А. Н. Лившиц, О построении марковских компактов, *Алгебра и анализ*, 1991, том 3, выпуск 1, 165–175

Алгебра и анализ
Том 3 (1991), вып. 1

О ПОСТРОЕНИИ МАРКОВСКИХ КОМПАКТОВ

А. Н. Лившиц

Предлагается метод построения реализации произвольного эргодического автоморфизма пространства Лебега адическим преобразованием некоторого марковского компакта. Метод основан на использовании символического представления автоморфизма. Предлагается также использование подобных иерархических структур для изучения периодических траекторий динамических систем.

Введение

Имеются два важных комбинаторных подхода к изучению топологических и метрических свойств динамических систем. Первый состоит в использовании образующих и построении эквивалентных символических динамических систем. Второй — предложен недавно [3, 4] для целей метрической теории и теории операторных алгебр и заключается в построении так называемых адических реализаций. Он оказывается полезным при изучении аппроксимационных, спектральных и иных свойств динамических систем [3, 4, 6, 7].

Реализация произвольного эргодического автоморфизма пространства Лебега с вероятностной инвариантной мерой адическим преобразованием марковского компакта осуществлена в работе [4]. С использованием прямой аппроксимационной техники для произвольной плотной инвариантной алгебры измеримых множеств и фиксированной возрастающей к ε последовательности разбиений на множества из этой алгебры А. М. Вершик предложил явный метод построения аппроксимирующих башен и согласованного с алгеброй марковского компакта.

В данной работе предлагается некий канонический метод построения адической реализации символической динамической системы. Поскольку, как легко увидеть, проанализировав доказательство утверждения 10.12 из [8], с.38, автоморфизм имеет счетную образующую с элементами из рассматриваемой в [4] алгебры, мы получаем новый вариант согласованного с алгеброй компакта.

Приводимая здесь конструкция явно связывает марковский компакт с символическим представлением. Множество всех символических систем разбивается на классы, для каждого из которых строится универсальный компакт.

Такое описание динамической системы двумя способами, как это видно на примере подстановочных символических систем [7, 9], должно облегчить

Ключевые слова: минимальная динамическая система, образующая, адическое преобразование, марковский компакт, периодическая точка.

изучение не только аппроксимационных, но также комбинаторных, энтропийных и спектральных свойств. Оно способствует применению в аппроксимационной и траекторной теориях методов символической динамики.

В доказательстве наряду с методами метрической теории (построение последовательности специальных автоморфизмов подобно [4] и пр.) используются методы топологической динамики и кодирования.

Приведем определение марковского компакта (без кратных дуг) и адического преобразования (на основе [4]).

Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — последовательность натуральных чисел, $D_1, D_2, \ldots,$ — последовательность множеств (пространств состояний); пусть число элементов в D_i равно r_i. Пусть, далее $M_1, M_2, \ldots$ — последовательность $r_i \times r_{i+1}$-матриц из нулей и единиц (матриц перехода):

$$M_i = (m^i_{uv})_{u\in D_i, v\in D_{i+1}}; \quad m^i_{uv} = M_i(u,v) \in \{0,1\}.$$

Марковским компактом называется пространство $\mathcal{Y}$ путей, т.е. последовательностей $\{x_1, x_2, \ldots\}$, $x_i \in D_i$, таких, что $m^i_{x_i x_{i+1}} = 1$ для всех i, снабженное слабой (адической) топологией.

Введем две функции $L, B : \bigcup\limits_{i=2}^{\infty} D_i \to \{0, 1, \ldots\}$ следующим образом: если $x \in D_i$, то $L(x)$ есть число таких $u \in D_{i-1}$, что $m^{i-1}_{ux} = 1$, а $B(x)$ — число таких последовательностей $x_1, \ldots, x_i$, что $m^j_{x_j x_{j+1}} = 1$ при $1 \leqslant j \leqslant i-1$ и $x_i = x$.

Предъявим к $\mathcal{Y}$ (к последовательности M_i) дополнительное требование отсутствия адически изолированных точек (т.е. таких последовательностей $(x_1, \ldots, x_i, \ldots) \in \mathcal{Y}$, что $L(x_i) = 1$ при $i > 1$ для некоторого I). Легко видеть, что этому эквивалентно следующее требование:

$$\lim_{i\to\infty} \min_{x\in D_i} B(x) = \infty.$$

Марковский компакт назовем *минимальным*, если для любого $i > 0$ и любого $x \in D_i$ существует j такое, что для любого $y \in D_j$ существует путь $(x_1, x_2, \ldots) \in \mathcal{Y}$ с $x_i = x$ и $x_j = y$.

Эквивалентное определение таково: существует последовательность $k_1 < k_2 \ldots$, для которой матрицы $M_{k_i} M_{k_i+1} \ldots M_{k_{i+1}-1}$ не имеют нулевых элементов при $i = 1, 2, \ldots$ (см. предложение 2 из [4]).

Минимальный марковский компакт заведомо не имеет адически изолированных точек.

Предположим теперь, что в каждом D_i элементы пронумерованы натуральными числами от 1 до r_i и каждое D_i соответственно тому упорядочено.

Введем частичное упорядочение $\succ$ на $\mathcal{Y}$: $(x_1, x_2, \ldots) \succ (y_1, y_2, \ldots)$, если $x_I > y_I$ для некоторого I и $x_i = y_i$ при $i > I$.

Определим *адическое преобразование* U марковского компакта $\mathcal{Y}$, несколько конкретизируя определения на точечном уровне для лучшего понимания дальнейшего. Пусть $K_1(\mathcal{Y}, \succ)$ — множество максимальных элементов в $\mathcal{Y}$ ([2], с.144), $K_2(\mathcal{Y}, \succ)$ — множество минимальных элементов. Оба эти множества могут быть конечными, счетными, континуальными и иметь мощности, между собой различающиеся.

