Д. А. Полякова, О решениях уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций, *Алгебра и анализ*, 2014, том 26, выпуск 6, 121–142

Алгебра и анализ
Том 26 (2014), №6

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

© Д. А. ПОЛЯКОВА

В работе устанавливается вид частного и общего решений уравнений свертки в неквазианалитических пространствах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на конечном интервале. В качестве частного случая изучены дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

§1. Введение

Пусть ω — весовая функция, φ^*_ω — сопряженная по Юнгу к функции $\varphi_\omega(x) = \omega(e^x)$, $I = (-a, a)$ — заданный конечный интервал в $\mathbb{R}$.

Работа посвящена описанию решений уравнений свертки

$$T_\mu f = g \tag{1.1}$$

в неквазианалитическом пространстве

$$\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I) = \Big\{ f \in C^\infty(I) \,:\, \forall q \in (0,1),\, \forall l \in (0,a) \qquad |f|_{\omega,q,l} = \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{|x|\leqslant l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{q\varphi^*_\omega(j/q)}} < \infty \Big\}$$

ультрадифференцируемых функций (УДФ) Берлинга нормального типа на интервале I, задаваемом весом ω. Здесь T_μ — сюръективный оператор свертки, действующий линейно и непрерывно в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ по правилу

$$(T_\mu f)(x) = <\psi_\mu, f(x+\cdot)>, \quad f \in \mathcal{E}^1_{(\omega)}(I),\;\; x \in I;$$

ψ_μ — некоторый линейный непрерывный функционал из $\big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)\big)'$, называемый обычно символом оператора T_μ. Мы для простоты дальнейшего изложения под символом оператора T_μ будем сразу понимать не сам функционал ψ_μ, а его преобразование Фурье–Лапласа μ — некоторую целую

Ключевые слова: ультрадифференцируемые функции, уравнение свертки, дифференциальное уравнение бесконечного порядка, ряды экспонент.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект №14-01-31083).

функцию, являющуюся мультипликатором весового пространства целых функций

$$H^1_{(\omega),I} = \Big\{ f \in H(\mathbb{C}) \big| \exists q \in (0,1),\ \exists l \in (0,a) : \|f\|_{\omega,q,l} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{q\omega(z)+l|\operatorname{Im} z|}} < \infty \Big\},$$

изоморфного пространству $\big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)\big)'$.

Известно (см. [1, теорема 2]), что как частный случай уравнения (1.1) включают в себя дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)} = g, \quad f, g \in \mathcal{E}^1_{(\omega)}(I). \tag{1.2}$$

Ранее в [1] были полностью описаны все символы μ сюръективных операторов свертки T_μ или, другими словами, уравнений свертки (1.1), разрешимых в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ при любой правой части $g \in \mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$. Затем в [2] был построен экспоненциально-полиномиальный базис в $\ker T_\mu$, т. е. в пространстве решений однородного уравнения свертки $T_\mu f = 0$.

В данной работе устанавливается вид частного решения уравнения (1.1). Вместе с результатами из [2] это позволяет выписать общее решение уравнений (1.1) и (1.2) в пространстве $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$.

К настоящему времени уравнения свертки достаточно полно изучены также в пространствах УДФ Берлинга максимального типа (см., например, [3, 4, 5]). Однако вид частного и общего решений в указанных пространствах не устанавливался.

Частное решение уравнения (1.1) ищется в виде $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j\, e^{-i\nu_j x}$, где показатели ν_j, $j \in \mathbb{N}$, подбираются так, чтобы система $\{e^{-i\nu_j x} : j \in \mathbb{N}\}$ была абсолютно представляющей системой (АПС) в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ и чтобы для $|\mu(\nu_j)|$, $j \in \mathbb{N}$, выполнялись подходящие оценки снизу. В итоге доказывается, что если правая часть g уравнения (1.1) разложена в абсолютно сходящийся ряд $\sum_{j=1}^{\infty} g_j\, e^{-i\nu_j x}$, то функция

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{\mu(\nu_j)}\, e^{-i\nu_j x} \tag{1.3}$$

является решением уравнения (1.1) в пространстве $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$. В этом заключается основной результат работы.

Для построения системы $\{\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$ используются теория слабо достаточных множеств, теория АПС и связь между ними. Идея поиска частного решения в подобном виде была высказана А. Ф. Леонтьевым в работе [6]. Затем этот метод применялся Ю. Ф. Коробейником в [7]. Данный подход был также реализован в работе [8] для уравнений свертки в пространствах $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ УДФ Берлинга нормального типа на всей числовой прямой.

Следует заметить, что в общем случае система $\{\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$ показателей из представления (1.3) строится неконструктивно. В связи с этим в работе дополнительно исследуются решения уравнений свертки в пространствах $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$, задаваемых весами $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, где $\rho(t) \to \rho \in (0,1)$ — некоторый уточненный порядок. Известно (см. [1]), что в этих пространствах все уравнения свертки (1.1) являются дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами (1.2). Если $\rho(t) \equiv \rho \in (0,1)$, то соответствующие пространства $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ представляют собой проективные аналоги известных классов Жевре.

Для указанного класса весов по символу μ уравнения (1.2), заданному своими простыми нулями $(\lambda_s)_s$, образующими R-множество (что обеспечивает сюръективность соответствующего оператора T_μ), система $\{\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$ строится в явном виде, причем числа ν_j выбираются неотрицательными. В результате доказывается, что функция (1.3) является частным решением уравнения (1.2), а его общее решение имеет вид

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} a_s\, e^{-i\lambda_s x} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{\mu(\nu_j)}\, e^{-i\nu_j x}, \quad a_s \in \mathbb{C}, \ \ s = 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

Структура работы следующая. В §2 вводятся весовые функции, задаваемые ими пространства УДФ Берлинга нормального типа $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ и сопряженные пространства целых функций $H^1_{(\omega),I}$. Здесь же определяются операторы свертки, действующие в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$. В §3 строятся слабо достаточные множества для $H^1_{(\omega),I}$ и соответствующая АПС экспонент в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$. В §4 доказывается основной результат работы — теорема о частном решении уравнения (1.1) в пространстве $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$. §5 и §6 посвящены решениям уравнений свертки в обобщенных проективных классах Жевре.

§2. Весовые функции, пространства УДФ и операторы свертки

Пусть ω — неквазианалитическая *весовая функция*, т. е. непрерывная неубывающая функция $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$, удовлетворяющая условиям:

(α) $\forall p > 1\ \exists C > 0 \,:\, \omega(x+y) \leqslant p\big(\omega(x) + \omega(y)\big) + C, \quad \forall x, y \geqslant 0;$

(β) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt < \infty;$

(γ) $\ln t = o\big(\omega(t)\big), \quad t \to \infty$;

(δ) $\varphi_\omega(x) := \omega(e^x)$ выпукла на $[0,\infty)$.

Без ограничения общности можно считать, что $\omega(1) = 0$. Положим $\omega(z) := \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$.

