilon}_2 B_4 T_{xx}^{(3,4)} - A_{24}T_{zz}^{(2,4)} &= 0, \\
 -iT_{xx}^{(1,2)} + \rho_{12}\eta^2 U_x^{(1,2)} &= 0, \\
 -iT_{xx}^{(3,4)} + \rho_{34}\eta^2 U_x^{(3,4)} &= 0, \\
 \alpha T_{zz}^{(1,3)} + \rho_{13}\eta^2 U_z^{(1,3)} &= 0, \\
 \alpha T_{zz}^{(2,4)} + \rho_{24}\eta^2 U_z^{(2,4)} &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

которые могут рассматриваться как система восьми линейных однородных уравнений относительно восьми неизвестных. Условие совместности соотношений (3.4) состоит в равенстве нулю определителя системы (3.4) и приводит к биквадратному уравнению

$$\begin{aligned}
 \alpha^4(A_{12}\rho_{12}\eta^2 + 1)(A_{34}\rho_{34}\eta^2 + 1) - \alpha^2\eta^2(K\eta^4 + L\eta^2 + M) + \\
 + \rho_{13}\rho_{24}\eta^4(N\eta^4 + P\eta^2 + A_{13}A_{24}) = 0,
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

в котором использованы обозначения

$$\begin{aligned}
 K &= \rho_{12}\rho_{34}\bar{K}, \\
 \bar{K} &= \rho_{13}(A_{12}A_{13}A_{34} - A_{34}\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_1 B_1^2 - A_{12}\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_2 B_3^2) + \\
 &+ \rho_{24}(A_{12}A_{24}A_{34} - A_{34}\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_1 B_2^2 - A_{12}\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_2 B_4^2), \\
 L &= \rho_{12}\rho_{13}A_{12}A_{13} + \rho_{12}\rho_{24}A_{12}A_{24} + \rho_{13}\rho_{34}A_{13}A_{34} + \\
 &+ \rho_{24}\rho_{34}A_{24}A_{34} - \rho_{12}\rho_{13}\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_1 B_1^2 - \rho_{12}\rho_{24}\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_1 B_2^2 - \\
 &- \rho_{13}\rho_{34}\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_2 B_3^2 - \rho_{24}\rho_{34}\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_2 B_4^2,
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
 M &= \rho_{13}A_{13} + \rho_{24}A_{24}, \quad N = \rho_{12}\rho_{34}\bar{N}, \\
 \bar{N} &= A_{12}A_{13}A_{24}A_{34} - A_{24}A_{34}\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_1 B_1^2 - A_{13}A_{34}\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_2 B_2^2 - \\
 &A_{12}A_{24}\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_2 B_3^2 - A_{12}A_{13}\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_2 B_4^2 + (B_1B_4 - B_2B_3)^2\varepsilon_1\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_2, \\
 P &= A_{12}A_{13}A_{24}\rho_{12} + A_{13}A_{24}A_{34}\rho_{34} - A_{24}\rho_{12}\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_1 B_1^2 - \\
 &- A_{13}\rho_{12}\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_1 B_2^2 - A_{24}\rho_{34}\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_2 B_3^2 - A_{13}\rho_{34}B_4^2\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_2.
 \end{aligned}$$

Решения уравнения (3.5) представляется равенствами

$$\alpha_{1,2}^2 = \eta^2 \left[ K\eta^4 + L\eta^2 + M \pm \sqrt{D} \right] \left[ 2(A_{12}\rho_{12}\eta^2 + 1)(A_{34}\rho_{34}\eta^2 + 1) \right]^{-1}, \tag{3.7}$$

в которых

$$D = (K\eta^4 + L\eta^2 + M)^2 - 4\rho_{13}\rho_{24}(1 + A_{12}\rho_{12}\eta^2)(1 + A_{34}\rho_{34}\eta^2)(N\eta^4 + P\eta^2 + A_{13}A_{24}). \quad (3.8)$$

В соответствии с решениями (3.7) и с соотношениями (3.3) выразим смещение  $u_x^{(1,2)}$  формулой

$$U_x^{(1,2)} = \int_0^\infty \frac{e^{ikx} dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{kt\eta} \left[ U_{x_1}^{(1,2)+} e^{kz\alpha_1} + U_{x_1}^{(1,2)-} e^{-kz\alpha_1} + U_{x_2}^{(1,2)+} e^{kz\alpha_2} + U_{x_2}^{(1,2)-} e^{-kz\alpha_2} \right] d\eta. \quad (3.9)$$