Пусть, например: $r_i = 2^i + 1$; $D_i = \{a^i_1, \ldots, a^i_{2^i}, b_i\}$ и b_i — наибольшее в D_i; $L(a^i_s) = 2$; $M_{i-1}(b_{i-1}, a^i_s) = M_{i-1}(a^{i-1}_\sigma, a^i_s) = 1$ при $\sigma = s \mod 2^{i-1}$; $i \geq 2$, $s =$

$1, \dots, 2^i$. Тогда K_2 континуально. Если дополнительно потребовать, чтобы $L(b_i) = 2^{i-1} + 1$; $i \geq 2$, то компакт $\mathcal{Y}$ будет минимален и K_1 одноточечно.

Если $x \in \mathcal{Y} \setminus K_1$, то существует $y \succ x$ такое, что если $z \succ x$, то $z \succeq y$. Положим $Ux = y$; аналогично определяем U^{-1} на $\mathcal{Y} \setminus K_2$, (поскольку адически изолированные точки отсутствуют, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$). На инвариантном множестве $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \setminus (\bigcup_{i=0}^{\infty} U^{-1}K_1 \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} U^i K_2)$ преобразования U и U^{-1} определены и взаимно-однозначны; $U\mathcal{Y}' = U^{-1}\mathcal{Y}' = \mathcal{Y}'$. Если компакт $\mathcal{Y}$ минимален, то все траектории и полутраектории всюду плотны (см. также [7]).

Борелевская вероятностная мера μ на $\mathcal{Y}$, инвариантная относительно U, называется центральной. Имеем $\mu(K_1) = \mu(K_2) = 0$.

Определим теперь понятие *марковского множества*. Для этого в определении пространства $\mathcal{Y}$ разрешим r_i принимать значение $+\infty$, но потребуем от матриц M_i, чтобы функция L (и соответственно B) принимала лишь конечные значения. Упорядочение $\succ$, множества K_1, K_2, адическое преобразование и центральная мера определяются так же. Переносится на этот случай и первое из определений минимальности. Такое понятие само по себе вполне удовлетворительно для нужд метрической теории.

Обратимся к символическому представлению. Пусть $Z = \{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетный алфавит, $X_Z = \prod_{i=-\infty}^{\infty} Z_i$ с $Z_i = Z$ — пространство двусторонних последовательностей [1, 8] со слабой топологией, $T : X_Z \to X_Z$ — сдвиг, μ — недискретная борелевская вероятностная мера, инвариантная относительно T и эргодическая (в дальнейшем — НБВИЭ-мера).

Через $\mathrm{Cyl}(\mu)$ обозначим множество всех слов над Z, которым соответствуют цилиндры положительной меры. Множество слов $\mathcal{A}$ назовем Cyl-*множеством*, если существует НБВИЭ-мера μ', для которой $\mathcal{A} = \mathrm{Cyl}(\mu')$ (все такие меры будем называть $\mathcal{A}$-*мерами*). Через $X_Z^{\mathcal{A}}$ обозначим борелевское инвариантное подмножество пространства X_Z, состоящее из всех последовательностей, в которых слова, не принадлежащие $\mathcal{A}$, вообще не встречаются, а слова из $\mathcal{A}$ встречаются с ненулевыми в обе стороны плотностями ([5], с.11). (Иначе говоря, $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ принадлежит $X_Z^{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда $x_{-i} \dots x_0 \dots x_i \in \mathcal{A}$, $i \geq 1$, и для каждого слова $B \in \mathcal{A}$: если $\dots - j_n^B < -j_{n-1}^B < \dots < -j_1^B \leqslant 0 < i_1^B < i_2^B < \dots$ — множество всех номеров, с которых начинаются вхождения слова B в $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, то последовательности $1 \cup \{i_n^B\}_{n=1}^{\infty}$ и $1 \cup \{j_n^B\}_{n=1}^{\infty}$ имеют положительные плотности).

Заметим, что если НБВИЭ-мера μ'' сосредоточена на некотором компактном инвариантном строго эргодическом множестве $M \subset X_Z$ и $\mathcal{A}'' = \mathrm{Cyl}(\mu'')$, то $X_Z^{\mathcal{A}''} = M$.

Мы докажем, что для любого Cyl-множества $\mathcal{A}$ существуют минимальный марковский компакт $\mathcal{Y}^{\circ\mathcal{A}}$ с пространствами состояний $\mathcal{D}_1^{\mathcal{A}}, \mathcal{D}_2^{\mathcal{A}}, \dots$, переходными матрицами $M_1^{\mathcal{A}}, M_2^{\mathcal{A}}, \dots$ и адическим преобразованием $U^{\circ\mathcal{A}}$, борелевское множество $X_Z''^{\mathcal{A}} \subset X_Z^{\mathcal{A}}$ полной меры (для всякой $\mathcal{A}$-меры) и борелевское инъективное отображение $f'_{\mathcal{A}} : X_Z''^{\mathcal{A}} \to \mathcal{Y}^{\circ\mathcal{A}}$ такие, что

$$U^{\circ\mathcal{A}} \circ f'_{\mathcal{A}} = f'_{\mathcal{A}} \circ T,$$

и прообразы цилиндрических множеств являются множествами положительной меры ν для любой $\mathcal{A}$-меры ν. Это утверждение составляет содержание теоремы 2.

Упрощенный вариант основной конструкции содержится в доказательстве теоремы 1 о существовании (минимального) марковского множества $\mathcal{Y}^{\mathcal{A}}$ с пространствами состояний $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$, матрицами перехода $M_1, M_2 \ldots$ и адическим преобразованием $U^{\mathcal{A}}$, подмножества $X_Z'^{\mathcal{A}} \subset X^{\mathcal{A}}$ и отображения $f_{\mathcal{A}} : X_Z'^{\mathcal{A}} \to \mathcal{Y}^{\mathcal{A}}$ с такими же свойствами.