Приведем необходимые для дальнейшего свойства весовых функций. Известно, что $\omega(t) = o(t)$ при $t \to \infty$ и что

$$\lim_{r\downarrow 1}\limsup_{t\to\infty}\frac{\omega(rt)}{\omega(t)} = 1. \tag{2.1}$$

Далее, для неквазианалитического веса ω важную роль играет его гармоническое продолжение в открытую верхнюю и нижнюю полуплоскости:

$$P_\omega(x+iy) := \begin{cases} \frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt, & \text{если } y \neq 0,\\ \omega(x), & \text{если } y = 0.\end{cases}$$

Функция P_ω непрерывна и субгармонична во всей плоскости, причем $P_\omega(z) \geqslant \omega(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Для дальнейшего нам понадобится оценка сверху функции $P_\omega(z)$, устанавливаемая в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть P_ω — гармоническое продолжение неквазианалитического веса ω. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C > 0$ такое, что*

$$P_\omega(x+iy) \leqslant (1+\varepsilon)\omega(x) + \varepsilon|y| + C, \quad x+iy \in \mathbb{C}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon \in (0, \pi/2 - 1)$. В силу условия ($\alpha$) существует $C_1 > 0$ такое, что

$$\omega(x+y) \leqslant (1+\varepsilon)\big(\omega(x)+\omega(y)\big) + C_1, \quad x, y \geqslant 0.$$

Очевидно, неравенство (2.2) достаточно доказать для $y > 0$. При этих y имеем, что

$$P_\omega(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(x+yt)}{t^2+1}\,dt \leqslant (1+\varepsilon)\omega(x) + (1+\varepsilon)\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\omega(yt)}{t^2+1}\,dt + C_1. \tag{2.3}$$

Далее,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\omega(yt)}{t^2+1}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\omega(yt)}{t^2+1}\,dt + \frac{2}{\pi}\int_1^\infty\frac{\omega(yt)}{t^2+1}\,dt \leqslant \frac{\omega(y)}{2} + \frac{2y}{\pi}\int_y^\infty\frac{\omega(s)}{s^2}\,ds.$$

Поскольку $\omega(y) = o(y)$ при $y \to \infty$ и в силу условия (β) $\int_y^\infty \frac{\omega(s)}{s^2}\,ds \to 0$ при $y \to \infty$, то существует $C_2 > 0$, при котором для всех $y > 0$

$$\frac{\omega(y)}{2} + \frac{2y}{\pi}\int_y^\infty\frac{\omega(s)}{s^2}\,ds \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,y + C_2.$$

Возвращаясь к (2.3), окончательно получаем, что

$$P_\omega(x+iy) \leqslant (1+\varepsilon)\omega(x) + \varepsilon y + C_1 + (1+\varepsilon)C_2, \quad x \in \mathbb{R}, \ y > 0,$$

что завершает доказательство леммы. □

Перейдем к определению пространств УДФ. Пусть $\varphi_\omega^*(y) := \sup\{xy - \varphi_\omega(x) : x \geqslant 0\}$, $y \geqslant 0$, — сопряженная по Юнгу к функции φ_ω. *Пространством УДФ Берлинга нормального типа* на конечном интервале $I = (-a, a)$ в $\mathbb{R}$ называется следующее весовое пространство бесконечно дифференцируемых на I функций:

$$\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I) = \Big\{ f \in C^\infty(I) \, : \, \forall q \in (0,1), \forall l \in (0,a) \qquad |f|_{\omega,q,l} = \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{|x|\leqslant l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{q\varphi_\omega^*(j/q)}} < \infty \Big\}.$$

Это пространство наделяется естественной топологией, задаваемой набором преднорм $\{|\cdot|_{\omega,q,l} : q \in (0,1), \, l \in (0,a)\}$, и является в ней (FS)-пространством.

Как известно (см. [9, теорема 1]), преобразование Фурье–Лапласа функционалов

$$F : \varphi \in \big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)\big)' \mapsto \widehat{\varphi}(z) := \varphi_x(e^{-ixz}), \quad z \in \mathbb{C},$$

устанавливает топологический изоморфизм между пространством $\big(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)\big)'_\beta$, сильным сопряженным с $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$, и следующим пространством целых функций:

$$H^1_{(\omega),I} = \Big\{ f \in H(\mathbb{C}) \big| \exists q \in (0,1), \, \exists l \in (0,a) : \|f\|_{\omega,q,l} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{q\omega(z)+l|\operatorname{Im} z|}} < \infty \Big\}.$$

Пространство $H^1_{(\omega),I}$ наделяется естественной топологией индуктивного предела $\operatorname*{ind}_{q\in(0,1)} \operatorname*{ind}_{l\in(0,a)} H_{\omega,q,l}$ банаховых пространств $H_{\omega,q,l} = \{f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{\omega,q,l} < \infty\}$ и является в ней (DFS)-пространством.

Нетрудно видеть, что пространство $H^1_{(\omega),I}$ не замкнуто относительно операции умножения функций. В соответствии с [1, предложение 1] множество всех мультипликаторов пространства $H^1_{(\omega),I}$, т. е. тех целых функций μ, для которых $\mu H^1_{(\omega),I} \subset H^1_{(\omega),I}$, совпадает с

$$M^1_{(\omega)} = \Big\{ \mu \in H(\mathbb{C}) \, : \, \forall \varepsilon > 0 \ \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{e^{\varepsilon\omega(z)+\varepsilon|\operatorname{Im} z|}} < \infty \Big\}.$$

При этом каждый мультипликатор $\mu \in M^1_{(\omega)}$ непрерывен, т. е. оператор умножения $\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$ действует непрерывно в $H^1_{(\omega),I}$.

Лемма 1 из [1] позволяет заменить $\omega(z)$ на $\omega(\operatorname{Re} z)$ в определении обоих пространств $H^1_{(\omega),I}$ и $M^1_{(\omega)}$.

Оператор свертки в пространстве $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ определяется как сопряженный к оператору умножения Λ_μ, действующему линейно и непрерывно в $H^1_{(\omega),I} \simeq \left(\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)\right)'_\beta$. Именно для нетривиального мультипликатора $\mu \in M^1_{(\omega)}$ находим $\psi_\mu := F^{-1}(\mu)$ — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ и полагаем для $f \in \mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$

$$(T_\mu f)(x) := < \psi_\mu, f(x+\cdot) >, \quad x \in I.$$

Определенный таким образом оператор T_μ называется *оператором свертки* с *символом* μ. При этом $T_\mu = (F^{-1} \circ \Lambda_\mu \circ F)'$, так что T_μ действует линейно и непрерывно в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$.

Заметим, что на элементы полной в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ системы $\{e^{-izx} : z \in \mathbb{C}\}$ оператор T_μ действует следующим образом:

$$T_\mu(e^{-izx}) = \mu(z)\, e^{-izx}, \quad x \in I, \ z \in \mathbb{C}.$$

Известно [1, теорема 2], что если целая функция $\mu(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k(-i)^k z^k$ является *сильным мультипликатором* пространства $H^1_{(\omega),I}$, т. е. удовлетворяет условию

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{e^{\varepsilon\omega(z)}} < \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0,$$

то $T_\mu f = \sum_{k=0}^\infty a_k f^{(k)}$ для всех $f \in \mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$, т. е. оператор свертки представляет собой дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

В [1, теорема 3] было установлено, что в случае *строгого* неквазианалитического веса, т. е. веса, удовлетворяющего условию $\limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(Kt)}{\omega(t)} < K$ при некотором $K > 1$, все мультипликаторы из $M^1_{(\omega)}$ являются сильными, а значит, все операторы свертки будут дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами.

В [1, теорема 1] было получено несколько эквивалентных между собой условий на символ μ, необходимых и достаточных для того, чтобы оператор T_μ сюръективно отображал $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ на $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$. Приведем одно из них, нужное для дальнейшего:

(SC) $\forall\varepsilon > 0$, $\forall\delta > 0$ $\exists r_0 > 0$: *для каждой точки* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *с* $|x| \geqslant r_0$, $|y| \leqslant \delta|x|$ *найдется окружность* C_z *с радиусом* $R_z \leqslant \delta\omega(x) + \delta|y|$, *содержащая точку* z *внутри себя, для всех точек* ζ *которой выполняется неравенство*

$$|\mu(\zeta)| \geqslant e^{-\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\zeta) - \varepsilon|\operatorname{Im}\zeta|}.$$

Условие (SC) равносильно тому, что мультипликатор μ является *делителем* пространства $H^1_{(\omega),I}$. Это означает, что если $f \in H^1_{(\omega),I}$ и $\frac{f}{\mu} \in H(\mathbb{C})$, то $\frac{f}{\mu} \in H^1_{(\omega),I}$ (см. там же).

