А. Г. Иванов, Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений. I,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 3, 312–324

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 312–324

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.977.1

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ. I

© 2005 г. А. Г. Иванов

В ряде задач оптимального управления (см., например, [1, 2] и приведенную там библиографию), чтобы учесть одновременно и геометрические ограничения на управление, а также смешанные ограничения (имеющие большое прикладное значение), допустимые управления $w(\cdot)$ – измеримые, ограниченные в существенном на заданном временном отрезке функции – представляют в виде $w(\cdot) = (v(\cdot), u(\cdot))$. В задачах же оптимального управления периодическими движениями, как отмечено, например, в [3, 4], для приложений представляют интерес уже управления вида $(q, u(\cdot))$, где q принадлежит заданному множеству $Q \subset \mathbb{R}^k$, а $u : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$ – измеримая ω-периодическая функция. В настоящей работе продолжены исследования, начатые в [5–7]. Приводятся необходимые условия экстремума для почти периодической (п.п.) задачи оптимального управления при наличии ограничений на средние, в которой в качестве допустимых управлений рассматриваются пары $(v(\cdot), u(\cdot))$, где $v(\cdot)$ принадлежит заданному подмножеству $\mathfrak{S}$ пространства $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ п.п. по Бору функций, а $u(\cdot)$ – множеству $S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ п.п. по Степанову функций. Эти условия выводятся из соответствующих необходимых условий для овыпукленной к исходной задачи, в которой множество $S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ расширено до мерозначных п.п. отображений.

1. Основные определения и обозначения. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство с нормой $|\cdot|$, $\overline{\operatorname{orb}}(\varphi)$ – замыкание (в $\mathbb{R}^n$) орбиты функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ и $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ – пространство линейных операторов $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n) \doteq \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ с нормой $|L| \doteq \max\limits_{|x|\le 1} |Lx|$. Обозначим, далее, через $B(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ и $S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ $(\mathfrak{Y} \subset \mathbb{R}^n)$ совокупность отображений $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{Y}$, которые п.п. в смысле Бора и соответственно в смысле Степанова относительно метрики d_l $(d \doteq d_1)$ [8]. Напомним, что для каждой п.п. функции f (как по Бору, так и по Степанову) существует среднее $M\{f(t)\} \doteq \lim\limits_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T f(t)\,dt$. Теперь если $(\mathfrak{X}, \rho)$ – компактное метрическое пространство, то через $B(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ обозначаем совокупность непрерывных отображений

$$(t, x) \mapsto f(t, x) \in \mathfrak{Y}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \tag{1.1}$$

которые п.п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Бора равномерно по $x \in \mathfrak{X}$ [9]. Всюду далее каждую функцию из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$ представляем в виде отображения (1.1) и через $S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$ обозначаем подмножество из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$ таких функций вида (1.1), что для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\tau \in \mathbb{R} : \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max\limits_{x\in\mathfrak{X}} |f(s+\tau, x) - f(s, x)|\, ds < \varepsilon\}$ относительно плотно.

Лемма 1.1 [10]. *Если* $f \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$, *то* $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0} (\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \omega_\gamma[f(s, \cdot), \mathfrak{X}] ds) = 0$, *где* $\omega_\gamma[f(s, \cdot), \mathfrak{X}]$ – γ*-колебание на* $\mathfrak{X}$ *непрерывной функции* $x \mapsto f(s, x)$.

Определение 1.1. Отображение (1.1) называется п.п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по $x \in \mathfrak{X}$, пишем $f \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, если оно удовлетворяет одновременно следующим условиям: при каждом $x \in \mathfrak{X}$ $f(\cdot, x) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ и $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0} \mathfrak{d}_\gamma[f, \mathfrak{X}] = 0$, где $\mathfrak{d}_\gamma[f, \mathfrak{X}] \doteq$ $\doteq \sup\{d(f(\cdot, x_1), f(\cdot, x_2)),\ x_1, x_2 \in \mathfrak{X},\ \rho(x_1, x_2) \le \gamma\}$.

Определим мерозначные п.п. функции*). Для этого обозначим через $(\operatorname{frm}(\mathfrak{U}), |\cdot|_w)$ [11] нормированное пространство таких мер Радона на $\mathbb{R}^m$, носитель которых содержится в

*) О важности процедуры расширения или овыпукления в задачах оптимального управления см., например, [1, 2, 11–14], а в игровых задачах [15, 16] и приведенную там библиографию.

$\mathfrak{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, и через $\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ его подмножество, состоящее из вероятностных мер Радона. В дальнейшем $\mathrm{DIR}(\mathfrak{U})$ – совокупность мер Дирака δ_u, сосредоточенных в точках $u \in \mathfrak{U}$, и $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$ – совокупность таких измеримых отображений $\mu : \mathbb{R} \to (\mathrm{frm}(\mathfrak{U}), |\cdot|_w)$, что $\|\mu\| \doteq \operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |\mu(t)|(\mathfrak{U}) < \infty$ ($|\mu(t)|(\mathfrak{U})$ – вариация меры $\mu(t)$). Пусть далее $\mathfrak{V}_n = \mathfrak{V}_n(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$ – совокупность отображений $\varphi : \mathbb{R} \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих следующим условиям: при п.в. $t \in \mathbb{R}$ $\varphi(t, \cdot) \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$, для каждого $u \in \mathfrak{U}$ отображение $t \mapsto \varphi(t, u) \in \mathbb{R}^n$, $t \in R$, измеримо и существует такая функция $\psi_\varphi \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, что при п.в. $t \in \mathbb{R}$ $\max_{u\in\mathfrak{U}} |\varphi(t, u)| \le \psi_\varphi(t)$. В $\mathfrak{V}_n$ можно ввести норму $\|\cdot\|_{\mathfrak{V}_n}$ [10] и показать, что нормированное пространство $(\mathfrak{V}_n, \|\cdot\|_{\mathfrak{V}_n})$ сепарабельно и изометрически изоморфно $L_1(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$. Кроме того, следуя схеме доказательства теоремы Данфорда–Петтиса [11, с. 299], можно показать, что $\mathcal{M} \cong \mathfrak{V}_1^*$. Последнее позволяет [10] в $\mathcal{M}$ ввести норму $\|\cdot\|_w$, относительно которой множества $\mathcal{M}_1 \doteq \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, $\Sigma_1 \doteq \{\mu \in \mathcal{M} : \|\mu\| \le 1\}$ компактны и если $\{\nu_j\}_{j=1}^\infty \subset \Sigma_1$, то $\lim_{j\to\infty} \|\nu_j\|_w = 0$ в том и только в том случае, когда для каждой функции $\varphi \in \mathfrak{V}_1$ выполнено равенство $\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \langle \nu_j(s), \varphi(s, u)\rangle\, ds = 0$, где $\langle \nu_j(s), \varphi(s, u)\rangle \doteq \int_{\mathfrak{U}} \varphi(s, u)\nu_j(s)(du)$.

Определение 1.2. Отображение $\mu \in \mathcal{M}$ называется п.п. по Степанову, если для любой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ отображение $t \mapsto \langle \mu(t), c(u)\rangle \doteq \int_{\mathfrak{U}} c(u)\mu(t)(du)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Совокупность всех п.п. по Степанову отображений из $\mathcal{M}$ обозначим APM и $\mathrm{APM}_1 \doteq \mathrm{APM} \cap \mathcal{M}_1$. Далее, через $\mathrm{APM}_1^{(1)}$ обозначим совокупность таких $\mu \in \mathrm{APM}_1$, что $\mu(t) = \delta_{u(t)}$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$ и некотором измеримом отображении $u : \mathbb{R} \to \mathfrak{U}$. Можно показать, что $S(\mathbb{R}, \mathfrak{U}) \cong \mathrm{APM}_1^{(1)}$ и, следовательно, каждое $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ можно рассматривать также как элемент множества $\mathrm{APM}_1^{(1)} \subset \mathrm{APM}_1$, отождествляя его с отображением $t \mapsto \delta_{u(t)} \in \mathrm{DIR}(\mathfrak{U})$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 1.3. Отображение $(t, x) \mapsto \mu(t, x) \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ называется п.п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по $x \in \mathfrak{X}$, пишем $\mu \in S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, если для любой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ отображение $(t, x) \mapsto \langle \mu(t, x), c(u)\rangle \doteq \int_{\mathfrak{U}} c(u)\mu(t, x)(du)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathbb{R})$.