Тройку $(X_Z''^{\mathcal{A}}, f_{\mathcal{A}}', \mathcal{Y}^{\circ\mathcal{A}})$ назовем *марковским $\mathcal{A}$-компактом*, а тройку $(X_Z', f_{\mathcal{A}}, \mathcal{Y}^{\mathcal{A}})$ — *марковским $\mathcal{A}$-множеством*.

В конце статьи приводится пример применения подобных конструкций для изучения периодических траекторий символических динамических систем.

При подготовке работы полезны были обсуждения теории адических преобразований с А. М. Вершиком, которому автор выражает благодарность.

§ 1. Марковские множества

Теорема 1. *Для любого* Cyl-*множества $\mathcal{A}$ существует марковское $\mathcal{A}$-множество* $(X_Z'^{\mathcal{A}}, f_{\mathcal{A}}, \mathcal{Y}^{\mathcal{A}})$.

Доказательство. Выберем некоторое натуральное s с $z_s \in \mathcal{A}$ и пронумеруем произвольным образом все слова из $\mathcal{A}$ вида $\underbrace{z_s \ldots z_s}_{m \text{ раз}} z_{i_1} \ldots z_{i_k}$ с $m, k > 0$ и $i_1, \ldots, i_k \neq s$. Пусть перечень таких слов есть $\{B_j\}_{j=1}^{h_1'}$; $h_1' \leqslant \infty$. Тогда для всякой последовательности $x = (\ldots, z_{i_{-k}}, \ldots, z_{i_{-1}}, z_{i_0}, z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}, \ldots)$ из $X_z^{\mathcal{A}}$ существует и единственна такая строго возрастающая двусторонняя бесконечная последовательность целых чисел $\ldots n_{-k} < n_{-k+1} < \cdots < n_0 \leqslant 0 < n_1 < \cdots < n_k < \ldots$, что для каждого целого k существует j_k такое, что

$$z_{i_{n_k}} z_{i_{n_k+1}} \ldots z_{i_{n_{k+1}-1}} = B_{j_k}.$$

Т.е. имеем представление для x, которое будем обозначать

$$\{\{B_{j_k}\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1 - n_0\}.$$

Выделим среди слов B_j те, которые фактически встречаются в представлениях элементов $X_Z^{\mathcal{A}}$. (Пример пропадания: пусть $\mathcal{A}$ таково, что все $\mathcal{A}$ -меры сосредоточены на множестве последовательностей вида

$$\{\ldots z_{i_{k-1}''} z_s z_s z_s z_{i_k} z_{i_k'} z_{i_k''} z_s z_s z_s z_{i_{k+1}} z_{i_{k+1}'} z_{i_{k+1}''} \ldots\},$$

где все i_k, i_k', i_k'', $-\infty < k < \infty$, не равны s. Тогда слова типа $z_s z_s z_i$, $i \neq s$, выпадут из исходного списка. Вообще, слово $\underbrace{z_s z_s \ldots z_s}_{m} z_{i_1} \ldots z_{i_k}$ выпадает, если все слова $z_l \underbrace{z_s \ldots z_s}_{m} z_{i_1} \ldots z_{i_k} z_s; l \neq s$, не лежат в $\mathcal{A}$). Перенумеруем их. Их полный перечень $\{B_j\}_{j=1}^{h_1}$; $h_1 \leqslant \infty$, будем рассматривать как новый алфавит Z^1.

Всякая $\mathcal{A}$-мера μ естественным образом индуцирует инвариантную относительно сдвига $T : X_{Z^1} \to X_{Z^1}$ эргодическую меру μ^* (инвариантную меру производного автоморфизма) в X_{Z^1}, причем, очевидно, $\mathrm{Cyl}(\mu^*)$ не зависит от выбора $\mathcal{A}$-меры μ. Обозначим $\mathrm{Cyl}(\mu^*)$ через $\mathcal{A}_1$.

Теперь проделанное можно повторить для $X_{Z^1}^{\mathcal{A}_1}$, предварительно выбрав $B^1_{s_1} \in Z^1$. (Заметим, что представления элементов $X_Z^{\mathcal{A}}$ используют все элементы $X_{Z^1}^{\mathcal{A}_1}$ и только их). Тогда получится алфавит $Z^2 = \{B^2_j\}_{j=1}^{h_2}$, и для последовательности $\{B^1_{j_k}\}_{k=-\infty}^{\infty}$, входящей в представление произвольной точки, возникает аналогичное Z^1-представлению точки x Z^2-представление $\{\{B^2_{j^1_k}\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1-n^1_0\}$, а для самой точки x-представление $\{\{B^2_{j^1_k}\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1-n^1_0, 1-n_0\}$.

Продолжая построение таким образом, мы для каждого натурального m получим алфавит Z^m, множество слов $\mathcal{A}^m(\mathcal{A})$ и для всякой точки $x \in X_Z^{\mathcal{A}}$ представление $\{\{B^m_{j^{m-1}_k}\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1-n_0^{m-1}, 1-n_0^{m-2}, \ldots, 1-n_0\}$. Ясно, что элементы алфавита Z^m — это слова в Z, имеющие длину, не меньшую, чем 2^m.

Докажем, что для почти всех по любой $\mathcal{A}$-мере точек x бесконечно многие члены последовательности натуральных чисел $1-n_0, 1-n_0^1, 1-n_0^2, \ldots, 1-n_0^m, \ldots$ не равны 1, и бесконечно многие $1-n_1^i$ не равны 0, т.е. вся последовательность x (а не ее односторонняя часть) представлением определена. Обозначим через C множество тех x, для которых все n_0^m равны 0. Тогда множество тех x, для которых в нашей последовательности лишь конечное число не единиц, есть $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^n C$. Поскольку все $T^n C$ попарно не пересекаются, имеем $\mu(C)=0$.

В качестве $X_Z^{\prime\mathcal{A}}$ возьмем $X_Z^{\mathcal{A}} \setminus \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} T^n C$ ($X_Z^{\prime\mathcal{A}}$ — аналог $\Omega^{1\prime}_{\mathcal{A}}$ из [7], с. 788).