Итак, пусть μ — делитель $H^1_{(\omega),I}$. Тогда уравнение свертки (1.1) имеет решение в пространстве $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ при любой правой части $g \in \mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$.

Для заданной функции $g \in \mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ общее решение уравнения (1.1) естественно представляет собой сумму какого-либо частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$T_\mu f = 0. \tag{2.4}$$

Общее решение однородного уравнения (2.4) было построено в работе [2]. Именно нетрудно видеть, что если λ_s — нуль символа μ рассматриваемого уравнения, k_s — его кратность, то экспоненциально-полиномиальные мономы

$$x^l\, e^{-i\lambda_s x}, \quad l = 0, 1, \dots, k_s - 1, \tag{2.5}$$

будут решениями однородного уравнения (2.4). В [2] было построено специальное открытое покрытие $(U_j)_j$ нулевого множества $(\lambda_s)_s$ символа μ. Затем было доказано, что в пространстве решений уравнения (2.4) имеется абсолютный базис, состоящий из линейных комбинаций решений (2.5); линейные комбинации составляются из решений, соответствующих нулям λ_s, попадающим в одно и то же множество U_j.

Таким образом, задача нахождения общего решения уравнения (1.1) сводится к нахождению какого-либо его частного решения.

§3. Слабо достаточные множества для $H^1_{(\omega),I}$

Настоящий параграф посвящен построению слабо достаточного для $H^1_{(\omega),I}$ множества, на котором $|\mu|$ имеет подходящую оценку снизу. Здесь μ — делитель $H^1_{(\omega),I}$, т. е. символ разрешимого уравнения свертки (1.1).

Напомним, что в соответствии с [10] множество $S \subset \mathbb{C}$ называется *слабо достаточным* для $H^1_{(\omega),I}$, если топология $\operatorname*{ind}_{q\in(0,1)} \operatorname*{ind}_{l\in(0,a)} H_{\omega,q,l;S}$, где

$$H_{\omega,q,l;S} = \Big\{ f \in H^1_{(\omega),I} :\ \|f\|_{\omega,q,l;S} = \sup_{z\in S} \frac{|f(z)|}{e^{q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z|}} < \infty \Big\},$$

совпадает с исходной $\operatorname*{ind}_{q\in(0,1)} \operatorname*{ind}_{l\in(0,a)} H_{\omega,q,l}$ в $H^1_{(\omega),I}$.

Построение искомого слабо достаточного множества для $H^1_{(\omega),I}$ будем проводить в два этапа.

Лемма 2. *Множество* $S_0 := \mathbb{R}\bigcup(i\mathbb{R})$*, состоящее из действительной и мнимой оси, слабо достаточно для* $H^1_{(\omega),I}$.

Доказательство. Множество S_0 будет слабо достаточно для $H^1_{(\omega),I}$ тогда и только тогда, когда для произвольных $q \in (0,1)$ и $l \in (0,a)$ найдутся $\widetilde{q} \in (0,1)$, $\widetilde{l} \in (0,a)$ и $C > 0$ такие, что

$$\|f\|_{\omega,\widetilde{q},\widetilde{l}} \leqslant C \cdot \|f\|_{\omega,q,l;S_0} \text{ для всех } f \in H_{\omega,q,l;S_0}.$$

Зафиксируем $q \in (0,1)$ и $l \in (0,a)$. Для $f \in H_{\omega,q,l;S_0}$ имеем

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{\omega,q,l;S_0} \cdot e^{q\omega(x)}, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{3.1}$$

$$|f(iy)| \leqslant \|f\|_{\omega,q,l;S_0} \cdot e^{l|y|}, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

По принципу Фрагмена–Линделефа [11, теорема 6.5.4] для всех $z = x + iy$ с $y \neq 0$ выполняется оценка

$$\ln|f(x+iy)| \leqslant \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|f(t)|}{(x-t)^2 + y^2}\, dt + D|y|, \tag{3.3}$$

где $D = \limsup_{r\to\infty} \frac{2}{\pi r} \int_0^\pi \ln|f(re^{i\theta})| \sin\theta\, d\theta$.

В силу (3.1)

$$\frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|f(t)|}{(x-t)^2 + y^2}\, dt \leqslant \ln\|f\|_{\omega,q,l;S_0} + qP_\omega(x+iy). \tag{3.4}$$

Для того, чтобы оценить D, рассмотрим индикатор $h_f(\theta)$ (при порядке 1) целой функции f. Так как $\frac{\omega(r)}{r} \to 0$ при $r \to \infty$, то из (3.1) и (3.2) вытекает, что $h_f(0) = h_f(\pi) = 0$, $h_f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqslant l$. Учитывая тригонометрическую выпуклость индикатора, заключаем, что $h_f(\theta) \leqslant l\sin\theta$ при всех $\theta \in [0,\pi]$. Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $r_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\ln|f(re^{i\theta})| \leqslant (l\sin\theta + \varepsilon)r, \quad r \geqslant r_\varepsilon,\ \theta \in [0,\pi].$$

Значит, при $r \geqslant r_\varepsilon$

$$\frac{2}{\pi r} \int_0^\pi \ln|f(re^{i\theta})| \sin\theta\, d\theta \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (l\sin\theta + \varepsilon)\sin\theta\, d\theta = l + \frac{4\varepsilon}{\pi}.$$

Таким образом, $D \leqslant l$.

Возвращаясь к (3.3), учитывая (3.4), получаем, что для всех $x + iy \in \mathbb{C}$ с $y \neq 0$

$$\ln|f(x+iy)| \leqslant \ln\|f\|_{\omega,q,l;S_0} + qP_\omega(x+iy) + l|y|.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $(1+\varepsilon)q < 1$ и $l + q\varepsilon < a$. Пользуясь леммой 1, найдем $C > 0$, при котором выполняется неравенство (2.2). В результате получим, что

$$\ln|f(x+iy)| \leqslant (1+\varepsilon)q\omega(x) + (l+q\varepsilon)|y| + C + \ln\|f\|_{\omega,q,l;S_0}, \quad y \neq 0.$$

Положив $\widetilde{q} := (1+\varepsilon)q$, $\widetilde{l} := l + q\varepsilon$, окончательно имеем

$$|f(x+iy)| \leqslant e^C \cdot \|f\|_{\omega,q,l;S_0} \cdot e^{\widetilde{q}\omega(x)+\widetilde{l}|y|}, \quad y \neq 0.$$

В силу непрерывности функций, данная оценка справедлива и для $y = 0$.

Итак,

$$\|f\|_{\omega,\widetilde{q},\widetilde{l}} \leqslant e^C \cdot \|f\|_{\omega,q,l;S_0},$$

и лемма доказана. □

Возьмем теперь последовательности $\varepsilon_k \downarrow 0$, $\delta_k \downarrow 0$ и, пользуясь условием (SC), найдем соответствующие $r_k \uparrow \infty$. Будем считать числа r_k настолько большими, что $\omega(t) \leqslant t$ при $t \geqslant r_1$ и $2\delta_k r_k \geqslant r_1$.