В работе [10] показано, что $u \in S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ в том и только в том случае, если отображение $(t, x) \mapsto \delta_{u(t,x)}$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$.

Пусть далее G – область в $\mathbb{R}^n$, дифференцируемое по x и v в каждой точке $(t, x, v, u) \in \mathbb{R} \times G \times \mathbb{R}^k \times \mathfrak{U}$ отображение $(t, x, v, u) \mapsto f(t, x, v, u) \in \mathbb{R}^n$ для любых $K \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ и $V \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $f \in B(\mathbb{R} \times K \times V \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$; 2) $f'_x \in S(\mathbb{R}, C(K \times V \times \mathfrak{U}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)))$; 3) измеримое отображение $t \mapsto \max_{(x,v,u)\in K\times V\times\mathfrak{U}} |f'_x(t, x, v, u)|$, $t \in \mathbb{R}$, ограничено; 4) $f'_v \in S(\mathbb{R}, C(K \times V \times \mathfrak{U}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)))$.

Теорема 1.1 [10]. *Пусть $K \in \mathrm{comp}(G)$ и функция $g \in S(\mathbb{R}, C(K \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$ ограничена. Тогда для любой функции $x(\cdot) \in S(\mathbb{R}, K)$ отображение $(t, u) \mapsto g(t, x(t), u)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, C(K \times \mathfrak{U}, \mathbb{R}^n))$ и, если множество $\mathfrak{M} \subset \Sigma_1 \cap \mathrm{APM}$ равностепенно п.п.*), то совокупность отображений $\{t \mapsto \langle \mu(t), g(t, x(t), u)\rangle$, $\mu \in \mathfrak{M}\}$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ и является равностепенно п.п.*

Зафиксируем множество $\mathfrak{S} \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ и при $v(\cdot) \in \mathfrak{S}$ рассмотрим (см. теорему 1.1 и [10]) п.п. по Степанову систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \langle \mu(t), f(t, x, v(t), u)\rangle = \int_{\mathfrak{U}} f(t, x, v(t), u)\mu(t)(du), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times G, \quad \mu \in \mathrm{APM}_1, \tag{1.2}$$

для которой набор $(x(\cdot), v(\cdot), \mu(\cdot)) \in B(\mathbb{R}, G) \times \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$ называется допустимым, если $x(\cdot)$ – решение этой системы уравнений, отвечающее паре $(v(\cdot), \mu(\cdot))$ и такое, что $\overline{\mathrm{orb}}(x(\cdot)) \subset G$.

*) Т.е. для любой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ совокупность отображений $t \to \langle \mu(t), c(u)\rangle$, $\mu \in \mathfrak{M}$, принадлежащих (см. определение 1.1) $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, является равностепенно п.п. [6].

Обозначим через D_c совокупность всех допустимых наборов системы (1.2) и через D совокупность наборов вида $(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))\in B(\mathbb{R},G)\times\mathfrak{S}\times S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ таких, что $(x(\cdot),v(\cdot),\delta_{u(\cdot)})\in D_c$.

Пусть далее функции $f_{\mathfrak{l}}:\mathbb{R}\times G\times\mathbb{R}^k\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}$, $\mathfrak{l}=0,\dots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, удовлетворяют условиям, аналогичным условиям 1), 2) и 4) для функции f. В силу теоремы 1.1 при каждом $\mathfrak{l}=0,\dots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ на D_c корректно определен функционал

$$(x(\cdot),v(\cdot),\mu(\cdot))\mapsto\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot),v(\cdot),\mu(\cdot))\doteq M\{\langle\mu(t),f_{\mathfrak{l}}(t,x(t),v(t),u)\rangle\}. \tag{1.3}$$

Определение 1.4. Совокупность $\mathfrak{D}_c$ наборов $(x(\cdot),v(\cdot),\mu(\cdot))\in D_c$, удовлетворяющих условиям $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot),v(\cdot),\mu(\cdot))\le 0$, $\mathfrak{l}=1,\dots,\mathfrak{k}$, и $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot),v(\cdot),\mu(\cdot))=0$, $\mathfrak{l}=\mathfrak{k}+1,\dots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, называется допустимой.

Рассмотрим задачу

$$\mathfrak{T}_0(x(\cdot),v(\cdot),\mu(\cdot))\to\inf,\quad (x(\cdot),v(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{D}_c, \tag{1.4}$$

для которой набор $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}_c$ называется решением, если $\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\le$ $\le\mathfrak{T}(x(\cdot),v(\cdot),\mu(\cdot))$ для всех $(x(\cdot),v(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{D}_c$, и отображение

$$(t,x,v,\nu,p)\mapsto\mathbb{H}(t,x,v,\nu,p)\doteq\int\limits_{\mathfrak{U}}H(t,x,v,u,p)\nu(du),\quad (t,x,v,\nu,p)\in\mathbb{R}\times G\times\mathbb{R}^k\times\operatorname{rpm}(\mathfrak{U})\times\mathbb{R}^{n*},$$

где $H(t,x,v,u,p)=H(t,x,v,u,p;\vec{\lambda})\doteq pf(t,x,v,u)-\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\lambda_{\mathfrak{l}}f_{\mathfrak{l}}(t,x,v,u)$, $\vec{\lambda}=(\lambda_{\mathfrak{l}})_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\in$ $\in\mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, – функцией Понтрягина.

Замечание 1.1. Поскольку для каждого набора $(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))\in D$

$$\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot),v(\cdot),\delta_{u(\cdot)})=M\{f_{\mathfrak{l}}(t,x(t),v(t),u(t))\}\doteq I_{\mathfrak{l}}(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot)),\quad \mathfrak{l}=0,\dots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}, \tag{1.5}$$

то задача (1.4) является расширением (овыпуклением) задачи

$$\begin{gathered}I_{\mathfrak{l}}(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))\to\inf,\\ (x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))\in\mathfrak{D}\doteq\{(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))\in D:(x(\cdot),v(\cdot),\delta_{u(\cdot)})\in\mathfrak{D}_c\}.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Корректность такого расширения вытекает из теоремы 1.3 работы [16].

Для получения необходимых условий оптимальности допустимого процесса задачи (1.6) из соответствующих условий задачи (1.4) приведем

Определение 1.5. Набор $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}_c$ называется решением задачи (1.4) в ослабленном смысле, если не существует такого набора $(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))\in\mathfrak{D}$, что (см. (1.5)) $I_0(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))<\mathfrak{T}_0(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$.

Отметим, что всякое решение задачи (1.4) является решением в ослабленном смысле и для задачи (1.6) оба этих понятия совпадают.

Для формулировки и доказательства основного утверждения работы напомним (см. [17, 18]), что система

$$\dot{x}=A(t)x,\quad A\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n)),\quad d(A,0)<\infty, \tag{1.7}$$

допускает экспоненциальную дихотомию (э.д.) на $\mathbb{R}$, если существуют пара взаимно дополнительных проекторов $\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2\in\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n)$ и положительные константы $\mathfrak{r}_j$, σ_j, $j=1,2$, такие, что

$$\begin{aligned}|P_1(t,s)|&\doteq|\Phi(t)\mathfrak{P}_1\Phi^{-1}(s)|\le\mathfrak{r}_1e^{-\sigma_1(t-s)},\quad\text{если}\quad -\infty<s\le t<\infty,\\ |P_2(t,s)|&\doteq|\Phi(t)\mathfrak{P}_2\Phi^{-1}(s)|\le\mathfrak{r}_2e^{-\sigma_2(s-t)},\quad\text{если}\quad -\infty<t\le s<\infty,\end{aligned} \tag{1.8}$$

где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица системы (1.7). В этом случае функция $(t,s)\mapsto\mathcal{G}(t,s)\in$ $\in\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n)$, определенная равенством $\mathcal{G}(t,s)\doteq\chi_{(-\infty,t)}(s)P_1(t,s)-\chi_{(t,\infty)}(s)P_2(t,s)$, $t,s\in\mathbb{R}$

(χ_F – характеристическая функция множества $F \subset \mathbb{R}$), называется (главной) функцией Грина системы (1.7), и [17, 18] для всякой функции $b \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $d(b,0) < \infty$, система $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение $x(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)b(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$. При этом если $A \in S(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$, $b \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, то $x \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

В дальнейшем $T_{v(\cdot)}\mathfrak{S}$ – касательный конус Кларка к $\mathfrak{S} \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ в точке $v(\cdot) \in \mathfrak{S}$.