Аналогичные выражения могут быть записаны и для остальных смещений  $u_x^{(3,4)}$ ,  $u_z^{(1,3)}$ ,  $u_z^{(2,4)}$  и напряжений  $t_{xx}^{(1,2)}$ ,  $t_{xx}^{(3,4)}$ ,  $t_{zz}^{(1,3)}$ ,  $t_{zz}^{(2,4)}$ . Входящие в равенство (3.9) и другие аналогичные соотношения коэффициенты при  $\exp(\pm kz\alpha_i)$  являются неопределенными. Для их нахождения необходимо предварительно исследовать выражение (3.7) для  $\alpha_{1,2}^2$ . Эти формулы имеют на плоскости  $\eta$  8 точек ветвления, которые удовлетворяют уравнению

$$D(\eta) = 0. \quad (3.10)$$

При обходе каждой из этих точек величина  $\alpha_1$  переходит в  $\alpha_2$ , а  $\alpha_2$  - в  $\alpha_1$ . Точки ветвления симметричны относительно координатных осей. На положительной части вещественной оси расположено четное число точек ветвления, т.е. или 0, или 2, или 4. В этом легко убедиться, если использовать соотношения

$$D(0) = (\rho_{13}A_{13} - \rho_{24}A_{24})^2, \\ D(\eta) = [\bar{K}^2 + 4\rho_{13}\rho_{24}\varepsilon_1\varepsilon_2(A_{34}\tilde{\varepsilon}_1B_1B_2 + A_{12}\tilde{\varepsilon}_2B_3B_4)^2] \rho_{12}^2 \rho_{34}^2 \eta^8, \quad (3.11)$$

при этом второе равенство (3.11) выполняется при достаточно больших  $|\eta|$  и в нем использовано обозначение

$$\bar{K}^2 = [\rho_{13}(A_{12}A_{13}A_{34} - A_{34}\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_1B_1^2 - A_{12}\varepsilon_1\tilde{\varepsilon}_2B_3^2) - \rho_{24}(A_{12}A_{24}A_{34} - A_{34}\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_1B_2^2 - A_{12}\varepsilon_2\tilde{\varepsilon}_2B_4^2)]^2. \quad (3.12)$$

Также четное число точек ветвления расположено в каждой из трех областей: в правой полуплоскости, на мнимой оси и в левой

полуплоскости. Для однозначности функций (3.7) соединим прямыми разрезами точки ветвления в каждой из указанных областей и фиксируем основной лист условиями, что в формулах (3.7) при малых и больших  $|\eta|$  квадратный корень является арифметическим.

Выражения для  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , полученные после извлечения квадратного корня из обеих частей равенств (3.7), имеют дополнительные точки ветвления, в которых  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  или обращаются в нуль, или становятся бесконечными. Для нахождения этих точек полезно использовать формулу

$$\alpha_1^2 \alpha_2^2 = \frac{(N\eta^4 + P\eta^2 + A_{13}A_{24})\rho_{13}\rho_{24}\eta^4}{(1 + A_{12}\rho_{12}\eta^2)(1 + A_{34}\rho_{34}\eta^2)}, \quad (3.13)$$

записанную на основании теоремы Виета, примененной к уравнению (3.5). Из равенства (3.13) следуют формулы

$$\eta = \pm i \sqrt{\frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4A_{13}A_{24}N}}{2N}},$$

$$\eta = \pm i / \sqrt{A_{12}\rho_{12}}, \quad \eta = \pm i / \sqrt{A_{34}\rho_{34}} \quad (3.14)$$

для дополнительных точек ветвления. Все выражения (3.14) являются чисто мнимыми и в этом легко убедиться, если использовать соотношение

$$P^2 - 4A_{13}A_{24}\rho_{12}\rho_{34} = p^2 + 4\rho_{12}\rho_{34}\tilde{\epsilon}_1\tilde{\epsilon}_2(A_{24}B_1B_3\epsilon_1 + A_{13}B_2B_4\epsilon_2)^2, \quad (3.15)$$

в котором

$$\tilde{P}^2 = [\rho_{12}(A_{12}A_{13}A_{24} - A_{24}\epsilon_1\tilde{\epsilon}_1B_1^2 - A_{13}\epsilon_2\tilde{\epsilon}_1B_2^2) - \rho_{34}(A_{13}A_{24}A_{34} - A_{24}\epsilon_1\tilde{\epsilon}_2B_3^2 - A_{13}\epsilon_2\tilde{\epsilon}_2B_4^2)]^2. \quad (3.16)$$

Для однозначности радикалов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  проведем из точек ветвления (3.14) разрезы в левую полуплоскость параллельно вещественной оси и предположим, что на основном листе  $\alpha_1 > 0$  и  $\alpha_2 > 0$  при  $\eta = 0$ .