В силу условия (SC) каждую точку $z = \operatorname{Re} z$ действительной оси с $r_k \leqslant |\operatorname{Re} z| < r_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, можно поместить внутрь окружности C_z^{Re} радиуса $R_z \leqslant \delta_k \omega(\operatorname{Re} z)$, для всех точек ζ которой выполняется неравенство

$$|\mu(\zeta)| \geqslant e^{-\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re}\zeta) - \varepsilon_k |\operatorname{Im}\zeta|}. \tag{3.5}$$

При этом для $\zeta \in C_z^{\mathrm{Re}}$ имеем также

$$|\operatorname{Re}\zeta| \leqslant |\operatorname{Re} z| + 2R_z \leqslant |\operatorname{Re} z| + 2\delta_k\omega(\operatorname{Re} z) \leqslant (1+2\delta_k)|\operatorname{Re} z|; \tag{3.6}$$

$$|\operatorname{Im}\zeta| \leqslant 2R_z \leqslant 2\delta_k\omega(\operatorname{Re} z). \tag{3.7}$$

Далее, целая функция μ имеет нулевой тип при порядке 1, так что μ — функция вполне регулярного роста. Следовательно, вне некоторого исключительного множества кружков $\bigcup_j E_j$, $E_j = \{z : |z - \xi_j| < \rho_j\}$, нулевой линейной плотности выполняется условие $\frac{\ln|\mu(z)|}{|z|} \to 0$ при $|z| \to \infty$. Как известно, кружки E_j можно считать попарно непересекающимися. Поэтому можно считать, что r_k, $k \in \mathbb{N}$, выбраны таким образом, что

$$|\mu(z)| \geqslant e^{-\varepsilon_k|z|}, \quad |z| \geqslant r_k, \ \ z \notin \bigcup_j E_j.$$

В частности, для всех точек $z = i\operatorname{Im} z$ мнимой оси с $r_k \leqslant |\operatorname{Im} z| < r_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, $z \notin \bigcup_j E_j$, справедлива оценка

$$|\mu(i\operatorname{Im} z)| \geqslant e^{-\varepsilon_k|\operatorname{Im} z|}. \tag{3.8}$$

Пусть теперь $z \in \bigcup_j E_j$. Через $j(z)$ обозначим номер кружка, в который попадает точка z. Так как множество кружков E_j имеет нулевую линейную плотность, то

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\bigcup_j E_j}} \frac{\rho_{j(z)}}{|z|} = 0.$$

Поэтому можно считать, что

$$\rho_{j(z)} \leqslant \delta_k |z|, \quad |z| \geqslant r_k,\ \ z \in E_{j(z)}. \tag{3.9}$$

Лемма 3. *Множество*

$$S = [-r_1, r_1] \bigcup [-ir_1, ir_1] \bigcup \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{z=\operatorname{Re} z \\ r_k \leqslant |\operatorname{Re} z| < r_{k+1}}} C_z^{\operatorname{Re}} \Big) \bigcup \Big(i\mathbb{R} \setminus \bigcup_j E_j \Big)$$

слабо достаточно для $H^1_{(\omega),I}$.

Доказательство. С учетом леммы 2 нам достаточно доказать, что для любых $q \in (0,1)$, $l \in (0,a)$ найдутся $\widetilde{q} \in (0,1)$, $\widetilde{l} \in (0,a)$ и $C > 0$ такие, что

$$\|f\|_{\omega,\widetilde{q},\widetilde{l};S_0} \leqslant C \cdot \|f\|_{\omega,q,l;S}, \quad f \in H_{\omega,q,l;S}.$$

Зафиксируем $q \in (0,1)$ и $l \in (0,a)$. Пусть f — произвольная функция из $H_{\omega,q,l;S}$. Тогда

$$|f(\zeta)| \leqslant \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot e^{q\omega(\operatorname{Re}\zeta) + l|\operatorname{Im}\zeta|}, \quad \zeta \in S. \tag{3.10}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что $q + 2\varepsilon < 1$ и $l + 2\varepsilon < a$. Далее, найдем $k_0 = k_0(q,l)$ такое, что при всех $k \geqslant k_0$

$$2l\delta_k \leqslant \varepsilon, \tag{3.11}$$

$$2q\delta_k + l(1 + 2\delta_k) \leqslant l + \varepsilon, \tag{3.12}$$

$$q\omega\big((1+2\delta_k)t\big) \leqslant (q+\varepsilon)\omega(t) + C_1, \quad t \geqslant 0. \tag{3.13}$$

Последнее возможно в силу (2.1).

Пусть z — произвольная точка из S_0, т. е. произвольная точка действительной или мнимой оси. Если $z \in [-r_1, r_1] \bigcup [-ir_1, ir_1] \bigcup \big(i\mathbb{R} \setminus \bigcup_j E_j\big)$, то $z \in S$, так что для $|f(z)|$ справедлива оценка (3.10) с $\zeta = z$.

Рассмотрим оставшиеся случаи.

1) Пусть $z = \operatorname{Re} z$, $|z| > r_1$. Найдем $k \in \mathbb{N}$ такое, что $r_k \leqslant |\operatorname{Re} z| < r_{k+1}$. На соответствующей окружности C_z^{Re} выберем точку ζ такую, что $|f(\zeta)| = \sup\big\{|f(w)| : w \text{ внутри } C_z^{\operatorname{Re}}\big\}$. Тогда на основании (3.10), (3.6) и (3.7) имеем

$$|f(z)| \leqslant |f(\zeta)| \leqslant \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot \exp\Big(q\omega\big((1+2\delta_k)\operatorname{Re} z\big) + 2l\delta_k\omega(\operatorname{Re} z)\Big).$$

При $k \geqslant k_0$ с учетом (3.11) и (3.13) эта оценка может быть продолжена следующим образом:

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot e^{C_1} \cdot e^{(q+2\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z)}.$$

Положив $C_2 := \exp\big(C_1 + q\omega\big((1+2\delta_1)r_{k_0}\big) + 2l\delta_1\omega(r_{k_0})\big)$, получим, что

$$|f(z)| \leqslant C_2 \cdot \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot e^{(q+2\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z)}, \quad z = \operatorname{Re} z,\ \ |z| > r_1. \tag{3.14}$$

2) Если $z = i\operatorname{Im} z$, $|z| > r_1$, $z \in \bigcup_j E_j$, то, как и выше, найдем $j(z) \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ такие, что $z \in E_{j(z)}$ и $r_k \leqslant |z| < r_{k+1}$. На границе кружка $E_{j(z)}$ выберем точку ζ, для которой $|f(\zeta)| = \sup\{|f(w)| : w \in E_{j(z)}\}$. При этом

$$|\operatorname{Re}\zeta| \leqslant 2\rho_{j(z)}, \quad |\operatorname{Im}\zeta| \leqslant |\operatorname{Im} z| + 2\rho_{j(z)}.$$

В силу (3.10) и (3.9) тогда

$$\begin{aligned}|f(z)| \leqslant |f(\zeta)| &\leqslant \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot \exp\big\{q\omega\big(2\rho_{j(z)}\big) + l\big(|\operatorname{Im} z| + 2\rho_{j(z)}\big)\big\}\\ &\leqslant \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot \exp\big\{q\omega(2\delta_k \operatorname{Im} z) + l(1+2\delta_k)|\operatorname{Im} z|\big\}\\ &\leqslant \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot \exp\big\{\big(2q\delta_k + l(1+2\delta_k)\big)|\operatorname{Im} z|\big\}.\end{aligned}$$

При $k \geqslant k_0$ на основании (3.12) имеем

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot e^{(l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z|}.$$

Положив $\rho_0 := \sup\{\rho_{j(z)} : |z| < r_{k_0}\}$, $C_3 := \exp\{q\omega(2\rho_0) + l(r_{k_0} + 2\rho_0)\}$, окончательно заключаем, что

$$|f(z)| \leqslant C_3 \cdot \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot e^{(l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z|}, \quad z = i\operatorname{Im} z, \ |z| \geqslant r_1, \ z \in \bigcup_j E_j. \tag{3.15}$$

Объединяя (3.14) и (3.15), получаем, что для $z \in S_0 \setminus S$

$$|f(z)| \leqslant C \cdot \|f\|_{\omega,q,l;S} \cdot \exp\big\{(q+2\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z|\big\},$$

где $C = \max\{C_2, C_3\}$ не зависит от f.