Теорема 1.2. *Пусть допустимый процесс* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c$ *является решением в ослабленном смысле задачи (1.4) и п.п. по Степанову система*

$$\dot{y} = \langle \widehat{\mu}(t), f'_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u)\rangle y, \quad (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tag{1.9}$$

допускает э.д. Тогда найдутся такие не равные нулю одновременно числа $\widehat{\lambda}_0 \geq 0$, $\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *что*

$$\sup_{\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1} M\{\mathbb{H}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \mu(t), \widehat{p}(t); \widehat{\vec{\lambda}})\} = M\{\mathbb{H}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{\mu}(t), \widehat{p}(t))\}, \quad \widehat{\vec{\lambda}} = (\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}})_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}, \tag{1.10}$$

где $\widehat{p}(t) \in (\mathbb{R}^n)^*$, $t \in \mathbb{R}$, *– п.п. по Бору решение системы*

$$\dot{p} = -p\langle \widehat{\mu}(t), f'_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u)\rangle + \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \langle \widehat{\mu}(t), f'_{\mathfrak{l}x}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u)\rangle. \tag{1.11}$$

Кроме того, выполняются условия

$$\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \geq 0, \quad \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = 0, \quad \mathfrak{l} = 1, \ldots, \mathfrak{k}, \tag{1.12}$$

и при каждом $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$

$$M\{\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle h(t)\} \leq 0. \tag{1.13}$$

Замечание 1.2. Поскольку отображение $(t,u) \mapsto H(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$, то [10] функция $t \mapsto \mathcal{H}(t) \doteq \max\limits_{u \in \mathfrak{U}} H(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))$ п.п. по Бору, при всех $t \in \mathbb{R}$ $\mathcal{H}(t) = \max\limits_{\nu \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})} \langle \nu, H(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle$ и равенство (1.10) равносильно тому, что при п.в. $t \in \mathbb{R}$ $\mathcal{H}(t) = \mathbb{H}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{\mu}(t), \widehat{p}(t))$.

Замечание 1.3. В случае, если $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ является линейным многообразием в $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$, условие (1.13) в теореме 1.2 влечет за собой для всех $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ равенство

$$M\{\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle h(t)\} = 0. \tag{1.14}$$

Далее, если $\mathrm{int}\,\mathfrak{S} \neq \emptyset$ и $\widehat{v}(\cdot) \in \mathrm{int}\,\mathfrak{S}$, то $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S} = B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ и, стало быть, при всех $h(\cdot) \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ имеет место равенство (1.14). Отсюда в свою очередь следует, что все коэффициенты Фурье $M\{\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle e^{-i\lambda t}\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ограниченной (в существенном) п.п. по Степанову функции $t \mapsto \langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle$ равны нулю. Значит, по теореме о единственности разложения п.п. функции в ряд Фурье [8] получаем, что в условиях теоремы 1.2 при $\widehat{v}(\cdot) \in \mathrm{int}\,\mathfrak{S}$ для п.в. $t \in \mathbb{R}$ $\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle = 0$. Отметим также, что в случае, если в теореме 1.2 в качестве $\mathfrak{S}$ рассматривается некоторое подмножество векторов из $\mathbb{R}^k$ и окажется, что $\widehat{v} \equiv \widehat{v}(t)$ принадлежит $\mathrm{int}\,\mathfrak{S}$, то, во-первых, $T_{\widehat{v}}\mathfrak{S} = \mathbb{R}^k$, а, во-вторых, равенство (1.14) будет выполнено для всех $h \equiv h(t) \in \mathbb{R}^k$. Последнее означает, что $M\{\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}, u, \widehat{p}(t))\rangle\} = 0$.

Доказательство теоремы 1.2 приводится ниже.

2. П.п. вариации для $(\widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{S} \times \mathrm{APM}_1$. Нам понадобится следующее (см. [10])

Определение 2.1. Последовательность $\{\nu(m)\}_{m \in \mathbb{Z}} \subset \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ называется п.п., если для каждой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ числовая последовательность $\{\langle \nu(m), c(u)\rangle\}_{m \in \mathbb{Z}}$, $\langle \nu(m), c(u)\rangle \doteq \int_{\mathfrak{U}} c(u)\nu(m)(du)$, является п.п. [13].

Совокупность всех п.п. последовательностей из $\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ обозначим через $\mathbb{APS}$.

Лемма 2.1 [10]. *Пусть* $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{APS}$ *и последовательность непрерывных отображений* $(t,u)\mapsto \mathfrak{f}_m(t,u)$, $(t,u)\in[0,a]\times\mathfrak{U}$, $m\in\mathbb{Z}$, *является п.п. равномерно по* $u\in\mathfrak{U}$ *). *Тогда последовательность функций* $\{\langle\nu(m),\mathfrak{f}_m(\cdot,u)\rangle\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *из* $C([0,a],\mathbb{R})$ *будет п.п. и для каждого* $t\in[0,a]$ *существует* $\lim\limits_{q\to\infty} q^{-1}\sum_{m=0}^{q-1}\langle\nu(m),\mathfrak{f}_m(t,u)\rangle$.

Полагаем далее $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^p \doteq \{\vec{\mu}=(\mu_j)_{j=1}^p,\ \mu_j\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}),\ j=1,\ldots,p\}$, $p\in\mathbb{N}$, и последовательность $\{\vec{\mu}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ из $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^p$ называем п.п., если при каждом $j=1,\ldots,p$ последовательность $\{\mu_j(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{APS}$.

Фиксируем теперь константу $a>0$, число $N\in\mathbb{N}$ и произвольный набор точек $0\le\vartheta_1<\ldots$ $\ldots<\vartheta_N<a$, который отождествляем с вектором $\vec{\vartheta}=(\vartheta_i)_{i=1}^N$. Каждому $i\in\{1,\ldots,N\}$ поставим в соответствие число $k_i\in\mathbb{N}$ и пару $(\vec{\beta}_{k_i},\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})$, в которой $\vec{\beta}_{k_i}\doteq(\beta_{ij})_{j=1}^{k_i}$, $\beta_{ij}\ge 0$, $j=1,\ldots,k_i$, а $\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, $\vec{\nu}_{k_i}(m)\doteq(\nu_{ij}(m))_{j=1}^{k_i}$, $m\in\mathbb{Z}$, – п.п. последовательность из $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^{k_i}$. В дальнейшем $|\vec{\beta}_{k_i}|\doteq\sum_{j=1}^{k_i}\beta_{ij}$ и если $\vec{\beta}^p_{k_i^p}=(\beta^p_{ij})_{j=1}^{k_i^p}$, $\vec{\nu}^p_{k_i^p}(m)\doteq(\nu^p_{ij}(m))_{j=1}^{k_i^p}$, $m\in\mathbb{Z}$, $p=1,2$, то полагаем

$$(\vec{\beta}^1_{k_i^1},\vec{\beta}^2_{k_i^2})\doteq(\beta^1_{i1},\ldots,\beta^1_{ik_i^1},\beta^2_{i1},\ldots,\beta^2_{ik_i^2}),$$
$$(\vec{\nu}^1_{k_i^1}(m),\vec{\nu}^2_{k_i^2}(m))\doteq(\nu^1_{i1}(m),\ldots,\nu^1_{ik_i^1}(m),\nu^2_{i1}(m),\ldots,\nu^2_{ik_i^2}(m)), \tag{2.1}$$

где $m\in\mathbb{Z}$. Следовательно, если $\{\vec{\nu}^p_{k_i^p}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ – п.п. последовательности из $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^{k_i^p}$, $p=1,2$, то $\{(\vec{\nu}^1_{k_i^1}(m),\vec{\nu}^2_{k_i^2}(m))\}_{m\in\mathbb{Z}}$ – п.п. последовательность из $(\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))^{k_i^1+k_i^2}$.

Введем далее в рассмотрение множество (ср. со множеством (4.2) в [5])

$$\mathcal{V}\doteq\{\{(\vec{\beta}_{k_i},\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N\doteq\{(\vec{\beta}_{k_1},\{\vec{\nu}_{k_1}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}),\ldots,(\vec{\beta}_{k_N},\{\vec{\nu}_{k_N}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}\}, \tag{2.2}$$

в котором $k_1,\ldots,k_N\in\mathbb{N}$, и будем считать, что если $\iota=\{(\vec{\beta}_{k_i},\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N\in\mathcal{V}$, то для всякого $\lambda>0$

$$\lambda\iota\doteq\{(\lambda\vec{\beta}_{k_i},\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N\quad(\lambda\vec{\beta}_{k_i}\doteq(\beta_{ij})_{j=1}^{k_i}), \tag{2.3}$$

и если $\iota_p=\{(\vec{\beta}^p_{k_i^p},\{\vec{\nu}^p_{k_i^p}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N\in\mathcal{V}$, $p=1,2$, то (см. (2.1))

$$\iota_1+\iota_2\doteq\{((\vec{\beta}^1_{k_i^1},\vec{\beta}^2_{k_i^2}),\{(\vec{\nu}^1_{k_i^1}(m),\vec{\nu}^2_{k_i^2}(m))\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N, \tag{2.4}$$

т.е. $\mathcal{V}$ – конус, называемый конусом п.п. иголок.