Из равенства (3.7) с учетом выбора основного листа следуют асимптотические соотношения

$$\alpha_{1,2} = \eta \sqrt{\frac{\bar{K} \pm \sqrt{\bar{K}^2 - 4A_{12}A_{34}\rho_{13}\rho_{24}\bar{N}}}{2A_{13}A_{34}}} \quad (3.17)$$

при больших  $|\eta|$ . Так как подкоренное выражение внутреннего радикала выражается формулой

$$\begin{aligned} \bar{K}^2 - 4\rho_{13}\rho_{24}A_{12}A_{34}\bar{N} = \\ = \bar{k}^2 + 4\epsilon_1\epsilon_2\rho_{13}\rho_{24}(A_{34}\bar{\epsilon}_1B_1B_2 + A_{12}\bar{\epsilon}_2B_3B_4), \end{aligned} \quad (3.18)$$

то входящие в соотношения (3.17) внешние радикалы являются положительными. Отсюда следует, что в формуле (3.9) и в аналогичных выражениях первое и третье слагаемые описывают волны, распространяющиеся от источника в стороны меньших  $z$ , а остальные слагаемые характеризуют волны, идущие в обратном направлении. Чтобы удовлетворить нулевым начальным данным (3.2) необходимо в области  $z < 0$  отбросить в формуле (3.9) и в аналогичных равенствах вторые и четвертые члены, а при  $z > 0$ , наоборот, сохранить только эти члены.

Для нахождения функций  $U_{x_1}^{(1,2)\pm}$ ,  $U_{x_2}^{(1,2)\pm}$  и аналогичных им величин нужно представить правые части равенств (3.1) в виде интегралов Фурье и Меллина и использовать уравнения (1.10) и (1.11), связывающие смещения и напряжения. Поскольку явные выражения всех указанных величин в настоящей работе не будут использоваться, то для краткости изложения явные выражения этих величин не приводятся. Отметим только, что отдельные слагаемые в выражении (3.9) имеют точки ветвления, удовлетворяющие уравнению (3.10), а сумма всех слагаемых регулярна в этих точках.

#### § 4. ПОСТРОЕНИЕ ФРОНТОВ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ВОЗБУЖДЕННОМ ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ.

Если в решении, представленном равенствами (3.5)–(3.9), вычислить с помощью метода перевала интегралы Меллина, а затем записать условия особенности внешнего интеграла, то придем, как и в работе [7], к параметрическим соотношениям

$$x = t \left( \tau - \frac{\bar{\alpha}(\tau)}{\bar{\alpha}'(\tau)} \right), \quad z = \frac{t}{\bar{\alpha}'(\tau)}, \quad (4.1)$$

определяющим фронты волн. Входящий в равенства (4.1) параметр  $\tau = \text{Im} \eta$  относится к тем участкам положительной части мнимой оси, где величина  $\alpha(\eta) = i\bar{\alpha}(\tau)$  - чисто мнимая и  $\bar{\alpha}(\tau) \geq 0$ . Функция  $\bar{\alpha}(\tau)$  определяется также с помощью равенства

$$\bar{\alpha}(\tau) = \text{ctg}(n, z), \quad (4.2)$$



где  $(n, z)$  – угол между нормалью к фронту и осью  $z$ . Если учесть, что уравнения эффективной модели являются уравнениями гиперболического типа и описывают распространение фронтов волн только с конечными скоростями, то для выполнения этого уравнения необходимо, согласно равенствам (4.1), положить  $\bar{\alpha}'(\tau) \neq 0$ . Это условие при использовании явных выражений функций  $\bar{\alpha}(\tau)$  заменяется неравенством

$$\bar{\alpha}'(\tau) > 0. \quad (4.3)$$

Выпуклость или вогнутость фронтов определяется второй производной  $\bar{\alpha}''(\tau)$  с помощью соотношения

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{(\bar{\alpha}')^3}{i\bar{\alpha}''}, \quad (4.4)$$

полученного в работе [4]. Если  $\bar{\alpha}''(\tau) > 0$ , то фронт вогнутый, а в случае  $\bar{\alpha}''(\tau) = 0$ , как правило, выпуклость (вогнутость) фронта заменяется на вогнутость (выпуклость).