Положим $\widetilde{q} = q + 2\varepsilon$, $\widetilde{l} = l + \varepsilon$. Тогда $\|f\|_{\omega,\widetilde{q},\widetilde{l};S_0} \leqslant C \cdot \|f\|_{\omega,q,l;S}$. Лемма доказана. □

На основании результата О. В. Епифанова [12, теорема 1] о дискретизации слабо достаточных множеств из множества S можно выделить подмножество $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$, $|\nu_j| \uparrow \infty$, слабо достаточное для $H^1_{(\omega),I}$. При этом из неравенств (3.5) и (3.8) вытекает, что

$$|\mu(\nu_j)| \geqslant e^{-\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re}\nu_j) - \varepsilon_k|\operatorname{Im}\nu_j|}, \quad j \geqslant j(k), \tag{3.16}$$

где $j(k)$ выбрано так, что $|\nu_{j(k)}| \geqslant r_k$.

В завершение параграфа применим результат Ю. Ф. Коробейника о связи между слабо достаточными множествами и АПС. Напомним [7], что последовательность $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ элементов локально выпуклого пространства H называется АПС в H, если любой элемент $x \in H$ раскладывается в абсолютно сходящийся ряд $x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j$. В силу [13, теорема K], так как множество $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ слабо достаточно для $H^1_{(\omega),I}$, система экспонент $\{e^{-i\nu_j x}\}_{j=1}^{\infty}$ будет АПС в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$.

§4. Теорема о частном решении уравнения свертки

Теорема 1. *Пусть* μ — *делитель пространства* $H^1_{(\omega),I}$; $\{e^{-i\nu_j x}\}_{j=1}^{\infty}$ — *соответствующая ему АПС в* $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$. *Если правая часть* g *уравнения свертки* (1.1) *разложена в абсолютно сходящийся в* $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ *ряд* $g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j\, e^{-i\nu_j x}$, *то функция*

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{\mu(\nu_j)}\, e^{-i\nu_j x} \tag{4.1}$$

является частным решением уравнения свертки (1.1) *в пространстве* $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ (*последний ряд сходится абсолютно в* $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$).

Доказательство. Покажем, что ряд (4.1) сходится абсолютно в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$. Как известно [9, лемма 3], при всех $q \in (0,1)$ и $l \in (0,a)$

$$\frac{1}{1+|\nu_j|} \cdot e^{q\omega(\nu_j)+l|\operatorname{Im}\nu_j|} \leqslant |e^{-i\nu_j x}|_{\omega,q,l} \leqslant e^{q\omega(\nu_j)+l|\operatorname{Im}\nu_j|}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Зафиксируем $q \in (0,1)$, $l \in (0,a)$ и обозначим $a_j := \frac{|g_j|}{|\mu(\nu_j)|} \cdot |e^{-i\nu_j x}|_{\omega,q,l}$. Возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $q+\varepsilon < 1$, $l+\varepsilon < a$. Найдем номер k_0 такой, что $\varepsilon_k < \varepsilon$ при $k \geqslant k_0$, и номер $j_0 = j(k_0)$ такой, что при $j \geqslant j_0$ выполняется оценка (3.16).

Для $j \geqslant j_0$ оценим a_j. Пусть $k \geqslant k_0$ таково, что $r_k \leqslant |\nu_j| < r_{k+1}$. На основании (3.16) и (4.2) имеем

$$\begin{aligned} a_j &\leqslant |g_j|\, e^{(q+\varepsilon)\omega(\nu_j)+(l+\varepsilon)|\operatorname{Im}\nu_j|} \\ &\leqslant |g_j| \cdot |e^{-i\nu_j x}|_{\omega,q+2\varepsilon,l+2\varepsilon} \cdot e^{\ln(1+|\nu_j|)-\varepsilon\omega(\nu_j)-\varepsilon|\operatorname{Im}\nu_j|}. \end{aligned}$$

В силу ограничения (γ) на вес ω существует $C > 1$, при котором

$$\ln(1+t) \leqslant \varepsilon\omega(t) + \ln C, \quad t \geqslant 0.$$

Поэтому $a_j \leqslant C \cdot |g_j| \cdot |e^{-i\nu_j x}|_{\omega,q+2\varepsilon,l+2\varepsilon}$, $j \geqslant j_0$. Так как

$$\sum_{j=1}^{\infty} |g_j| \cdot |e^{-i\nu_j x}|_{\omega,q+2\varepsilon,l+2\varepsilon} < \infty,$$

то $\sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$, т. е. ряд (4.1) сходится абсолютно в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$. Поскольку пространство $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ полно, сумма f этого ряда представляет собой некоторую функцию из $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$, которая, очевидно, является решением уравнения свертки (1.1). Теорема доказана. □

§5. Частное и общее решения уравнений свертки в случае $\omega(t) = t^{\rho(t)}$

Рассмотрим уравнение свертки (1.1) в пространствах $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$, когда $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, $\rho(t) \to \rho \in (0,1)$ — некоторый уточненный порядок. Положим $\rho(z) := \rho(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$.

Каждый такой вес является строгим (см. §2), так что все мультипликаторы соответствующего пространства $H^1_{(\omega),I}$ являются сильными мультипликаторами, а все уравнения свертки (1.1) в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ представляют собой дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (1.2).

Допустим, что символ μ уравнения (1.2) задан своими простыми нулями:

$$\mu(z) = \prod_{s=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z}{\lambda_s}\Big), \quad |\lambda_s| \uparrow \infty,$$

причем последовательность нулей удовлетворяет условию

$$\lim_{s\to\infty} \frac{s}{|\lambda_s|^{\rho(\lambda_s)}} = 0 \tag{5.1}$$

и образует R-множество (см. [14]). Последнее означает, что точки λ_s расположены внутри углов с общей вершиной в начале координат, не имеющих других общих точек, причем если перенумеровать точки множества (λ_s) внутри любого из этих углов в порядке возрастания их модулей, то для точек, попавших внутрь одного угла,

$$|\lambda_{s+1}| - |\lambda_s| > d|\lambda_s|^{1-\rho(\lambda_s)}, \quad s \in \mathbb{N}, \text{ при некотором } d > 0. \tag{5.2}$$

Равенство (5.1) равносильно тому, что μ имеет нулевой тип при порядке $\rho(r)$, т. е. является мультипликатором пространства $H^1_{(\omega),I}$. В свою очередь, условие (5.2) обеспечивает то, что μ — делитель $H^1_{(\omega),I}$, т. е. удовлетворяет условию (SC). Действительно, при выполнении (5.2) μ имеет вполне регулярный рост при порядке $\rho(r)$, а значит, вне некоторого исключительного множества кружков $C_s = \{z : |z - \lambda_s| < r_s\}$, $s \in \mathbb{N}$, справедливо равенство

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\ln|\mu(z)|}{|z|^{\rho(z)}} = 0. \tag{5.3}$$

Как известно [15, замечание после теоремы 1.2.6], в рассматриваемом нами случае в качестве радиусов r_s исключительных кружков можно взять любое фиксированное число $\gamma > 0$. При достаточно малом γ кружки C_s будут попарно непересекающимися.

Подобные символы μ, порождающие разрешимые уравнения свертки в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$, рассматривались в работе [16].

Понятно, что в данном случае общее решение однородного уравнения $\sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)} = 0$, соответствующего уравнению (1.2), в пространстве $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ имеет вид

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s e^{-i\lambda_s x}, \quad \alpha_s \in \mathbb{C}, \ \ s \in \mathbb{N}, \tag{5.4}$$

причем ряд (5.4) сходится абсолютно в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$. Действительно, поскольку нули λ_s символа μ располагаются достаточно далеко друг от друга, группировать их и соответствующие им элементарные решения $e^{-i\lambda_s x}$ не нужно (см. §2 и [2]).

Цель этого и следующего параграфов заключается в том, чтобы по нулям λ_s, $s \in \mathbb{N}$, символа μ в явном виде построить показатели ν_j системы $\{e^{-i\nu_j x}\}_{j=1}^{\infty}$ из теоремы 1. Заметим, что числа ν_j будут выбираться на действительной положительной полуоси.

В настоящем параграфе будет описан способ построения последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ и сформулированы результаты о частном и общем решении уравнений свертки, а все обоснования, ввиду их громоздкости, будут приведены в следующем, заключительном параграфе.