Пусть далее

$$\mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\doteq\{\vec{\iota}=(\iota_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}},\ \iota_1,\ldots,\iota_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\in\mathcal{V}\},$$
$$\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\doteq\{\vec{\mathfrak{y}}=(\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}},\ \mathfrak{y}_1,\ldots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\in[0,\rho]\},\quad\rho>0, \tag{2.5}$$

и для любых $\vec{\iota}\in\mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, $\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ полагаем $\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}\doteq\mathfrak{y}_1\iota_1+\ldots+\mathfrak{y}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\iota_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$. Поэтому если $\iota_{\mathfrak{q}}\doteq$ $\doteq\{(\vec{\beta}^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}},\{\vec{\nu}^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N$, $\mathfrak{q}=1,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, то из (2.2)–(2.5) вытекает, что $\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}\in\mathcal{V}$, при этом

$$\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}=\{((\mathfrak{y}_1\vec{\beta}^1_{k_i^1},\ldots,\mathfrak{y}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\vec{\beta}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}_{k_i^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}),\{(\vec{\nu}^1_{k_i^1}(m),\ldots,\vec{\nu}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}_{k_i^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}(m))\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N. \tag{2.6}$$

Далее, с каждой иголкой $\iota=\{(\vec{\beta}_{k_i},\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N\in\mathcal{V}$, такой, что $\beta(\iota)\doteq\sum_{i=1}^N|\vec{\beta}_{k_i}|>0$, свяжем положительное число $\varepsilon(\iota)\doteq\min\limits_{1\le i\le N}(\vartheta_{i+1}-\vartheta_i)/\beta(\iota)$, $\vartheta_{N+1}\doteq a$, и при $(\varepsilon,m)\in(0,\varepsilon(\iota)]\times\mathbb{Z}$

*) Т.е. для любого $\varepsilon>0$ множество $\bigcap_{u\in\mathfrak{U}}\mathcal{E}(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,u)\}_{m\in\mathbb{Z}},\varepsilon)$, где $\mathcal{E}(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,u)\}_{m\in\mathbb{Z}},\varepsilon)\doteq\{\mathfrak{n}\in\mathbb{Z}:\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}}(\max\limits_{t\in[0,a]}|\mathfrak{f}_{m+\mathfrak{n}}(t,u)-\mathfrak{f}_m(t,u)|)<\varepsilon\}$, относительно плотно.

рассмотрим (см. (4.9) в [5]) для каждого $i=1,\ldots,N$ дизъюнктную, примыкающую друг к другу систему полуинтервалов $\{T_{m,i,j}(\varepsilon,\iota)\}_{j=1}^{k_i}$, для которой $\operatorname{mes} T_{m,i,j}(\varepsilon,\iota)=\varepsilon\beta_{ij}$ и $\bigcup_{j=1}^{k_i} T_{m,i,j}(\varepsilon,\iota)=ma+\vartheta_i+[0,\varepsilon|\vec{\beta}_{k_i}|)\subset ma+[\vartheta_i,\vartheta_{i+1}]$. Теперь, если рассматривается иголка (см. (2.6)) $\mathfrak{h}\vec{\iota}\in\mathcal{V}$ такая, что

$$\beta(\vec{\iota})\doteq\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}|\vec{\beta}_{k_i^{\mathfrak{q}}}^{\mathfrak{q}}|>0, \tag{2.7}$$

с ней свяжем положительное число

$$\varepsilon(\rho,\vec{\iota})\doteq\min_{1\le i\le N}(\vartheta_{i+1}-\vartheta_i)/(\rho\beta(\vec{\iota})),\quad \vartheta_{N+1}=a. \tag{2.8}$$

Для такой иголки из (2.6) (см. также (4.9) в [5]) получаем, что при каждом $i\in\{1,\ldots,N\}$ и всех $(\varepsilon,m)\in(0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})]\times\mathbb{Z}$

$$T_{m,i,j}(\varepsilon,\mathfrak{h}\vec{\iota})=\begin{cases}T_{m,i,j}(\varepsilon\mathfrak{h}_1,\iota_1), & 1\le j\le k_i^1,\\ \varepsilon(\mathfrak{h}_1|\vec{\beta}_{k_i^1}^1|+\ldots+\mathfrak{h}_{\mathfrak{q}-1}|\vec{\beta}_{k_i^{\mathfrak{q}-1}}^{\mathfrak{q}-1}|)+T_{m,i,j}(\varepsilon\mathfrak{h}_{\mathfrak{q}},\iota_{\mathfrak{q}}), & 2\le\mathfrak{q}\le\mathfrak{k}+\mathfrak{m},\quad 1\le j\le k_i^{\mathfrak{q}}.\end{cases} \tag{2.9}$$

Поэтому если

$$\mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\mathfrak{h}\vec{\iota})\doteq\bigcup_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}}T_{m,i,j}(\varepsilon,\mathfrak{h}\vec{\iota}),\quad m\in\mathbb{Z},\quad 1\le i\le N,\quad 1\le\mathfrak{q}\le\mathfrak{k}+\mathfrak{m}, \tag{2.10}$$

то так определенная система полуинтервалов $\{\mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\mathfrak{h}\vec{\iota})\}_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ дизъюнктна,

$$\operatorname{mes}\mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\mathfrak{h}\vec{\iota})=\varepsilon\mathfrak{h}_{\mathfrak{q}}|\vec{\beta}_{k_i^{\mathfrak{q}}}^{\mathfrak{q}}|,\quad \mathfrak{q}=1,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}, \tag{2.11}$$

и, кроме того, для любых $m\in\mathbb{Z}$, $i=1,\ldots,N$

$$\bigcup_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\mathfrak{h}\vec{\iota})=ma+\vartheta_i+\left[0,\varepsilon\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\mathfrak{h}_{\mathfrak{q}}|\vec{\beta}_{k_i^{\mathfrak{q}}}^{\mathfrak{q}}|\right)\subset ma+[\vartheta_i,\vartheta_{i+1}]. \tag{2.12}$$

Определение 2.2. Пусть иголка $\iota=\{(\vec{\beta}_{k_i},\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N$, принадлежащая конусу $\mathcal{V}$, такая, что $\beta(\iota)>0$, и пусть $\varepsilon\in[0,\varepsilon(\iota))$. Тогда отображение $t\mapsto\mu(t;\varepsilon,\iota)\in\operatorname{rpm}(\mathfrak{U})$, $t\in\mathbb{R}$, определенное равенством

$$\mu(t;\varepsilon,\iota)\doteq\begin{cases}\widehat{\mu}(t), & t\in\bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}}\left([ma,(m+1)a]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{N}\bigcup\limits_{j=1}^{k_i}T_{m,i,j}(\varepsilon,\iota)\right),\\ \nu_{ij}(m), & t\in T_{m,i,j}(\varepsilon,\iota),\quad m\in\mathbb{Z},\quad 1\le i\le N,\quad 1\le j\le k_i,\end{cases} \tag{2.13}$$

называется игольчатой вариацией для заданного отображения $\widehat{\mu}(\cdot)\in\mathrm{APM}_1$, отвечающей иголке ι.

Замечание 2.1. При $\varepsilon=0$ считаем $\mu(t;0,\iota)\equiv\widehat{\mu}(t)$ при всех $\iota\in\mathcal{V}$.

Замечание 2.2. Игольчатая вариация отображения $\widehat{\mu}\in\mathrm{APM}_1$, отвечающая иголке $\iota\in\mathcal{V}$, определена в предположении, что в фиксированном наборе $\vec{\vartheta}=(\vartheta_i)_{i=1}^N$ точки $\vartheta_i\in[0,a]$, $i=1,\ldots,N$, удовлетворяют условию $0\le\vartheta_1<\ldots<\vartheta_N<a$. В работе [10] определена игольчатая вариация отображения $\widehat{\mu}(\cdot)$ для набора $\vec{\vartheta}=(\vartheta_i)_{i=1}^N$, в котором $0\le\vartheta_1\le\ldots\le\vartheta_N<a$, и показано, что при исследовании ее свойств достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда фиксируется такой набор $\vec{\vartheta}=(\vartheta_i)_{i=1}^N$, что $0\le\vartheta_1<\ldots<\vartheta_N<a$.