Проведем исследование функций  $\bar{\alpha}_{1,2}(\tau)$  на мнимой оси и на основании этих исследований установим примерное положение фронтов в полупространстве, возбужденном точечным источником. Функции  $\bar{\alpha}_{1,2}^2(\tau)$ , согласно формулам (3.7), представляются соотношениями

$$\bar{\alpha}_{1,2}^2 = \frac{\tau^2(K\tau^4 - L\tau^2 + M \pm \sqrt{D})}{2(1 - A_{12}\rho_{12}\tau^2)(1 - A_{34}\rho_{34}\tau^2)}, \quad (4.5)$$

в которых  $\sqrt{D}$  – арифметический корень величины (3.8). При малых  $\tau$  эти функции выражаются приближенными равенствами

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 &= \tau \max(\sqrt{\rho_{13}A_{13}}, \sqrt{\rho_{24}A_{24}}), \\ \bar{\alpha}_2 &= \tau \min(\sqrt{\rho_{13}A_{13}}, \sqrt{\rho_{24}A_{24}}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Значениям  $\tau = 0$ , согласно формулам (4.1) и (4.2), соответствуют общие точки фронтов и оси  $z$ . В этих точках фронт касается оси  $z$ , и эти точки движутся вдоль оси  $z$  со скоростями

$$\begin{aligned} v_6 &= \max\left[(\rho_{13}A_{13})^{-1/2}, (\rho_{24}A_{24})^{-1/2}\right], \\ v_8 &= \min\left[(\rho_{13}A_{13})^{-1/2}, (\rho_{24}A_{24})^{-1/2}\right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

В случае больших  $\tau$  функции  $\alpha_{1,2}$  представляются асимптотическими соотношениями (3.17). Значениям  $\tau = \infty$  соответствуют

точки пересечения под прямым углом фронтов с осью  $z$ . Скорости перемещения этих точек определяются равенствами

$$v_{5,7} = \sqrt{\frac{\bar{K} \pm \sqrt{\bar{K}^2 - 4\rho_{13}\rho_{24}A_{12}A_{34}N}}{2\rho_{13}\rho_{24}\bar{N}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\bar{K} \pm \sqrt{\bar{K}^2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2\rho_{13}\rho_{24}(A_{12}\bar{\varepsilon}_2B_3B_4 + A_{34}\bar{\varepsilon}_1B_1B_2)^2}}{2\rho_{13}\rho_{24}\bar{N}}}. \quad (4.8)$$

Функции  $\bar{\alpha}(\tau)$  и  $\bar{\alpha}_2(\tau)$  имеют два корня

$$\tau = v_{1,3} = \sqrt{\frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4A_{13}A_{24}\rho_{12}\rho_{34}\bar{N}}}{2\rho_{12}\rho_{34}\bar{N}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{P \pm \sqrt{\bar{P}^2 + \bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2(\varepsilon_1A_{24}B_1B_3 + \varepsilon_2A_{13}B_2B_4)^2}}{2\rho_{12}\rho_{34}\bar{N}}}, \quad (4.9)$$

при этом в каждой точке (4.9) в нуль обращается только одна из функций. Корням (4.9) соответствуют точки пересечения под прямым углом фронтов и оси  $x$ . Скорости движения этих точек равны  $v_1$  и  $v_3$ . Точки

$$\tau = (A_{12}\rho_{12})^{-1/2}, \quad \tau = (A_{34}\rho_{34})^{-1/2} \quad (4.10)$$

являются полюсами одной из функций  $\bar{\alpha}_1(\tau)$  и  $\bar{\alpha}_2(\tau)$ . Этим полюсам соответствуют точки касания фронтов с осью  $x$ . Скорости указанных точек касания  $v_2$  и  $v_4$  представляются равенствами

$$v_2 = \max \left[ (A_{12}\rho_{12})^{-1/2}, (A_{34}\rho_{34})^{-1/2} \right], \quad (4.11)$$

$$v_4 = \min \left[ (A_{12}\rho_{12})^{-1/2}, (A_{34}\rho_{34})^{-1/2} \right].$$