Выберем достаточно малое $\gamma < \frac{1}{4a}$. Пусть $C_s = \{z : |z - \lambda_s| < \gamma\}$ — соответствующие исключительные кружки, вне которых выполняется условие (5.3).

Положительные нули $\frac{\pi n}{a}$, $n \in \mathbb{N}$, функции $\sin az$ разобьем на две возрастающие последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ и $\eta_1, \eta_2, \dots$ по правилу: точки $\pm\eta_j$ не попадают в исключительные кружки C_s, а ξ_j или $-\xi_j$ попадают в C_s. Мы будем рассматривать наиболее сложный случай, когда точек ξ_j бесконечно много. Положим $K_j^{\pm} = \{z : |z \mp \xi_j| < \gamma\}$, $j \in \mathbb{N}$.

Далее, пользуясь [15, теорема 1.2.3], из последовательности $\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{\pi n}{a}\right)_{n=1}^{\infty}$ выделяем подпоследовательность $(\zeta_k)_{k=1}^{\infty}$, лежащую вне $\bigcup_s C_s$, такую, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\zeta_k^{\rho(\zeta_k)}} = \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi\rho}{2}; \tag{5.5}$$

$$\zeta_{k+1} - \zeta_k > d_1 \zeta_k^{1-\rho(\zeta_k)}, \quad k \in \mathbb{N}, \text{ при некотором } d_1 > 0. \tag{5.6}$$

При этом автоматически $\zeta_k \notin \bigcup_j K_j^{\pm}$, $k \in \mathbb{N}$.

В качестве искомой последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ берем объединение последовательностей $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(\zeta_k)_{k=1}^{\infty}$.

В §6 будет доказано, что при таком выборе чисел ν_j, $j \in \mathbb{N}$, система $\{e^{-i\nu_j x}\}_{j=1}^{\infty}$ является АПС в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$, причем для $|\mu(\nu_j)|$ выполняются оценки (3.16). Тем самым будет установлена

Теорема 2. *Пусть* $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, $\rho(t) \to \rho \in (0,1)$ *— некоторый уточненный порядок;* $\mu(z) = \prod_{s=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_s}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(-i)^k z^k$, *последовательность* $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* (5.1) *и образует* R-*множество;* $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ *— последовательность, построенная выше по точкам* λ_s.

Пусть, далее, правая часть g *уравнения* (1.2) *представлена абсолютно сходящимся в* $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ *рядом* $g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j e^{-i\nu_j x}$. *Тогда функция* $f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{\mu(\nu_j)}\, e^{-i\nu_j x}$ *является частным решением этого уравнения в пространстве* $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$, *а его общее решение в* $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ *имеет вид*

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s e^{-i\lambda_s x} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{\mu(\nu_j)}\, e^{-i\nu_j x}, \quad \alpha_s \in \mathbb{C}, \;\; s \in \mathbb{N}.$$

Замечание 1. Если для нулей λ_s символа μ выполняется условие

$$|\operatorname{Im}\lambda_s| \geqslant \delta_0, \quad s \geqslant s_0, \tag{5.7}$$

то в качестве точек η_k можно взять $\eta_k = \frac{\pi k}{a}$, $k \in \mathbb{N}$.

Приведем конкретный пример построения последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$.

Пример 1. Пусть $\omega(t) = t^{1/2}$; $\mu(z) = \prod_{s=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_s}\right)$, $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (5.1), (5.2) и (5.7). Тогда в качестве последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ в теореме 2 можно взять объединение последовательностей

$$\eta_k = \frac{\pi k}{a}, \quad k = 1, \dots, \text{ и } \zeta_k = \frac{\pi}{2a} + \frac{\pi[a\pi k^2]}{a}, \quad k = 1, \dots$$

Здесь, как обычно, $[a\pi k^2]$ — целая часть числа $a\pi k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Действительно, нетрудно видеть, что условия (5.5) и (5.6) для последовательности $(\zeta_k)_{k=1}^{\infty}$ в данном случае выполнены.

§6. Доказательство результатов §5

Основная задача настоящего параграфа — доказать, что если числа ν_j, $j \in \mathbb{N}$, выбраны так, как описано в §5, то система $\{e^{-i\nu_j x}\}_{j=1}^{\infty}$ является АПС в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$, причем для $|\mu(\nu_j)|$, $j \in \mathbb{N}$, справедливы оценки (3.16).

В соответствии с [17, теорема 3], система $\{e^{-i\nu_j x}\}_{j=1}^{\infty}$ является АПС в $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(I)$ тогда и только тогда, когда существует целая функция $L(z)$ такая, что

(A) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C > 0$, при котором

$$|L(z)| \leqslant C \cdot \exp\left\{(1+\varepsilon)|z|^{\rho(z)} + (a+\varepsilon)|\operatorname{Im} z|\right\}, \quad z \in \mathbb{C};$$

(В) имеется последовательность $R_n \uparrow \infty$, обладающая свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ имеется номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что

$$|L(z)| \geqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)|z|^{\rho(z)} + (a-\varepsilon)|\operatorname{Im} z|\right\}, \quad |z| = R_n,\ n \geqslant n_0(\varepsilon);$$

(Г) при всех $q \in (0,1)$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\nu_j)|} \exp q\nu_j^{\rho(\nu_j)} < \infty.$$

Целую функцию $L(z)$ с перечисленными свойствами будем строить в виде $L(z) = L_1(z) \cdot L_2(z)$, где

$$L_1(z) = az\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{\eta_k^2}\Big), \quad L_2(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{\zeta_k^2}\Big)$$

(точки η_k и ζ_k, $k \in \mathbb{N}$, были выбраны в §5).

Покажем, что для функции $L(z)$ выполняются условия (А), (В) и (Г).

Начнем с изучения свойств функции $L_1(z)$. По построению $L_1(z) = \frac{\sin az}{\varphi(z)}$, где $\varphi(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\big(1 - \frac{z^2}{\xi_j^2}\big)$; ξ_j, $j \in \mathbb{N}$, — положительные нули $\sin az$ такие, что ξ_j или $-\xi_j$ попадают в исключительные кружки C_s символа μ. Так как диаметр кружка C_s равен $2\gamma < \frac{1}{a}$, то в каждом C_s может оказаться лишь одна из точек ξ_j. Из этого, очевидно, следует, что, как и $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$, последовательность $(\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ образует R-множество и что $\lim_{j\to\infty} \frac{j}{\xi_j^{\rho(\xi_j)}} = 0$. Значит, φ имеет нулевой тип при порядке $\rho(r)$ и является функцией вполне регулярного роста при этом порядке. Соответственно вне кружков $K_j^{\pm} = \{z : |z \mp \xi_j| < \gamma\}$ выполняется условие

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\ln|\varphi(z)|}{|z|^{\rho(z)}} = 0.$$

Значит, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $r_0(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|\varphi(z)| \leqslant e^{\varepsilon|z|^{\rho(z)}}, \quad |z| \geqslant r_0(\varepsilon); \tag{6.1}$$

$$|\varphi(z)| \geqslant e^{-\varepsilon|z|^{\rho(z)}}, \quad |z| \geqslant r_0(\varepsilon),\ z \notin \bigcup_j K_j^{\pm}. \tag{6.2}$$

Пусть номер $k_0(\varepsilon)$ выбран так, что $\eta_k \geqslant r_0(\varepsilon)$ и $\zeta_k \geqslant r_0(\varepsilon)$, $k \geqslant k_0(\varepsilon)$. Тогда на основании (6.1)

$$|L_1'(\eta_k)| = \frac{a}{|\varphi(\eta_k)|} \geqslant a\, e^{-\varepsilon\eta_k^{\rho(\eta_k)}}, \quad k \geqslant k_0(\varepsilon). \tag{6.3}$$

Далее, из (6.1) и выбора точек ζ_k вытекает, что

$$|L_1(\zeta_k)| = \frac{1}{|\varphi(\zeta_k)|} \geqslant e^{-\varepsilon\zeta_k^{\rho(\zeta_k)}}, \quad k \geqslant k_0(\varepsilon). \tag{6.4}$$

Остальные свойства функции $L_1(z)$ представлены в следующих леммах.