Рассмотрим, далее, иголку $\mathfrak{y}\vec{\iota} \in \mathcal{V}$ такую, что $\beta(\vec{\iota}) > 0$ (см. (2.7)). В этом случае из (2.6) и (2.9), а также равенства (2.13) вытекает

Лемма 2.2. *Пусть* $\widehat{\mu} \in \mathrm{APM}_1$, $\mathfrak{y}\vec{\iota} \in \mathcal{V}$ *и* $\beta(\vec{\iota}) > 0$. *Тогда при* $\varepsilon \in [0, \varepsilon(\rho, \vec{\iota}))$, $\mathfrak{y} \in \Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ *и всех* $t \in \mathbb{R}$ *выполнено равенство*

$$\mu(t; \varepsilon, \mathfrak{y}\vec{\iota}) = \begin{cases} \widehat{\mu}(t), & t \in \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}} \left([ma, (m+1)a] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{N} \bigcup\limits_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon, \mathfrak{y}\vec{\iota})\right), \\ \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m), & t \in T_{m,i,j}(\varepsilon, \mathfrak{y}\vec{\iota}), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad 1 \le i \le N, \quad 1 \le \mathfrak{q} \le \mathfrak{k}+\mathfrak{m}, \quad 1 \le j \le k_i^{\mathfrak{q}}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Теорема 2.1. *Пусть* $\vec{\iota} = (\iota_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \in \mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *где* $\iota_{\mathfrak{q}} \doteq \{(\vec{\beta}^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}, \{\vec{\nu}^{\mathfrak{q}}_{k_i^{\mathfrak{q}}}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^{N}$, $\mathfrak{q} = 1, \ldots, \mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, *и* $\beta(\vec{\iota}) > 0$. *Тогда для каждого* $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$ *отображение* $(t, \varepsilon, \mathfrak{y}) \mapsto \mu(t; \varepsilon, \mathfrak{y}\vec{\iota})$, *заданное равенством (2.14), принадлежит пространству* $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, *где* $\mathfrak{X} \doteq [0, \varepsilon(\rho, \vec{\iota})] \times \Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *и* $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\big(\sup\limits_{\mathfrak{y}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \|\mu(\cdot; \varepsilon, \mathfrak{y}\vec{\iota}) - \widehat{\mu}(\cdot)\|_w\big) = 0$. *Кроме того,*

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\left(\sup_{\substack{(\varepsilon', \mathfrak{y}'),(\varepsilon'', \mathfrak{y}'')\in\mathfrak{X} \\ |\varepsilon'-\varepsilon''|+|\mathfrak{y}'-\mathfrak{y}''|\le\gamma}} \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\mu(s; \varepsilon', \mathfrak{y}'\vec{\iota}) - \mu(s; \varepsilon'', \mathfrak{y}''\vec{\iota})|(\mathfrak{U})\,ds\right)\right) = 0.$$

Свойства отображения $(t, \varepsilon, \mathfrak{y}) \mapsto \mu(t; \varepsilon, \mathfrak{y}\vec{\iota})$, указанные в первой части теоремы 2.1, и ряд других доказаны в работе [10]. Для доказательства последнего свойства этого отображения надо воспользоваться топологической эквивалентностью d_l-расстояний и неравенством (см. [10, с. 78–79])

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}}(\mathrm{mes}\{t \in [ma, (m+1)a] : \ \mu(t; \varepsilon', \mathfrak{y}'\vec{\iota}) \ne \mu(t; \varepsilon'', \mathfrak{y}''\vec{\iota})\}) \le \sum_{i=1}^{N} \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} k_i^{\mathfrak{q}} \sum_{l=1}^{\mathfrak{q}} |\varepsilon'\mathfrak{y}'_l - \varepsilon''\mathfrak{y}''_l|\,|\vec{\beta}^{l}_{k_i^l}|,$$

выполненным для любых $(\varepsilon', \mathfrak{y}'), (\varepsilon'', \mathfrak{y}'') \in \mathfrak{X}$.

Напомним, что через $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ обозначаем в банаховом пространстве $(B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k), \|\cdot\|_C)$ (здесь $\|\cdot\|_C \doteq \|\cdot\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)}$) касательный конус Кларка ко множеству $\mathfrak{S} \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ в точке $\widehat{v}(\cdot) \in \mathfrak{S}$. В соответствии с определением [20] в нашем случае $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности функций $\{v_p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty} \subset \mathfrak{S}$, $\lim\limits_{p\to\infty} \|v_p(\cdot) - \widehat{v}(\cdot)\|_C = 0$ и всякой числовой последовательности $\{\lambda_p\}_{p=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$, $\lim\limits_{p\to\infty} \lambda_p = 0$, существует последовательность $\{h_p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty} \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ такая, что $\lim\limits_{p\to\infty} \|h_p(\cdot) - h(\cdot)\|_C = 0$ и $v_p(\cdot) + \lambda_p h_p(\cdot) \in \mathfrak{S}$ при всех $p \in \mathbb{N}$. Теперь приведем необходимое в дальнейшем свойство конуса $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ сразу в виде, удобном для ссылок. Для этого введем в рассмотрение симплекс

$$\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \doteq \left\{\vec{\lambda} = (\lambda_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} : \ \lambda_{\mathfrak{q}} \ge 0, \ \mathfrak{q} = 1, \ldots, \mathfrak{k}+\mathfrak{m}, \ \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{q}} = 1\right\} \subset \mathbb{R}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \tag{2.15}$$

и с фиксированными $\tilde{\mathfrak{y}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \in [0, \rho]$, $h_1(\cdot), \ldots, h_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ свяжем два отображения

$$\begin{gathered} \vec{\lambda} \mapsto \mathfrak{g}(\vec{\lambda}) \doteq (\lambda_{\mathfrak{q}}\tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \in \Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}, \quad \vec{\lambda} \in \Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}, \\ \mathfrak{y} \mapsto h(\cdot, \mathfrak{y}) \doteq \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{q}}\tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{q}} h_{\mathfrak{q}}(\cdot), \quad \mathfrak{y} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \doteq \mathfrak{g}(\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}). \end{gathered} \tag{2.16}$$

Полагаем также

$$V \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\widehat{v}) + O_{\varrho}[0], \quad \varrho \doteq \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{q}}\|h_{\mathfrak{q}}(\cdot)\|_C + 1. \tag{2.17}$$

Лемма 2.3. *Пусть заданы* $h_1(\cdot),\ldots,h_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ *и последовательность* $\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty} \subset \subset (0,\infty)$, $\lim\limits_{p\to\infty} \varepsilon_p = 0$. *Тогда найдутся последовательность*

$$\{v_p(\cdot)\}_{p=1}^{\infty} \subset \mathfrak{S}, \quad \lim_{p\to\infty} \|v_p(\cdot) - \widehat{v}(\cdot)\|_C = 0,$$

и совокупность функций $\{h(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),\ p\in\mathbb{N},\ \vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\}_{p=1}^{\infty} \subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ *такие, что (см. (2.16))*

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \|h(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}) - h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C\Big) = 0, \tag{2.18}$$

$$w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}) \doteq v_p(\cdot) + \varepsilon_p h(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}) \in \mathfrak{S}, \quad (p,\vec{\mathfrak{y}}) \in \mathbb{N}\times\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}. \tag{2.19}$$

Кроме того,

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \|\varepsilon_p^{-1}(w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}) - \widehat{v}(\cdot)) - h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C\Big) = 0, \tag{2.20}$$

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Big(\sup_{\substack{(p,\vec{\lambda}_l)\in\mathbb{N}\times\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \\ l=1,2,\ |\vec{\lambda}_1-\vec{\lambda}_2|\le\gamma}} \|h(\cdot,\varepsilon_p,\mathfrak{g}(\vec{\lambda}_1)) - h(\cdot,\varepsilon_p,\mathfrak{g}(\vec{\lambda}_2))\|_C\Big) = 0. \tag{2.21}$$