Теперь построим марковское множество $Y^{\mathcal{A}}$ и отображение $f_{\mathcal{A}}$.

В качестве $\mathcal{D}_1$ возьмем множество пар (B^1_j, l) : $B^1_j \in Z^1$; $1 \leqslant l \leqslant |B^1_j|_Z$. Для каждого натурального m в качестве $\mathcal{D}_m$ возьмем множество пар (B^m_j, l); $B^m_j \in Z^m$; $1 \leqslant l \leqslant |B^m_j|_{Z^{m-1}}$ (имеется в виду длина записи в алфавите Z^{m-1}). Переходную матрицу M_m определим следующим образом (отвлекаясь от нумерации в $\mathcal{D}_m$): положим

$$M_m((B^m_j, l_1), (B^{m+1}_{j'}, l_2)) = 1, \quad \text{если} \quad B^{m+1}_{j'} = B^m_{i_1} \ldots B^m_{i_t}$$
$$\text{и} \quad i_{l_2} = j(t = |B^{m+1}_{j_1}|^{z^m}),$$

и $=0$ в противном случае. От упорядочения в $\mathcal{D}^m$ требуется лишь, чтобы $(B^m_j, l_1) < (B^m_j, l_2)$ при $l_1 < l_2$. В остальном оно произвольно.

Отображение $f_{\mathcal{A}} : X_Z^{\prime\mathcal{A}} \to \prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i$ строится так. Если последовательность представлений точки есть

$$\{\{B^m_{j^{m-1}_k}\}_{k=-\infty}^{\infty}, 1-n_0^{m-1}, 1-n_0^{m-2}, \ldots, 1-n_0\},$$

то

$$f_{\mathcal{A}}(x) = ((B^1_{j_0}, 1-n_0), (B^2_{j^1_0}, 1-n^1_0), \ldots, (B^m_{j^{m-1}_0}, 1-n_0^{m-1}), \ldots).$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. При построении алфавитов Z^{m+1} определяющим моментом является выбор слова $B^m_{s_m}$. Его регулированием на каждом шаге можно добиться минимальности адического представления. Выбирать последовательность надо так, чтобы для любых M и N с $B^N_M \in Z^N$ нашлось $m = m(M,N)$ такое, что в представление $B^m_{s_m}$ элементами Z^N входило бы B^N_M. Ясно, что такой выбор легко осуществить.

Если $X^{\mathcal{A}}_Z$ — строго эргодический компакт, то марковское множество окажется компактом. В случае подстановочного строго эргодического компакта [7] получится компакт много более громоздкий, чем стационарный компакт, построенный для этого случая в [7] ($\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \dots = \mathcal{D}$; $M_1 = M_2 = \dots = M$). Как добиться компактности в общем случае? После одноточечной компактификации представление перестанет быть минимальным. Если при построении алфавитов Z^N для каждого N просто ограничить сверху константой C^N длину всех Z'^{N-1}-слов, представляющих элементы Z'^N (например, разрезая на куски соответствующие слова для Z'^N), то мы тоже утратим минимальность. Тогда при соответствующем $\mathcal{A}$ бесконечная последовательность, состоящая из одинаковых букв, будет иметь в марковском компакте образ с не всюду плотной траекторией, в то время как на каждом этапе построения не возникает оснований для ее исчезновения. Построить минимальный марковский компакт все же можно, но для нового соответствия (тоже универсального) прообразы цилиндров, отвечающих словам вида $d_1, \dots, d_k$ ($d_i \in \mathcal{D}_i$), будут устроены намного сложнее.

§ 2. Марковский компакт

Теорема 2. *Для всякого* Cyl*-множества $\mathcal{A}$ существует марковский $\mathcal{A}$-компакт $(X''^{\mathcal{A}}_Z, f'_{\mathcal{A}}, Y^{\circ\mathcal{A}})$.*

Доказательство. Построение будет отличаться от предыдущего тем, что на каждом этапе будут происходить перекодирования, изменяющие все предыдущие алфавиты при построении следующего.

Предполагая, что множество Z счетно, введем в рассмотрение еще одно счетное множество: $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$. В Λ будет рассмотрена возрастающая цепочка не более чем счетных множеств $\Lambda_n \subset \Lambda$ и на каждом шаге последовательности над $Z \cup \Lambda_{n-1}$ будут перекодироваться в последовательности над $Z \cup \Lambda_n$.

Для каждого натурального числа m и каждого слова $v_1 \dots v_k$ над $Z \cup \Lambda$ определим m-проекцию — вектор $v'_1 \dots v'_k$, где v'_i зависит от v_i следующим образом. Пусть $v_i = z_{n_i}$. Тогда если число $n_i < 2^{m+1}$, то $v'_i = n_i$; если же число $n_i \geq 2^{m+1}$ и его двоичное разложение есть $a_0 + 2a_1 + \dots + 2^m a_m + \dots$, то $v'_i = 2^{m+1} + a_0 + \dots + 2^m a_m$. Пусть $v_i = \lambda_{r_i}$. Тогда если число $r_i < 2^{m+1}$, то $v'_i = 2^{m+2} + r_i$; если же число $r_i \geq 2^{m+1}$ и $b_0 + 2b_1 + \dots + 2^m b_m + \dots$ — его двоичное разложение, то $v'_i = 2^{m+3} + b_0 + 2b_1 + \dots + 2^m b_m$. Слово $v_1 \dots v_k$ будет называться представителем вектора $v_1 \dots v'_k$ (m считается известным). m-проекция слова однозначно определяет его $m-1$-проекцию. Обозначим $v'_1 \dots v'_k = R^2_m(v_1 \dots v_k)$; $k \geq 1$.

Сейчас будет приведено определение специального кодирования (которым мы воспользуемся ниже).