Лемма 4. *Функция $L_1(z)$ удовлетворяет следующей оценке сверху*

$$|L_1(z)| \leqslant e^{a\gamma} \cdot \exp\left\{2\varepsilon|z|^{\rho(z)} + a|\operatorname{Im} z|\right\}, \quad |z| \geqslant r_0(\varepsilon). \tag{6.5}$$

Доказательство. Так как $|\sin az| \leqslant e^{a|\operatorname{Im} z|}$ при всех $z \in \mathbb{C}$, то в силу (6.2)

$$|L_1(z)| \leqslant \exp\left\{\varepsilon|z|^{\rho(z)} + a|\operatorname{Im} z|\right\}, \quad |z| \geqslant r_0(\varepsilon), \ \ z \notin K_j^{\pm}.$$

Пусть теперь точка z попадает в какой-то из исключительных кружков $K_j^{\pm}$, например, в $K_j^{+} = \{t : |t-\xi_j| < \gamma\}$, и пусть $|z| \geqslant r_0(\varepsilon)$. На окружности $|t-\xi_j| = \gamma$ найдем точку w такую, что $|L_1(w)| = \max\{|L_1(t)| : |t-\xi_j| \leqslant \gamma\}$. При этом $|w| \leqslant |z| + 2\gamma$, $|\operatorname{Im} w| \leqslant |\operatorname{Im} z| + \gamma$. Увеличив при необходимости $r_0(\varepsilon)$, будем считать, что

$$(t+2\gamma)^{\rho(t+2\gamma)} \leqslant 2t^{\rho(t)}, \quad t \geqslant r_0(\varepsilon).$$

Значит,

$$|L_1(z)| \leqslant |L_1(w)| \leqslant \exp\left\{\varepsilon|w|^{\rho(w)} + a|\operatorname{Im} w|\right\} \leqslant e^{a\gamma} \cdot \exp\left\{2\varepsilon|z|^{\rho(z)} + a|\operatorname{Im} z|\right\}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 5. *На окружностях $|z| = R_n$, где $R_n = \frac{\pi}{4a} + \frac{\pi n}{a}$, $n \in \mathbb{N}$, выполняются оценки*

$$|L_1(z)| \geqslant M \cdot \exp\left\{-\varepsilon|z|^{\rho(z)} + a|\operatorname{Im} z|\right\}, \quad n \geqslant n_0(\varepsilon), \tag{6.6}$$

где $M := \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$.

Доказательство. Пусть $n_0(\varepsilon)$ таково, что $R_n \geqslant r_0(\varepsilon)$ при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Тогда для $|\varphi(z)|$ на окружностях $|z| = R_n$, $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, справедлива оценка (6.1).

Оценим $|\sin are^{i\theta}|$ при $r = R_n$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, достаточно рассмотреть $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Имеем, что

$$|\sin are^{i\theta}| = \frac{1}{2} A(r,\theta) \cdot e^{ar\sin\theta}, \quad r \geqslant 0, \ \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

где $A(r,\theta) = \left|1 - e^{-2ar(\sin\theta - i\cos\theta)}\right|$. Для $A(r,\theta)$ выполняются следующие неравенства:

$$A(r,\theta) \geqslant 1 - e^{-2ar\sin\theta}; \quad A(r,\theta) \geqslant \sqrt{1 - \cos^2(2ar\cos\theta)}.$$

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Если $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ таково, что $2aR_n \sin\theta \leqslant \frac{\pi}{4}$, то

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n = 2aR_n - \frac{\pi}{4} \leqslant 2aR_n \cos\theta \leqslant 2aR_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

так что $A(R_n, \theta) \geqslant \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ для этих θ. Если же $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ таково, что $2aR_n \sin\theta > \frac{\pi}{4}$, то $A(R_n, \theta) \geqslant 1 - e^{-\frac{\pi}{4}}$. В целом $A(R_n, \theta) \geqslant 2M$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Таким образом,

$$|\sin az| \geqslant M\, e^{a|\operatorname{Im} z|}, \quad |z| = R_n, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Объединяя последнюю оценку с оценкой (6.1), получаем (6.6). $\square$

Перейдем к изучению свойств функции $L_2(z)$. В силу (5.6), $L_2(z)$ является функцией вполне регулярного роста при порядке $\rho(r)$. Далее, учитывая равенство (5.5) и [15, теорема 1.2.7], заключаем, что ее индикатор при этом порядке равен

$$H_2(\theta) = \frac{\cos\rho\big(\theta - \frac{\pi}{2}\big)}{\cos\frac{\rho\pi}{2}}, \quad \theta \in (0, \pi).$$

Поэтому, увеличив при необходимости $r_0(\varepsilon)$, можно считать, что

$$|L_2(re^{i\theta}| \leqslant \exp\left\{\Big(\frac{\cos\rho\big(\theta - \frac{\pi}{2}\big)}{\cos\frac{\rho\pi}{2}} + \varepsilon\Big) r^{\rho(r)}\right\}, \quad r \geqslant r_0(\varepsilon), \ \ \theta \in [0, \pi]; \tag{6.7}$$

$$\begin{gathered} |L_2(re^{i\theta}| \geqslant \exp\left\{\Big(\frac{\cos\rho\big(\theta - \frac{\pi}{2}\big)}{\cos\frac{\rho\pi}{2}} - \varepsilon\Big) r^{\rho(r)}\right\}, \\ r \geqslant r_0(\varepsilon), \quad \theta \in [0, \pi], \quad re^{i\theta} \notin \bigcup_l B_l^{\pm}, \end{gathered} \tag{6.8}$$

где $B_l^{\pm} = \{z : |z \mp \zeta_l| < \gamma\}$, $l \in \mathbb{N}$, — исключительные кружки функции $L_2(z)$. В частности, поскольку точки η_k не попадают в $B_l^{\pm}$, $k, l \in \mathbb{N}$, то

$$|L_2(\eta_k)| \geqslant e^{(1-\varepsilon)\eta_k^{\rho(\eta_k)}}, \quad k \geqslant k_0(\varepsilon). \tag{6.9}$$

Далее, известно [15, теорема 1.2.8], что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{|L_2'(\zeta_k)|}}{\zeta_k^{\rho(\zeta_k)}} = -1.$$

Поэтому $k_0(\varepsilon)$ можно считать настолько большим, что

$$|L_2'(\zeta_k)| > e^{(1-\varepsilon)\zeta_k^{\rho(\zeta_k)}}, \quad k \geqslant k_0(\varepsilon). \tag{6.10}$$

Установим, наконец, что функция $L(z) = L_1(z) \cdot L_2(z)$ является искомой.

Лемма 6. *Функция* $L(z) = L_1(z) \cdot L_2(z)$ *обладает свойствами* (А), (В) *и* (Г).