Доказательство. Поскольку $\widehat{v}(\cdot)\in\mathfrak{S}$, то расстояние $\rho_{\mathfrak{S}}(\widehat{v}(\cdot))$ в $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ от $\widehat{v}(\cdot)$ до $\mathfrak{S}$ равно нулю. Следовательно, для каждого $p\in\mathbb{N}$ найдется такая функция $v_p(\cdot)\in\mathfrak{S}$, что $\|\widehat{v}(\cdot)-v_p(\cdot)\|_C \le \varepsilon_p^2$. Очевидно, что $\lim\limits_{p\to\infty}\|\widehat{v}(\cdot)-v_p(\cdot)\|_C = 0$. Далее, так как $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ – выпуклый замкнутый конус с вершиной в нуле [20], то (см. (2.15), (2.16)) при каждом $\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \doteq \mathfrak{g}(\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}})$ справедливо включение $h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ и, значит, [20]

$$\rho^0_{\mathfrak{S}}(\widehat{v}(\cdot),h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})) \doteq \limsup_{\substack{v(\cdot)\to\widehat{v}(\cdot)\\ \varepsilon\downarrow 0}} \frac{\rho_{\mathfrak{S}}(v(\cdot)+\varepsilon h(\cdot,,\vec{\mathfrak{y}})) - \rho_{\mathfrak{S}}(v(\cdot))}{\varepsilon} = 0.$$

Отсюда для выбранных функций $v_p(\cdot)\in\mathfrak{S}$ вытекает равенство $\lim\limits_{p\to\infty}\varepsilon_p^{-1}\rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot)+\varepsilon_p h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})) = 0$, $\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$. Поэтому из неравенства $\rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot)+\varepsilon_p h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})) \le \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot)+\varepsilon_p\tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{q}}h_{\mathfrak{q}}(\cdot))$, принимая во внимание включение $\tilde{\mathfrak{y}}_1 h_{\mathfrak{q}}(\cdot),\ldots,\tilde{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}h_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, получаем равенство

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \varepsilon_p^{-1}\rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot)+\varepsilon_p h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}}))\Big) = 0. \tag{2.22}$$

Далее, в силу определения расстояния для каждого $p\in\mathbb{N}$ и $\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ найдется такое $w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\in\mathfrak{S}$, что $\|v_p(\cdot)+\varepsilon_p h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}}) - w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\|_C < \rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot)+\varepsilon_p h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})) + \varepsilon_p/p$. Полагая теперь $h(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}) \doteq \varepsilon_p^{-1}(w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}) - v_p(\cdot))$, получаем, что $\|h(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}) - h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C = \varepsilon_p^{-1}\|w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}) - v_p(\cdot) - \varepsilon_p h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C < \varepsilon_p^{-1}\rho_{\mathfrak{S}}(v_p(\cdot)+\varepsilon_p h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})) + p^{-1}$. Отсюда вытекает равенство (2.18) и заданная равенством (2.19) последовательность $\{w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\}_{p=1}^{\infty}\subset\mathfrak{S}$, которая, конечно, удовлетворяет равенству

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \|w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}) - \widehat{v}(\cdot)\|_C\Big) = 0. \tag{2.23}$$

Далее, из (2.18) и неравенства $\|(w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}) - \widehat{v}(\cdot))/\varepsilon_p - h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C \le \varepsilon_p + \|h(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}) - h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C$ получаем (2.20).

Теперь допустим, что равенство (2.21) неверно. Тогда найдутся $\varkappa > 0$ и последовательности $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}\subset(0,\infty)$, $\lim\limits_{i\to\infty}\gamma_i = 0$, $\{(p_i,\vec{\lambda}_l^{(i)})\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}\times\Lambda^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, $l=1,2$, $|\vec{\lambda}_1^{(i)} - \vec{\lambda}_2^{(i)}|\le\gamma_i$, такие, что $\varkappa < H_i \doteq \|h(\cdot,\varepsilon_{p_i},\vec{\mathfrak{y}}_1^{(i)}) - h(\cdot,\varepsilon_{p_i},\vec{\mathfrak{y}}_2^{(i)})\|_C$, где $\mathfrak{y}_l^{(i)} \doteq \mathfrak{g}(\vec{\lambda}_l^{(i)})$, $\vec{\lambda}_l^{(i)} \doteq (\lambda_{l\mathfrak{q}}^{(i)})_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, $l=1,2$. С другой стороны, из соотношений (см. (2.19)) $H_i \le \sum_{l=1}^{2}\varepsilon_{p_i}^{-1}\|w(\cdot,\varepsilon_{p_i},\vec{\mathfrak{y}}_l^{(i)}) - v_{p_i}(\cdot) - h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}}_l^{(i)})\|_C +$

$+\|h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}}_1^{(i)})-h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}}_2^{(i)})\|_C<2\sup\limits_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\varepsilon_{p_i}^{-1}\rho_{\mathfrak{S}}(v_{p_i}(\cdot)+\varepsilon_{p_i}h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}}))+\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}|\lambda_{1\mathfrak{q}}^{(i)}-\lambda_{2\mathfrak{q}}^{(i)}|\,\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}}\|h_{\mathfrak{q}}(\cdot)\|_C$ в силу (2.22) и равенства $\lim\limits_{i\to\infty}\gamma_i=0$ вытекает, что $\lim\limits_{i\to\infty}H_i=0$. Последнее противоречит тому, что $\varkappa<H_i,\ \ i\in\mathbb{N}$.

Определение 2.3. Последовательность $\{(w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),\mu(\cdot;\varepsilon_p\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}))\}_{p=1}^{\infty}\subset\mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$, в которой $w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})$, принадлежащее множеству $\mathfrak{S}$, определено равенством (2.19), отображение $\mu(\cdot;\varepsilon_p\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\in\mathrm{APM}_1$ – равенством (2.13) при $\varepsilon=\varepsilon_p$, называется последовательностью п.п. вариаций для $(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$, отвечающей заданному $h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, иголке $\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\in\mathcal{V}$, в которых $\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, $\beta(\vec{\iota})>0$ и последовательности $\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty}\subset(0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})]$, $\lim\limits_{p\to\infty}\varepsilon_p=0$.

3. Свойства п.п. вариации для $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in D_c$. Фиксируем набор $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in D_c$. По определению это означает, что функция $\widehat{x}(\cdot)\in B(\mathbb{R},G)$ является решением системы (1.2) при $v(\cdot)=\widehat{v}(\cdot)$, $\mu(\cdot)=\widehat{\mu}(\cdot)$ и $\overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x})\subset G$. Следовательно, найдется такое $r>0$, что $K_r\doteq\overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x})+O_r[0]\subset G$. Далее, не оговаривая, предполагаем, что отвечающая набору $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in D_c$ система (1.9) допускает э.д., и для нее сохраняем обозначения, входящие в определение э.д. системы (1.7) с матрицей $A(t)=\langle\widehat{\mu}(t),f_x'(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle$. В дальнейшем для функции g, определенной (см. (2.17)) на $\mathbb{R}\times K_r\times V\times\mathfrak{U}$ при $\gamma>0$ и $t\in\mathbb{R}$, полагаем

$$\omega_\gamma^{(1)}(t;g)\doteq\sup_{\substack{(x_k,v,u)\in K_r\times V\times\mathfrak{U}\\ k=1,2,\ |x_1-x_2|\le\gamma}}|g(t,x_1,v,u)-g(t,x_2,v,u)|,\tag{3.1}$$

$$\omega_\gamma^{(2)}(t;g)\doteq\sup_{\substack{(x,v_k,u)\in K_r\times V\times\mathfrak{U}\\ k=1,2,\ |v_1-v_2|\le\gamma}}|g(t,x,v_1,u)-g(t,x,v_2,u)|.\tag{3.2}$$