Пусть Z^* — алфавит (конечный или счетный); $X_{Z^*} = \prod_{i=-\infty}^{\infty} Z_i^{*\prime}$ с $Z_i^{*\prime} = Z^*$; μ^* — мера в X_{Z^*} инвариантная и эргодическая относительно сдвига T^* в

X_{Z^*}. Пусть, далее $\{A_i\}_{i=1}^r$; $r \leqslant +\infty$ — набор слов над Z^*, одновременно рассматриваемый как алфавит Z_1^* с символами A_i.

Пусть $\{\tilde{A}_i\}_1^r$ — набор цилиндров, отвечающих словам A_i, и $B_i \subset \tilde{A}_i$; $1 \leqslant i \leqslant r$, — набор μ^*-измеримых множеств положительной меры такой, что совокупность множеств $\{T^{*j}B_i;\, 1 \leqslant i \leqslant r; 1 \leqslant j \leqslant |A_i|\}$ представляет собой измеримое разбиение ξ-образующую сдвига T^* [8]. Пусть T_1^* — сдвиг в $X_{Z_1^*}$ и f — функция на $X_{Z_1^*}$, принимающая для последовательности $\{\dots A_{i_{-k}}, \dots, A_{i_0}, \dots, A_{i_k} \dots\}$ значение $|A_{i_0}| - 1$. Пусть $U_1^*\colon Q^f_{Z_1^*} \to Q^f_{Z_1^*}$ — специальный автоморфизм, построенный по T_1^* и f. Очевидно, что в $Q^f_{Z_1^*}$ существует инвариантная эргодическая относительно U_1^* мера μ_1^* такая, что T^* и U_1^* метрически изоморфны, причем изоморфизм реализуется естественным отображением $\varphi : X_{Z^*} \to Q^f_{Z_1^*}$. Выделение образующей ξ эквивалентно фиксации для почти всякой последовательности $x = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ представления (в естественном смысле инвариантного относительно сдвига) в виде $\{\{\dots A_{i_{-k}}, \dots, A_{i_0}, \dots, A_{i_k} \dots\}, 1 - n_0\}$ (подобно тому, как это делалось в доказательстве теоремы 1) такого, что множества $B_i = T^{*-1}\{x | n_0 = 0;\, i_0 = i\}$ μ^*-измеримы. Такое представление вместе с отображением φ мы будем называть *специальным кодированием*. Очевидно, что композиция отображений специальных кодирований φ_1 и φ_2 является отображением специального кодирования. Соответствующее представление и набор слов легко строятся по представлениям φ_1 и φ_2. Простейший пример может быть получен, если $\{A_i\}$ образуют код со свойством однозначного декодирования (по крайней мере почти всюду по мере μ^*). С такой ситуацией мы встретились в доказательстве теоремы 1. Пусть $P_* : Q^f_{Z_1^*} \to X_{Z_1^*}$ — проекция.

Если обозначить через $\mathcal{A}'$ множество слов $\mathrm{Cyl}(\mu^*)$ и провести рассмотрение, аналогичное предыдущему, на теоретико-множественном уровне, требуя от $B_i \subset X^{\mathcal{A}'}_{Z^*}$, чтобы они были открытыми в относительной топологии $X^{\mathcal{A}'}_{Z^*} \subset X_{Z^*}$, а от разбиения $X^{\mathcal{A}'}_{Z^*}\xi$ — чтобы оно было образующей в теоретико-множественном смысле (определение [8] без пренебрежения множествами меры 0), то мы получим определение $\mathcal{A}'$-специального кодирования, причем определения $T_1^*, U_1^*, f, Q^f_{Z_1^*}$ останутся в прежнем виде, а сужение φ на $X^{\mathcal{A}'}_{Z^*}$ окажется гомеоморфизмом между $X^{\mathcal{A}'}_{Z^*}$ и $P_*^{-1}X^{\mathrm{Cyl}(\mu_1^*)}_{Z_1^*}$, индуцирующим биекцию классов $\mathcal{A}'$-мер и $\mathrm{Cyl}(\mu_1^*)$-мер. Ниже описывается класс необходимых для дальнейшего кодирований именно такого типа.

Пусть $Z' = \{z_n^*\}_1^{r_*}$ — счетный или конечный алфавит, $z_p^* \in Z'$, $X_{Z'}$ и T' определены по аналогии с X_Z и T. Пусть $\mathcal{A}^*$ — некоторое Cyl-множество слов над Z'. Зададимся натуральным K. Тогда существует такой набор слов $\{B_i\}$, что для каждой последовательности

$$x' = \{\dots, z^*_{i-k}, \dots, z^*_{i_0}, \dots, z^*_{i_k}, \dots\} \in X^{\mathcal{A}^*}_{Z'}$$

имеем представление $\{\{B_{j_{k'}}\}, 1 - n_0\}$ (см. § 1), для которого существует множество целых чисел $\{l_s\}_{-\infty}^{\infty}$; $l_{-1} < 0 \leqslant l_0$, $l_s > l_{s-1}$; $-\infty < s < \infty$, такое, что

1) $|B_{l_s+i}| = K; 1 \leqslant i < l_{s+1} - l_s$;

2) $K \leqslant |B_{l_{s+1}}| < 2K$;

3) соединение $B_{l_s+1} \dots B_{l_{s+1}}$ можно представить как $C_1^s \dots C_{r_s}^s$, где $r_s \geq 1$: $|C_1^s| \geq K'; |C_i^s| < K'; i > 1$, каждый блок C_i^s имеет вид $z_p^* z_p^* \dots z_p^* z_{m_1}^* \dots z_{m_t}^*$,

причем $m_k \neq p; 1 \leqslant k \leqslant t$.[1] Такое представление (если в особых случаях алгоритм фиксирован) единственно. Оно определяет $\mathcal{A}^*$-специальное кодирование. Назовем его (z_p^*, K)-представлением. Пример (1,3)-представления:

$$\begin{array}{cccccccc} 110 & 0010 & 111 & 00000 & 110 & 1010 & 110 & 110 \\ B_{l_1}+1 & B_{l_2} & B_{l_2}+1 & B_{l_3} & B_{l_3}+1 & B_{l_4} & B_{l_5} & B_{l_6}. \end{array}$$

Вернемся к исходной задаче. В качестве Λ_1 возьмем пустое множество, в качестве Z^1 — совокупность 0-проекций однобуквенных слов из $\mathcal{A}$. $Z^1 \subsetneqq \{1,2,3\}$. Возникает тривиальное специальное кодирование всех 0-проекций точек из $X_Z^{\mathcal{A}}$.