Кроме найденных четырех общих точек фронтов и каждой из координатных осей, других таких точек не существует, если функция  $D$  не имеет корней на мнимой оси. При этом условии в эффективной модели распространяются четыре пространственных волны. Для их детального исследования выясним расположение скоростей вдоль каждой оси по их величине. С помощью довольно длинных преобразований удастся доказать:

$$v_1 = \max(v_1, v_2, v_3, v_4), \quad v_5 = \max(v_5, v_6, v_7, v_8),$$

$$v_4 = \min(v_1, v_2, v_3, v_4), \quad v_8 = \min(v_5, v_6, v_7, v_8). \quad (4.12)$$

Следствиями соотношений (4.7)–(4.9), (4.11) и (4.12) являются неравенства

$$\begin{aligned} v_1 > v_2 > v_4, & \quad v_1 > v_3 > v_4, \\ v_5 > v_6 > v_8, & \quad v_5 > v_7 > v_8, \end{aligned} \quad (4.13)$$

определяющие расположение скоростей вдоль осей по их величине.

Построим теперь примерные графики функций  $\bar{\alpha}_{1,2}(\tau)$ . При этом построении естественно рассмотреть два случая. В том случае, когда каждая из функций  $\bar{\alpha}_1(\tau)$  и  $\bar{\alpha}_2(\tau)$  имеет по одному корню и полюсу, графики представляются на рис. 2. В другом случае у одной функции два полюса и два корня, а другая не содержит ни корней, ни полюсов. Графики этих функций изображаются на рис. 3 и 4. Для уточнения построенных графиков удастся доказать неравенства

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{1,2}''(\tau) > 0 & \quad \text{при малых } \tau, \\ \bar{\alpha}_{1,2}''(\tau) < 0 & \quad \text{при больших } \tau. \end{aligned} \quad (4.14)$$

На рис. 2–4 штриховыми линиями показаны касательные и асимптоты, а жирными точками изображены точки перегиба.

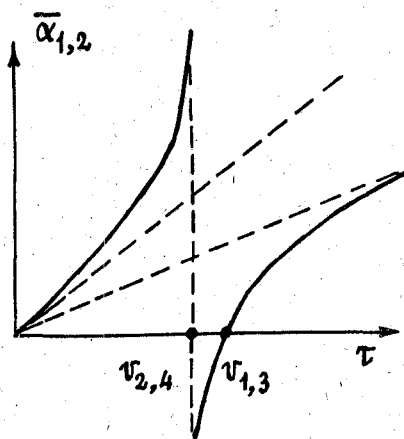


Рис. 2

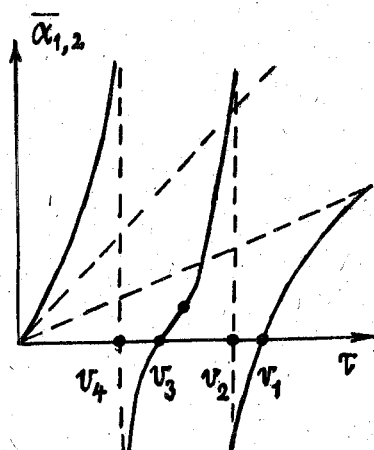


Рис. 3.

Построим с помощью формул (4.1) фронты волн от точечного источника в полупространстве, описываемом уравнениями рассматриваемой эффективной модели. Если графики функций  $\bar{\alpha}_{1,2}(\tau)$  изображаются на рис. 2, фронты представляются на рис. 5 или 6.

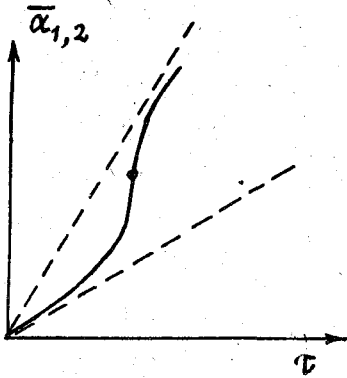


Рис. 4

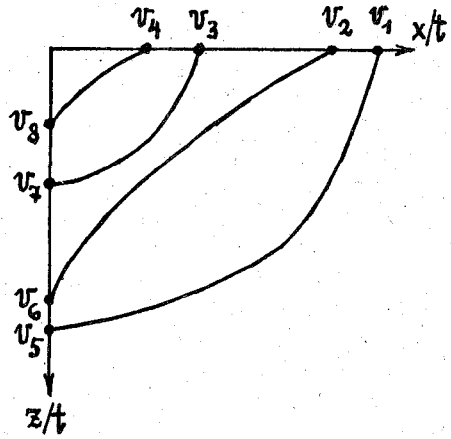


Рис. 5.