Рассмотрим далее последовательность $\{(w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),\mu(\cdot;\varepsilon_p\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}))\}_{p=1}^{\infty}\subset\mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$ (см. определение 2.3) п.п. вариаций для $(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$, отвечающую заданным $h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, иголке $\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}\in\mathcal{V}$, в которых (см. (2.15), (2.16), (2.6) и (2.7)) $\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, $\beta(\vec{\iota})>0$, и последовательности $\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty}\subset(0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})]$, $\lim\limits_{p\to\infty}\varepsilon_p=0$ (см. (2.5), (2.7) и (2.8)). По теореме 2.1 отображение $(t,\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})\mapsto\mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$, заданное равенством (2.14), принадлежит (см. определение 1.1) множеству функций $S(\mathbb{R}\times\mathfrak{X},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, где $\mathfrak{X}\doteq[0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})]\times\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ – компактное относительно сходимости в метрике $\rho_{\mathfrak{X}}((\varepsilon_1,\vec{\mathfrak{y}}_1),(\varepsilon_2,\vec{\mathfrak{y}}_2))\doteq|\varepsilon_1-\varepsilon_2|+|\vec{\mathfrak{y}}_1-\vec{\mathfrak{y}}_2|$, $(\varepsilon_k,\vec{\mathfrak{y}}_k)\in\mathfrak{X}$, $k=1,2$, пространство. Поэтому [10] множество $\{\mu(\cdot;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\ \ (\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}})\in\mathfrak{X}\}\subset\mathrm{APM}_1$ и равностепенно п.п. Далее, так как $d(w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),\widehat{v}(\cdot))\le\|w(\cdot,\varepsilon_p)-\widehat{v}(\cdot)\|_C$, то (см. теорему 2.1 и (2.19)) $\lim\limits_{p\to\infty}(\sup\limits_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}d(w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),\widehat{v}(\cdot))+\sup\limits_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|\mu(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})-\widehat{\mu}(\cdot)\|_w)=0$. Отметим далее, что если в теореме 2.1 работы [21] рассмотреть направленность $\{v_\alpha(\cdot,\omega)\}_{\alpha\in\mathbb{A}}\subset S(\mathbb{R},\mathcal{V})$ и условие (2.4) заменить условием $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}(\sup\limits_{\omega\in\Omega}\|\mu(\cdot,\alpha,\omega)-\widehat{\mu}(\cdot)\|_w+\sup\limits_{\omega\in\Omega}d(\widehat{v}(\cdot),v_\alpha(\cdot,\omega)))=0$, то для системы $\dot{x}=\langle\mu(t,\alpha,\omega),f(t,x,v_\alpha(t,\omega),u)\rangle$ будут справедливы утверждения, аналогичные указанным в этой теореме. Поэтому в силу сделанного замечания можно утверждать, что найдется такое $\widehat{p}_1\in\mathbb{N}$, что при каждом $p\ge\widehat{p}_1$ и любом $\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ п.п. по Степанову система

$$\dot{x}=\langle\mu(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),f(t,x,w(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),u)\rangle,\qquad(t,x)\in\mathbb{R}\times G,\tag{3.3}$$

имеет п.п. по Бору решение $x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$ такое, что $\overline{\mathrm{orb}}(x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}))\subset K_r$ и

$$\lim_{p\to\infty}(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|\Delta x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\|_C)=0,\qquad\Delta x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\doteq\widehat{x}(\cdot)-x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\tag{3.4}$$

(здесь $\|\cdot\|_C\doteq\|\cdot\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}$). При этом функция $\Delta x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})$ является решением уравнения

$$\dot{z}=A(t)z+h_1(t;z)+h_2(t;\varepsilon_p,z)+h_3(t;\varepsilon_p,z),\qquad(t,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\tag{3.5}$$

где (см. (2.19))

$$\begin{aligned} &h_1(t;z) \doteq \langle \widehat{\mu}(t), f(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u) - f(t,\widehat{x}(t)-z,\widehat{v}(t),u)\rangle - A(t)z, \\ &h_2(t;\varepsilon_p,z) \doteq \langle \Delta\mu(t;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota}), f(t,\widehat{x}(t)-z,\widehat{v}(t),u)\rangle, \quad \Delta\mu(t;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota}) \doteq \widehat{\mu}(t) - \mu(t;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota}), \\ &h_3(t;\varepsilon_p,z) \doteq \langle \mu(t;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota}), f(t,\widehat{x}(t)-z,\widehat{v}(t),u) - f(t,\widehat{x}(t)-z,w(t,\varepsilon_p,\mathfrak{y},u))\rangle. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Далее, поскольку при каждом $m \in \mathbb{Z}$ и всяком $\varepsilon > 0$ (см. (2.14) и (2.10))

$$\mathbb{I}_m(\varepsilon,\mathfrak{y}) \doteq \{t \in [ma,(m+1)a] : \ \widehat{\mu}(t) \neq \mu(t;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota})\} = \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \mathbb{T}_{m,i,\mathfrak{q}}(\varepsilon,\mathfrak{y}\vec{\iota}), \tag{3.7}$$

то (см. (2.11), (2.12), а также обозначения (2.5) при $\mathfrak{y} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \subset \Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ и (2.7))

$$\sup_{\mathfrak{y}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \big(\sup_{m\in\mathbb{Z}} (\operatorname{mes} \mathbb{I}_m(\varepsilon,\mathfrak{y}))\big) \le \rho\beta(\vec{\iota})\,\varepsilon. \tag{3.8}$$

Поэтому в силу теоремы 2.1 и замечания 5.1 к теореме 2.3 работы [21], в которой необходимо учесть равенства (2.18) и (2.20), устанавливаем существование такого $\widehat{p}_2 \ge \widehat{p}_1$, что

$$\sup\{\varepsilon_p^{-1}\|\Delta x(\cdot;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota})\|_C, \ p \ge \widehat{p}_2, \ \mathfrak{y} \in \tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\} \doteq \varkappa < \infty. \tag{3.9}$$

Таким образом, каждому набору $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in D_c$ можно поставить в соответствие последовательность $\{(x(\cdot;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota}), w(\cdot,\varepsilon_p,\mathfrak{y}), \mu(\cdot;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota}))\}_{p\ge\widehat{p}_2} \subset D_c$ с указанными выше свойствами.

Лемма 3.1. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sup_{\mathfrak{y}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\left\|\frac{\Delta x(\cdot;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota})}{\varepsilon_p} - \frac{1}{\varepsilon_p}\int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(\cdot,s)\langle\Delta\mu(s;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota}), f(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u)\rangle\,ds + y(\cdot,\mathfrak{y})\right\|_C\right) = 0,$$

где функция $y(\cdot,\mathfrak{y}) \in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ определена равенством (см. (2.16))

$$y(t,\mathfrak{y}) = y(t,h(\cdot,\mathfrak{y})) \doteq \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)\langle\widehat{\mu}(s), f'_v(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u)\rangle h(s,\mathfrak{y})\,ds \quad (h(\cdot,\mathfrak{y}) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}). \tag{3.10}$$

Доказательство. Так как при $p \ge \widehat{p}_2$ функция $\Delta x(\cdot;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota})$ является решением уравнения (3.5), то (см. (3.6) и обозначения (3.1), (3.2) для $g = f$ и $g = f'_x$ соответственно) имеем

$$\left|\frac{\Delta x(t;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota})}{\varepsilon_p} - \frac{1}{\varepsilon_p}\int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)\langle\Delta\mu(s;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota}), f(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u)\rangle ds + y(t,\mathfrak{y})\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)\left\langle\widehat{\mu}(s), \int\limits_0^1 (f'_x(s,\widehat{x}(s)-\theta\Delta x(s;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota}),\widehat{v}(s),u) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f'_x(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u))\,d\theta\right\rangle\frac{\Delta x(s;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota})}{\varepsilon_p}\,ds\right| +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_p}\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s)\langle\Delta\mu(s;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota}), f(s,\widehat{x}(s)-\Delta x(s;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota}),\widehat{v}(s),u) - f(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u)\rangle\,ds\right| +$$

$$+ |y(t,\mathfrak{y}) - V(t,\varepsilon_p,\mathfrak{y})| \overset{(1.8),(3.7)}{\le}$$

$$\overset{(1.8),(3.7)}{\leq} \varkappa\mathfrak{k}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+a}\omega^{(1)}_{\xi(p)}(s;f'_x)\,ds+2\rho\mathfrak{k}\beta(\vec{\iota})\sup_{t\in\mathbb{R}}\omega^{(2)}_{\xi(p)}(t;f)+\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}(\|y(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})-V(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\|_C),$$

где $\xi(p)\doteq\sup\limits_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|\Delta x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\|_C$,

$$\mathfrak{k}\doteq\frac{\mathfrak{r}_1}{1-e^{-a\sigma_1}}+\frac{\mathfrak{r}_2}{1-e^{-a\sigma_2}},\tag{3.11}$$

и (см. определение функции h_3 в (3.6))

$$V(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\int\limits_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\Big\langle\mu(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\int\limits_0^1 f'_v(s,x(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),w(s,\varepsilon_p,\theta,\vec{\mathfrak{y}}),u)\,d\theta\Big\rangle\zeta(s,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\,ds,\tag{3.12}$$