Предположим, что алфавит Z^{n-1} построен и что все элементы, его образующие, суть $n-2$-проекции каких либо слов над $Z \cup \Lambda_{n-1}$, содержащих элементы Z. Пусть зафиксированы: Cyl-множество $\mathcal{A}_{n-1}$ над $Z \cup \Lambda_{n-1}$, коммутирующий со сдвигом гомеоморфизм $\varphi_n : X_Z^{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} X_{Z\cup\Lambda_{n-1}}^{\mathcal{A}_{n-1}}$ (в относительных топологиях подмножеств X_Z и $X_{Z\cup\Lambda_{n-1}}$), индуцирующий биекцию классов $\mathcal{A}$-мер и $\mathcal{A}_{n-1}$-мер; $\mathcal{A}_{n-1}$ — специальное кодирование с помощью слов-представителей элементов Z^{n-1}, индуцирующее естественным образом представление n-2-проекций точек $X_{Z\cup\Lambda_{n-1}}^{\mathcal{A}_{n-1}}$ с помощью элементов Z^{n-1}.

Предположим также, что заданы аналогичные объекты предыдущих этажей с теми же свойствами. Поскольку предыдущие алфавиты будут корректироваться (после чего они тоже будут над $Z \cup \Lambda_n$), обозначим их $Z_{n-1}^k (0 < k < n)$. Иерархическое соотношение алфавитов Z_{n-1}^k таково же, как в доказательстве теоремы 1.

Приступим к построению всех перечисленных объектов для n-го этажа с теми же свойствами.

Обозначим $|Z_{n-1}^{n-1}| = R_{n-1}$; общий наибольший делитель всех длин слов Z_{n-1}^{n-1} над $Z \cup \Lambda_{n-1}$ обозначим через d_{n-1}, сумму длин всех слов Z_{n-1}^{n-1} — через S_{n-1}, минимум — через Q_{n-1}. Выделим произвольно одно из слов c^{n-1}. Очевидно, существует такое c'_{n-1}, что для всякого натурального $l > c'_{n-1}/d_{n-1}$ найдутся натуральные $a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s$ такие, что b_i суть длины слов из Z_{n-1}^{n-1} и $a_1 b_1 + \cdots + a_s b_s = l d_{n-1}$. Выберем натуральное $K_n > n^2$ такое, что $K_n Q_{n-1} > S_{n-1} + |c^{n-1}| + c'_{n-1}$. Пусть $B'_1, \ldots, B'_{R_{n-1}}$ — полный перечень слов из Z_{n-1}^{n-1}. Рассмотрим (B'_1, K_n)-представление $n-2$-проекций над Z_{n-1}^{n-1}. Из выбора K_n следует, что для каждого участвующего в нем слова $D = u_1 \ldots u_r$ над Z_{n-1}^{n-1} $(K_n \leqslant r < 2K_n)$ найдется другое слово ε над Z_{n-1}^{n-1} вида $B'_1 \ldots B'_{R_{n-1}} c^{n-1} h_1 \ldots h_l$ такое, что $|D|_{Z\cup\Lambda_{n-1}} = |E|_{Z\cup\Lambda_{n-1}}$. Для каждого слова B из Z_{n-1}^{n-1} зафиксируем представителя $\mathrm{Rep}(B)$ из $\mathcal{A}_{n-1}$ и рассмотрим перечень M_{n-1} всех слов над $Z \cup \Lambda_{n-1}$ (множество их длин конечно), участвующих в композиции исходного $\mathcal{A}_{n-1}$-специального кодирования (связанного с Z_{n-1}^{n-1}-представлением), и того, которое индуцирует (B'_1, K_n)-представление $n-2$-проекций. Определим инъекцию $f_{n-1} : M_{n-1} \to \Lambda \setminus \Lambda_{n-1}$ такую, что

[1] K' таково, что в последовательностях из $X_{Z'}^{\mathcal{A}^*}$ содержатся блоки–компоненты C обоих типов (либо K, либо минимальное возможное). Если все $|C_i^s|$ одинаковы, то вместо $|C_i^s|$ берется $t(C_i^s)$ и т.д. Если K' слишком мало, то строятся блоки того минимального „ранга“, при котором осмысленно говорить о соединении $B_{l_s+1} \ldots B_{l_s+1}$