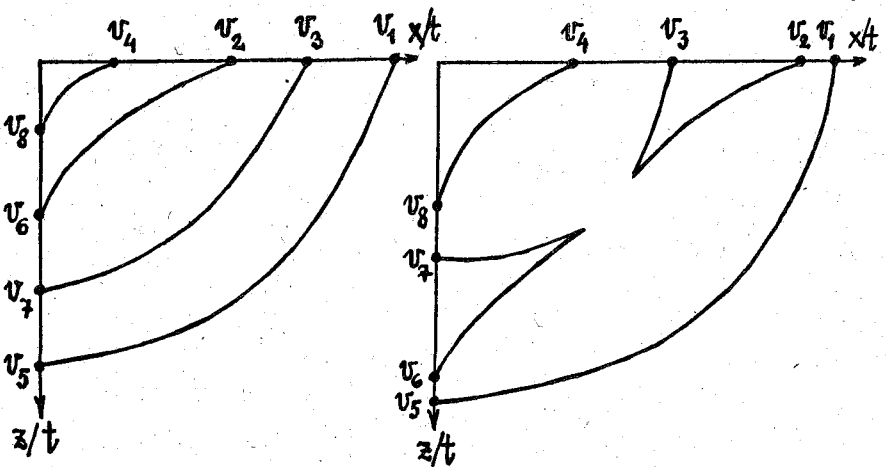


Рис. 6

Рис. 7.

Выпуклые фронты на этих рисунках соответствуют интервалам  $\tau \geq v_{1,3}$ , а вогнутые фронты - промежуткам  $0 \leq \tau < v_{2,4}$ . Касательные к графикам, проведенные из начала координат, имеют угловые коэффициенты  $v_{6,8}^{-1}$ , а асимптоты, к которым приближа-

ются графики при больших  $\tau$ , характеризуются угловыми коэффициентами  $v_{5,7}^{-1}$ . Случай, изображенный на рис. 5, соответствует определенным параметрам эффективной среды. Случай же, представленный на рис. 6, не противоречит установленным свойствам фронтов, однако поскольку при проведенных численных исследованиях он не осуществляется, то, возможно, этот случай никогда не реализуется.

Если функции  $\bar{\alpha}_{1,2}(\tau)$  имеют графики, изображенные на рис. 3 и 4, то фронты представляются на рис. 7. Интервалу  $0 \leq \tau < v_4$  также соответствует вогнутый фронт, распространяющийся вдоль осей со скоростями  $v_4$  и  $v_8$ . Треугольный фронт со скоростями  $v_2$  и  $v_3$  вдоль оси  $x$  (рис. 7) описывается графиком на промежутке  $v_3 \leq \tau < v_2$  (рис. 3), при этом указанная на графике точка перегиба отвечает острию на этом фронте (рис. 7). Передний фронт связан с интервалом  $\tau > v_1$ . Наконец, графику на рис. 4 соответствует другой треугольный фронт со скоростями  $v_6$  и  $v_7$  вдоль оси  $z$  (рис. 7). Угловые коэффициенты касательных и асимптот, проведенных на рис. 3 и 4, имеют тот же геометрический смысл, как и в случае рис. 2.

Таким образом, в рассматриваемой четырехфазной эффективной среде распространяются четыре объемных волны. Две скорости распространения волн вдоль каждой из осей  $v_2, v_4, v_6$  и  $v_8$  представляют собой осредненные пластинчатые скорости. Фронты этих волн касаются осей. Остальные скорости  $v_1, v_3, v_5$  и  $v_7$  связаны с обобщенными продольными волнами, фронты которых перпендикулярны осям. Фронты на рис. 5-7 и графики функции  $\bar{\alpha}_{1,2}(\tau)$  на рис. 2-4 соответствуют случаю, когда уравнение (3.10) не имеет мнимых корней. Если же у уравнения (3.10) существуют мнимые корни, то фронты волн имеют петли и форма фронтов оказывается более сложной.