где в свою очередь

$$w(s,\varepsilon_p,\theta,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\widehat{v}(s)+\theta(w(s,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})-\widehat{v}(s)),\quad \zeta(s,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\varepsilon_p^{-1}(w(s,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})-\widehat{v}(s)),\quad s\in\mathbb{R}.\tag{3.13}$$

Из ограничений, наложенных на функцию f, в силу [9], леммы 1.1 и равенства (3.4) вытекает соотношение $\lim\limits_{p\to\infty}(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a}\omega^{(1)}_{\xi(p)}(s;f'_x)\,ds+\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\omega^{(2)}_{\xi(p)}(t;f))=0$. Поэтому осталось показать, что

$$\lim_{p\to\infty}(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}(\|y(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})-V(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\|_C))=0.\tag{3.14}$$

Заметим, что $V(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})=\sum_{i=1}^4 V_i(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})$, где (см. обозначения (3.13))

$$V_1(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\doteq-\int\limits_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\Big\langle\Delta\mu(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\int\limits_0^1 f'_v(s,x(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),w(s,\varepsilon_p,\theta,\vec{\mathfrak{y}}),u)\,d\theta\Big\rangle\,\zeta(s,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\,ds,$$

$$V_2(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\int\limits_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\Big\langle\widehat{\mu}(s),\int\limits_0^1(f'_v(s,\widehat{x}(s)-\Delta x(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),w(s,\varepsilon_p,\theta,\vec{\mathfrak{y}}),u)-$$
$$-f'_v(s,\widehat{x}(s),w(s,\varepsilon_p,\theta,\vec{\mathfrak{y}}),u))\,d\theta\Big\rangle\zeta(s,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\,ds,$$

$$V_3(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\int\limits_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\Big\langle\widehat{\mu}(s),\int\limits_0^1(f'_v(s,\widehat{x}(s),w(s,\varepsilon_p,\theta,\vec{\mathfrak{y}}),u)-f'_v(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u))\,d\theta\Big\rangle\zeta(s,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\,ds,$$

$$V_4(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\doteq\int\limits_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\widehat{\mu}(s),f'_v(s,\widehat{x}(s),\widehat{v}(s),u)\rangle\zeta(s,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\,ds,$$

и покажем сначала, что

$$\lim_{p\to\infty}(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}(\|V_i(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\|_C))=0,\quad i=1,2,3.\tag{3.15}$$

Действительно, полагая $F(t)\doteq\max\limits_{(x,v,u)\in K_r\times V\times\mathfrak{U}}|f'_v(t,x,v,u)|$, $t\in\mathbb{R}$, получим (см. (3.7) и обозначение (3.11)) неравенство $|V_1(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})|\leq 4\mathfrak{k}\|\zeta(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\|_C\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{I}_0(\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})}F(s+ma)\,ds$. В самом деле, из определения функции Грина вытекает, что $|V_1(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})|\leq|V_1^{(1)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})|+|V_1^{(2)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})|$, где $V_1^{(l)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}) \doteq \int_{\mathfrak{s}_l(t)} P_l(t,s)\langle\Delta\mu(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), \int_0^1 f'_v(s,x(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),w(s,\varepsilon_p,\theta,\vec{\mathfrak{y}}),u)d\theta\rangle\,\zeta(s,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})ds$, $l=1,2$; здесь $\mathfrak{s}_1(t)\doteq(-\infty,t]$, $\mathfrak{s}_2(t)\doteq[t,\infty)$. Представив каждое $t\in\mathbb{R}$ в виде $t=m_ta+\theta_ta$, $m_t\in\mathbb{Z}$, $\theta_t\in[0,1)$, и положив $\mathfrak{m}_t\doteq m_t+m$, $m\in\mathbb{Z}$, имеем следующие соотношения:

$$|V_1^{(2)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})| \overset{(1.8)}{\le} \mathfrak{r}_2\|\zeta(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\|_C\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\sigma_2 ma}\int\limits_{t+ma}^{t+(m+1)a}\left|\left\langle\Delta\mu(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\int\limits_0^1 f'_v(s,x(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),w(s,\varepsilon_p,\theta,\vec{\mathfrak{y}}),u)\,d\theta\right\rangle\right|ds \overset{(2.14),(3.7)}{\le}$$

$$\overset{(2.14),(3.7)}{\le} 2\mathfrak{r}_2\|\zeta(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\|_C\sum_{m=0}^{\infty}e^{-\sigma_2 ma}\left\{\int\limits_{\mathbb{I}_{\mathfrak{m}_t}(\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})}F(s)\,ds+\int\limits_{\mathbb{I}_{\mathfrak{m}_t+1}(\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})}F(s)\,ds\right\}\le$$

$$\le\frac{4\mathfrak{r}_2\|\zeta(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\|_C}{1-e^{-\sigma_2 a}}\sup_{m\in\mathbb{Z}}\int\limits_{\mathbb{I}_0(\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})}F(s+m)\,ds.$$

Отсюда, учитывая, что для $|V_1^{(1)}(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})|$ справедливы аналогичные соотношения, получаем (см. (3.11)) нужное нам неравенство, из которого, принимая во внимание (см. выбор $v_p(\cdot)\in\mathfrak{S}$ в лемме 2.3) соотношения

$$\|\zeta(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\|_C \overset{(3.13)}{\le} (\varepsilon_p+\|h(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\|_C) \overset{(2.16)}{\le}$$

$$\overset{(2.16)}{\le} \varepsilon(\rho,\vec{\iota})+\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|h(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})-h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C+\rho\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\|h_{\mathfrak{q}}(\cdot)\|_C, \tag{3.16}$$

в силу (2.18), неравенства (3.8) и леммы 1.1 из [22] вытекает соотношение (3.15) при $i=1$.

Используя рассуждения, приведенные для оценки $|V_1(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})|$, получаем (см. обозначения (3.1) и (3.2) при $g=f'_v$) неравенства $|V_l(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})|\le\mathfrak{k}\|\zeta(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\|_C\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a}\omega^{(1)}_{\xi^{(l)}(p)}(s,f'_v)\,ds$, $l=2,3$, где $\xi^{(2)}(p)\doteq\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|\Delta x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\|_C$, $\xi^{(3)}(p)\doteq\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})-\widehat{v}(\cdot)\|_C$. Из последних двух неравенств в силу леммы 1.1, учитывая соотношения (3.4), (2.23) (см. также (3.16)), получаем (3.15), $i=2,3$. Наконец, поскольку $|V_4(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})-y(t,\vec{\mathfrak{y}})|\le\mathfrak{k}\,d(F(\cdot),0)\|\zeta(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})-h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C$, то (см. (2.20), а также (2.18) и (3.13)) $\lim\limits_{p\to\infty}(\sup\limits_{\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|V_4(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})-y(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\|_C)=0$. Последнее равенство совместно с (3.15) влечет за собой (3.14).

Работа поддержана Конкурсным центром фундаментального естествознания (проект Е 00-1.0-5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А.В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М., 1997.
2. *Дмитрук А.В.* // Оптимальность управляемых динамических систем. Вып. 14. М., 1990. С. 26–42.
3. *Тонков Е.Л.* // Мат. физика. 1977. Вып. 21. С. 45–59.
4. *Gilbert E.G.* // SIAM J. Contr. Opt. 1977. V. 15. № 5. P. 717–746.
5. *Иванов А.Г.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 167–176.
6. *Иванов А.Г.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 3. С. 316–323.
7. *Иванов А.Г.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 4. С. 478–485.
8. *Левитан Б.М.* Почти-периодические функции. М., 1953.

9. *Fink A.M.* // Lect. Notes Math. 1974. V. 377.
10. *Иванов А.Г.* // Изв. Ин-та мат. и информ. УдГУ. Ижевск, 2002. Вып. 1 (24). С. 3–100.
11. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977.
12. *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. Тбилиси, 1975.
13. *Ченцов А.Г.* Приложения теории меры к задачам управления. Свердловск, 1985.
14. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М., 1985.
15. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М., 1981.
16. *Иванов А.Г.* // Изв. вузов. Математика. 2002. № 6 (469). С. 34–43.
17. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
18. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М., 1970.
19. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев, 1987.
20. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М., 1988.
21. *Иванов А.Г.* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 2. С. 186–197.
22. *Иванов А.Г.* О ряде свойств линейных почти периодических систем управления. Деп. в ВИНИТИ 27.08.2001. № 1902-В01.

Институт математики и информатики
Удмуртского государственного университета,
г. Ижевск

Поступила в редакцию
02.12.2002 г.