$\Lambda\setminus(\Lambda_{n-1}\cup f_{n-1}(M_{n-1}))$ бесконечно. Зафиксируем символ в $\mathrm{Rep}(c^{n-1})$, принадлежащий Z. Поставим в соответствие каждому элементу $g\in M_{n-1}$ слово $\mathrm{Rep}(c^{n-1})(g)$, получающееся заменой этого символа на $f_{n-1}(g)$. Обозначив через Λ_n множество $\Lambda_{n-1}\cup f_{n-1}(M_{n-1})$, определим отображение f^*_{n-1} множества слов M_{n-1} в множество слов над $Z\cup\Lambda_n$, сохраняющее длину слова. Пусть $D=R^2_{n-2}(g)$. Зафиксируем одно из возможных слов E, выше поставленных в соответствие слову D, и в качестве $f^*_{n-1}(g)$ берем $\mathrm{Rep}(B'_1)\dots\mathrm{Rep}(B'_{R_{n-1}})\,\mathrm{Rep}(c^{n-1})(g)\,\mathrm{Rep}(h_1)\dots\mathrm{Rep}(h_l)$. Пусть самое длинное слово из M_{n-1} имеет длину u^*_n, самое короткое — v^*_n. Возьмем натуральное $K'_n\geq 1+u^*_nK_n/v^*_n$.$\varphi_n$ будет строиться как композиция $\varphi'_n\circ\varphi_{n-1}$. Для построения φ'_n выберем некое $g'_n\in M_{n-1}$ и определим (g'_n,K'_n)-представление M_{n-1}-последовательностей. Пусть $G=g_1\dots g_l(K'_n\leqslant l<2K'_n)$, $g_i\in M_{n-1}$ — слово, в нем участвующее. Определим $\varphi'^*_n(G)=f^*_{n-1}(g_1)q_2\dots g_l$. Наконец, для произвольной точки, имеющей в M_{n-1}-словах представление $\{\{G_i\}_{i=-\infty}^{\infty},1-p_0\}$, определяем ее φ_n-образ как $\{\{\varphi'^*_n G_i\},1-p_0\}$; p_0 — аналогично предыдущему номер первого $Z\cup\Lambda_{n-1}$-символа G_0. Тем самым построено φ_n и отвечающее индуцируемому им отображению мер новое Cyl-множество $\mathcal{A}_n$ над $Z\cup\Lambda_n$. Нашему представлению φ'_n-образов отвечает $\mathcal{A}_n$-специальное кодирование. Ясно, что φ_n удовлетворяет всем предъявляемым требованиям. В качестве элементов Z^n_n берем $n-1$-проекции всех слов вида $\varphi'^*_n(G)$, участвующих в этом кодировании. Коррекцию предыдущих алфавитов (состоящую, как мы увидим, в их сохранении или увеличении без изменения множества длин слов) осуществляем исходя из требования сохранения иерархической структуры слов (мест расположения подслов низших уровней) — $(n-2)$-проекций (R^2_{n-2}) всех $\mathrm{Rep}(c^{n-1})(g)$. Z^{n-1}_n-структура слова из Z^n_n такова: если оно есть проекция $f^*_{n-1}(g_1)g_2\dots g_l$, то рассматриваются $n-2$-проекции составляющих $f^*_{n-1}(g_1)$ и $n-2$-проекции всех составляющих g_2, составляющих g_3 и т.д. Индукционный переход завершен.

Из построения ясно, что для каждого n найдется $N(n)$ такое, что $Z^n_{N(n)}=Z^n_{N(n)+1}=\dots$. Обозначим $Z^n_{N(n)}$ через $Z^n=\{B^n_i\}_{i=1}^{l_n}$. Поскольку $\sum 1/K_n<\infty$, существует инвариантное подмножество $X^{*\mathcal{A}}_Z\subset X^{\mathcal{A}}_Z$ полной меры для любой $\mathcal{A}$-меры такое, что для любой его точки x последовательность $\varphi_n(x)$ имеет предел $\varphi_\infty(x)$ в слабой топологии пространства последовательностей над $Z\cup\Lambda$.

φ_∞ биективно на $X^{*\mathcal{A}}_Z$ и для каждой последовательности из $\varphi_\infty(X^{*\mathcal{A}}_Z)$ наша стабилизирующаяся последовательность специальных кодирований и перекодирований определяет иерархическую структуру Z^n-представлений $n-1$-проекций, т.е. для точки x имеем при каждом n представление $\{\{B^n_{j^{n-1}_k}\}_{k=-\infty}^{\infty},1-p_0^{n-1},1-p_0^{n-2},\dots,1-p_0\}$, где $B^n_{j^{n-1}_k}\in Z^n$ суть проекции соответствующих слов. Так же как в теореме 1, доказывается, что для почти всех точек (по любой инвариантной нормированной мере) бесконечно многие члены последовательности $1-p_0,\dots,1-p_0^m,\dots$ не равны 1, чем и определено множество $X''^{\mathcal{A}}_Z$. Элементы $\cup\Lambda_n$ — „метки“ иерархической структуры.

Для каждого слова $B^m_j\in Z^m$ обозначим через N^m_j Z^{m-1}-длину $m-2$-проекции. Построим марковский компакт. В качестве $\mathcal{D}^{\mathcal{A}}_m$ возьмем множество пар $(B^{m+1}_j,l);1\leqslant l\leqslant N^{m+1}_j$. Положим $M^{\mathcal{A}}_m((B^{m+1}_j,l_1),(B^{m+2}_{j'},l_2))=1$, если m-проекция $B^{m+2}_{j'}$ имеет вид $B^{m+1}_{i_1}\dots B^{m+1}_{i_{N^m_{j'}}}$ и $i_{l_2}=j$.

Упорядочение и отображение f'_A определяются по аналогии с теоремой 1. Минимальность ясна из определения $f_n(g)$, подобно замечанию после доказательства теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Заметим, что получившийся марковский компакт весьма избыточен и мог бы быть использован для континуального Z. При определении m-проекции различение случаев $u_i, r_i < 2^{m+1}$ и $u_i, r_i \geq 2^{m+1}$ делалось для того, чтобы по конечному числу координат точки марковского компакта определять координаты исходной последовательности.

§ 3. Периодические точки символических динамических систем

С помощью построения, близкого построению марковского компакта, будет в символической ситуации дан ответ на один вопрос Д.А.Линда. Вопрос состоял в том, существует ли для гомеоморфизма компактного метрического пространства компактное множество, содержащее ровно одну точку каждой периодической траектории [10].

Такой компакт будет построен для каждой динамической системы $T' : D \to D$, $T' = T\big|_D$, где $T : X_Z \to X_Z$ — сдвиг в пространстве двусторонних последовательностей элементов конечного алфавита $Z = \{1, \dots, n\}$, aD — замкнутое в слабой топологии (как известно, метризуемой) инвариантное относительно T множество.

Предложение. *Если $D \subset X_Z$ — замкнутое множество, инвариантное относительно сдвига T в X_Z, то существует компакт $K \subset D$ такой, что если $x \in D$ и $T^m x = x$ для некоторого m и $T^{m'} x \neq x$ при $1 \leqslant m' < m$, то существует единственное $i : 1 \leqslant i \leqslant m$, такое, что $T^i x \in K$.*

Доказательство. Множество будет строиться следующим образом: будет выбрано по одной точке из каждой периодической траектории и доказано, что замыкание получившегося множества K' не содержит других периодических точек.