В заключение рассмотрим частный случай, когда среды 1 и 2 характеризуются одинаковыми параметрами и одинаковые параметры имеют среды 3 и 4. В этом случае выполняются соотношения

$$A_{12} = A_1, A_{34} = A_3, \rho_{12} = \rho_1, \rho_{34} = \rho_3, A_{13} = A_{24}, \rho_{13} = \rho_{24} \quad (4.15)$$

и с их использованием формулы (4.15) переходят в равенства

$$\bar{\alpha}_1^2 = \frac{(N\tau^4 - P\tau^2 + A_{13}^2)\rho_{13}\tau^2}{A_{13}(A_1\rho_1\tau^2 - 1)(A_3\rho_3\tau^2 - 1)},$$

$$\bar{\alpha}^2 = \rho_{13}A_{13}\tau^2. \quad (4.16)$$

Первое соотношение (4.16) соответствует формуле (4.5) работы [4]. График функции иллюстрируется на рис. 3. Эта функция, как и в общем случае, описывает, согласно равенствам (4.1), изображенные на рис. 7 выпуклый и вогнутый фронты, а также треугольный фронт, примыкающий к оси  $x$ . Другой треугольный фронт в рассматриваемом частном случае сжимается в точку  $x = 0$ ,  $z = v_8 t$ , которая лежит на вогнутом фронте (рис. 7). В этом легко убедиться, если доказать соотношения

$$v_6 = v_7 = v_8 = (A_{13}\rho_{13})^{-1/2}. \quad (4.17)$$

Скорость  $v_5$  представляется равенством

$$v_5 = \sqrt{\frac{A_1 A_3}{\rho_{13}(A_1 A_3 A_{13} - \tilde{\epsilon}_1 A_3 B_1^2 - \tilde{\epsilon}_2 A_1 B_3^2)}}, \quad (4.18)$$

а скорости  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  и  $v_4$  выражаются по прежнему соотношениями (4.9) и (4.11), при этом величины  $P$  и  $\bar{N}$  даются формулами

$$\begin{aligned} P &= A_{13} [\tilde{\epsilon}_1 \rho_1 (A_1^2 - B_1^2) + \tilde{\epsilon}_2 \rho_3 (A_3^2 - B_3^2) + \tilde{\epsilon}_1 A_1 \rho_3 + \tilde{\epsilon}_2 A_1 A_3 \rho_1], \\ \bar{N} &= A_{13} [\tilde{\epsilon}_1 A_3 (A_1^2 - B_1^2) + \tilde{\epsilon}_2 A_1 (A_3^2 - B_3^2)]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Указанные выражения для пяти скоростей полностью соответствуют формулам (4.6), (4.9) и (4.18) работы [4]. Такое же соответствие имеет место и между уравнениями эффективных моделей работы [4] и рассматриваемого частного случая.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-16148).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ 89 (1979), 219–233, — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 10.
2. Л. А. Молотков, *Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах*. Л..
3. Л. А. Молотков, *О новом способе вывода уравнений осредненной эффективной модели периодических сред*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ 195 (1991), 82–102, — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 21.
4. Л. А. Молотков, *Об эффективной модели, описывающей слоистую периодическую упругую среду с контактами проскальзывания на границах*. — Зап. научн. семин. ПОМИ 210 (1994), 194–214, — В кн.: Математические вопросы теории распространения теории волн. 23.
5. T. J. Plona, K. W. Winkler, M. Schoenberg, *Acoustic waves in alternating fluid/solid layers*. — J. Acoust. Soc. Am. 81 No.5 (1987), 1227–1234.

6. K. D. Mahrer, F. J. Mauk, *Seismic wave motion for a new model of hydraulic fracture with an induced low velocity zone.* — J. Geophys. Res. 92 No.9 (1987), 9293–9309.
7. Л. А. Молотков, А. Е. Хило, *Исследование однофазных и многофазных эффективных моделей, описывающих периодические среды.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ 140 (1984), 105–122, — В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 14.

Molotkov L. A. On the effective model of elastic block medium with slide contact on interfaces.

The considered system consists of equal rectangle blockes. The each block contains four homogene elastic isotropic media with slide contact on interfaces between media. For this system the effective fourphase model is deduced. On the base of investigation of the effective model equations the fronts and the velocities along axes are determined.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 мая 1994 г.