Доказательство. (А) Объединяя неравенства (6.5) и (6.7), получаем, что при всех $r \geqslant r_0(\varepsilon)$ и $\theta \in [0, \pi]$

$$|L(re^{i\theta}| \leqslant e^{a\gamma} \cdot \exp\Big\{\Big(\frac{\cos\rho\big(\theta - \frac{\pi}{2}\big)}{\cos\frac{\rho\pi}{2}} + 3\varepsilon\Big) r^{\rho(r)} + ar\sin\theta\Big\}.$$

Найдем $\theta_0(\varepsilon) \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ такое, что

$$1 - \varepsilon < \frac{\cos\rho\big(\theta - \frac{\pi}{2}\big)}{\cos\frac{\rho\pi}{2}} < 1 + \varepsilon\,,\ \theta \in [0, \theta_0(\varepsilon)] \cup [\pi - \theta_0(\varepsilon), \pi]. \tag{6.11}$$

Тогда при этих θ

$$|L(re^{i\theta}| \leqslant e^{a\gamma} \cdot \exp\big\{(1 + 4\varepsilon) r^{\rho(r)} + ar\sin\theta\big\}, \quad r \geqslant r_0(\varepsilon).$$

Если же $\theta \in [\theta_0(\varepsilon), \pi - \theta_0(\varepsilon)]$, то, опять же увеличив при необходимости $r_0(\varepsilon)$, имеем, что при $r \geqslant r_0(\varepsilon)$

$$\Big(\frac{\cos\rho\big(\theta - \frac{\pi}{2}\big)}{\cos\frac{\rho\pi}{2}} + 3\varepsilon\Big) r^{\rho(r)} \leqslant \Big(\frac{1}{\cos\frac{\rho\pi}{2}} + 3\varepsilon\Big) r^{\rho(r)} \leqslant \varepsilon r \sin\theta_0(\varepsilon) \leqslant \varepsilon r \sin\theta.$$

Значит, в этом случае

$$|L(re^{i\theta})| \leqslant e^{a\gamma} \cdot e^{(a+\varepsilon) r \sin\theta}, \quad r \geqslant r_0(\varepsilon).$$

Учитывая, что $L(-z) = L(z)$, $z \in \mathbb{C}$, окончательно получаем, что

$$|L(z)| \leqslant e^{a\gamma} \exp\big\{(1 + 4\varepsilon)|z|^{\rho(z)} + (a + \varepsilon)|\operatorname{Im} z|\big\}, \quad |z| \geqslant r_0(\varepsilon).$$

Таким образом, условие (A) выполнено.

(В) Рассмотрим окружности $|z| = R_n$, $R_n = \frac{\pi}{4a} + \frac{\pi n}{a}$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, они не пересекаются с исключительными кружками $B_l^{\pm}$, $l \in \mathbb{N}$. Следовательно, в силу (6.6) и (6.8) на этих окружностях при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$|L(R_n e^{i\theta})| \geqslant M \exp\Big\{\Big(\frac{\cos\rho\big(\theta - \frac{\pi}{2}\big)}{\cos\frac{\rho\pi}{2}} - 2\varepsilon\Big) R_n^{\rho(R_n)} + aR_n\sin\theta\Big\}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Используя левую часть неравенства (6.11), получаем, что при

$$\theta \in [0, \theta_0(\varepsilon)] \bigcup [\pi - \theta_0(\varepsilon), \pi]$$

и $n \geqslant n_0(\varepsilon)$

$$|L(R_n e^{i\theta})| \geqslant M \exp\left\{(1-3\varepsilon)R_n^{\rho(R_n)} + aR_n \sin\theta\right\}.$$

Если же $\theta \in [\theta_0(\varepsilon), \pi - \theta_0(\varepsilon)]$, то, считая $n_0(\varepsilon)$ настолько большим, что

$$(1+2\varepsilon)R_n^{\rho(R_n)} < \varepsilon R_n \sin\theta_0(\varepsilon), \quad n \geqslant n_0(\varepsilon),$$

заключаем, что

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\cos\rho\big(\theta-\frac{\pi}{2}\big)}{\cos\frac{\rho\pi}{2}} - 2\varepsilon\Big)R_n^{\rho(R_n)} + aR_n\sin\theta &\geqslant -2\varepsilon R_n^{\rho(R_n)} + aR_n\sin\theta\\ &\geqslant R_n^{\rho(R_n)} + (a-\varepsilon)R_n\sin\theta - (1+2\varepsilon)R_n^{\rho(R_n)} + \varepsilon R_n \sin\theta_0(\varepsilon)\\ &\geqslant R_n^{\rho(R_n)} + (a-\varepsilon)R_n\sin\theta.\end{aligned}$$

Объединяя оба рассмотренных случая, учитывая снова равенство $L(-z) = L(z)$, $z \in \mathbb{C}$, окончательно получаем, что на окружностях $|z| = R_n$, $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, справедлива оценка

$$|L(z)| \geqslant M \exp\left\{(1-3\varepsilon)|z|^{\rho(z)} + (a-\varepsilon)|\operatorname{Im} z|\right\}.$$

Значит, $L(z)$ удовлетворяет условию (В).

(Г) Наконец, оценим $|L'(\eta_k)|$ и $|L'(\zeta_k)|$, $k \in \mathbb{N}$. Имеем, что

$$L'(\eta_k) = L_1'(\eta_k)\cdot L_2(\eta_k), \quad L'(\zeta_k) = L_1(\zeta_k)\cdot L_2'(\zeta_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

На основании (6.3) и (6.9)

$$|L'(\eta_k)| \geqslant a \cdot e^{(1-2\varepsilon)\eta_k^{\rho(\eta_k)}}, \quad k \geqslant k_0(\varepsilon).$$

Аналогично в силу (6.4) и (6.10)

$$|L'(\zeta_k)| \geqslant e^{(1-2\varepsilon)\zeta_k^{\rho(\zeta_k)}}, \quad k \geqslant k_0(\varepsilon).$$

Очевидно, из этих неравенств вытекает справедливость условия (Г). Лемма доказана. □

Автор выражает благодарность рецензенту за большое внимание к работе.

Список литературы

[1] Абанина Д. А., *Разрешимость уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале*, Сиб. мат. ж. **53** (2012), №3, 477–494.

[2] Абанина Д. А., *Экспоненциально-полиномиальный базис в пространстве решений однородного уравнения свертки на классах ультрадифференцируемых функций*, Владикавказ. мат. ж. **13** (2011), №4, 3–17.

[3] Meise R., Taylor B. A., Vogt D., *Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions*, Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), no. 4, 729–756.

[4] Meise R., Schwerdtfeger K., Taylor B. A., *Kernels of slowly decreasing convolution operators*, Doğa Mat. **10** (1986), no. 1, 176–197.

[5] Bonet J., Galbis A., Meise R., *On the range of convolution operators on non-quasianalytic ultradifferentiable functions*, Studia Math. **126** (1997), no. 2, 171–198.

[6] Леонтьев А. Ф., *О представлении произвольных функций рядами Дирихле*, Докл. АН СССР **164** (1965), №1, 40–42.

[7] Коробейник Ю. Ф., *Представляющие системы*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **42** (1978), №2, 325–355.

[8] Абанина Д. А., *Представление решений уравнений свертки в неквазианалитических классах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа*, Изв. вузов. Мат. **2011**, №6, 1–9.

[9] Абанин А. В., Филипьев И. А., *Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространствам бесконечно дифференцируемых функций*, Сиб. мат. ж. **47** (2006), №3, 485–500.

[10] Schneider D. M., *Sufficient sets for some spaces of entire functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **197** (1974), 161–180.

[11] Boas R. P., *Entire functions*, Acad. Press, New York, 1954.

[12] Епифанов О. В., *Вариации слабо достаточных множеств в пространствах аналитических функций*, Изв. вузов. Мат. **1986**, №7, 50–56.

[13] Коробейник Ю. Ф., *Индуктивные и проективные топологии. Достаточные множества и представляющие системы*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **50** (1986), №3, 539–565.

[14] Левин Б. Я., *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.

[15] Леонтьев А. Ф., *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.

[16] Полякова Д. А., *О линейном непрерывном правом обратном к оператору свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций*, Мат. заметки **96** (2014), №4, 548–566.

[17] Абанин А. В., *Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы*, Мат. заметки **57** (1995), №4, 483–497.

Южный федеральный университет
344090, Ростов-на-Дону
ул. Мильчакова, 8а
Россия

Южный математический институт
ВНЦ РАН и РСО-А
362027, Владикавказ
ул. Маркуса, 22
Россия
E-mail: forsites1@mail.ru

Поступило 19 мая 2014 г.