Введем упорядочение в множестве всех слов из Z. На множестве слов длины $k : a_1 \dots a_k < b_1 \dots b_k$ тогда и только тогда, когда существует k_0; $0 < k_0 \leqslant k$, что $a_s = b_s$ при $s < k_\circ$ и $a_{k_\circ} < b_{k_\circ}$. Из двух слов разной длины большим будем считать более длинное. Пусть a — одна из точек периодической траектории, изображающаяся периодической с периодом N двусторонней последовательностью из $D : a = \{u_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$; пусть $u = \max\limits_{-\infty < i < \infty} u_i$. Тогда существует j такое, что $u_j = u$. В этом случае блок $P = \{u_j, \dots, u_{j+N-1}\}$ есть соединение $A_1^1 \dots A_{n_1}^1$, где каждый блок Y из числа A_j^1 имеет вид u или $y_1 \dots y_{|Y|}$, где $y_1 = u$; $y_i < u$; $|Y| \geq i > 1$. Если $n_1 = 1$, то включим точку $T^{j-1}a$ в K' и назовем ее точкой *первого типа*; если нет, то рассматриваем максимальный блок A^2 среди A_j^1. Пусть перечень ему равных есть $A_{i_1^1}^1 \dots A_{i_{n_2}^1}^1$. Если $n_2 = 1$, то полагаем $T_2 = \sum\limits_{i < i_1} |A_i^1| + j$, берем точку $T^{T_2 - 1}a$, включаем ее в K' и называем точкой II *типа*. Если $n_2 > 1$, то имеем представление: $P = B_2 A_1^2 \dots A_{n_2-1}^2 A_2'$ такое, что если обозначить $A_2' B_2$ через $A_{n_2}^2$ то каждый блок второго уровня A_i^2 имеет вид A^2 или $A^2 A_i^1, \dots A_{i'+k}^1$, где все $A_{i'+l}^1 < A^2$ при $0 \leqslant l \leqslant k$. Дальше, выбрав максимальный блок A^3 среди A_i^2, действуем точно так же, как на предыдущих этапах, разделяя случаи $n_m = 1$ и $n_m > 1$. Ясно, что точки, включаемые в K', не зависят от выбора исходных точек на периодических траекториях, которым они принадлежат. Блоки каждого уровня, равные максимальному, будем называть основными блоками этого уровня. Для каждой периодической точки построение, как легко понять, закончится, и ее образ при каком-либо T^s будет включен в K'. В качестве K возьмем замыкание K'.

Докажем, что K содержит периодические точки только из K'. Действительно, если периодическая точка наименьшего периода $N' : b = \{b_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ содержится в K и, стало быть, в D, то для каждого $n > 0$ должно найтись $v_n \in K'$ такое, что $v_n = \{r_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ имеет период, больший, чем nN' (иначе совершенно очевидно, что $b = v_n$ и лежит в K'), и $r_1 \dots r_{nN'} = b_1 \dots b_{nN'}$. Построение основных блоков всех уровней для любой точки из X должно происходить так же, как для всех ее сдвигов. Мы должны индукцией по типу, совпадающему с высшим уровнем блоков, доказать, что построение, на начальных этапах параллельное для b и v_n, должно было успеть (при больших n) выявить, что $b \in K'$. Но это ясно из структуры последовательности из K' — ее положительная часть $\{b_i\}_1^{\infty}$ начинается с основного блока уровня $M - A_M$; его начало A_{M-1} — основной блок уровня $M-1$; его начало A_{M-2} — основной блок уровня $M-2$ и т.д. Найдется наибольшее M' такое, что $A_{M'} \subset b_1 \dots b_{nN'}$ ($A_{M'}$ не зависит от $\{r_i\}_{nN'+1}^{\infty}$). Если $A_{M'} \supseteq b_1 \dots b_{N'}$, то все доказано. Если $A_{M'} \subset b_1 \dots b_{N'}$, то при $n \geq 2$ оказывается, что на „неосновном“ участке для $A_{M'+1} : b_{N'+1} \dots b_{nN'}$ можно разместить основной блок — сдвиг $A_{M'}$ на N'. Невозможность этого легко доказывается индукцией по построению, с учетом того, что про каждое подслово $\{r_i\}$, не зная его места, можно сказать, является ли оно основным блоком построения, и если да, то указать уровень. Предложение доказано.

Список литературы

[1] Биллингслей П., *Эргодическая теория и информация*, Мир, М., 1969.

[2] Бурбаки Н., *Теория множеств*, Мир, М., 1965.

[3] Вершик А. М., *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения*, ДАН СССР **259**, вып. 3 (1981), 526–529.

[4] Вершик А. М., *Теорема о марковской аппроксимации в эргодической теории*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **115** (1982), 72–82.

[5] Гельфонд А. О., Линник Ю. В., *Элементарные методы в аналитической теории чисел*, ФМ, М., 1962.

[6] Лившиц А. Н., *О спектрах адических преобразований марковских компактов*, Успехи мат.наук **42**, вып. 3 (1987), 189–190.

[7] Лившиц А. Н., *Достаточное условие слабого перемешивания подстановок и стационарных адических преобразований*, Мат. заметки **44**, вып. 6 (1988), 785–793.

[8] Рохлин В. А., *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой*, Успехи мат. наук **22**, вып. 5 (1967), 3–56.

[9] Gottshalk W. H., *Substitutions minimal sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 467–491.

[10] Lind D. A., *Dynamical properties of quasihyperbolic toral automorphisms*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **1** no. 2 (1982), 49–68.

Ленинградское научно-производственное объединение „Красногвардеец“
197376, Ленинград, Инструментальная ул., 3

Поступило 4 июля 1988 г.