



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. S. Vladimirov, On the spectrum of some pseudodifferential operators over the field of  $p$ -adic numbers,  
*Algebra i Analiz*, 1990, Volume 2, Issue 6, 107–124

<https://www.mathnet.ru/eng/aa223>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

April 25, 2025, 01:26:52



© 1990 г.

В. С. Владимиров

**О СПЕКТРЕ НЕКОТОРЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ  
НАД ПОЛЕМ  $p$ -АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ**

Для разнообразных псевдодифференциальных операторов, действующих в пространстве функций от  $p$ -адических аргументов, изучаются их спектры.

§ 1. Введение

В этой работе будет рассмотрен ряд задач о спектре конкретных псевдодифференциальных операторов, действующих в пространстве  $\mathcal{L}_2(G)$  - комплексно-значных функций  $p$ -адических аргументов  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q_p \times Q_p \times \dots \times Q_p = Q_p^n$  (см. [1-7]);  $|x|_p = \max |x_k|_p$ .

$p$ -адическим псевдодифференциальным оператором  $A$  называется оператор вида

$$A\psi = \int_{Q_p^n} a(\xi, x) \tilde{\psi}(\xi) \chi_p(-(\xi, x)) d\xi, \quad (1.1)$$

Здесь функция  $a(\xi, x)$  называется символом оператора  $A$ ,  $(\xi, x) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$ .

Примерами таких операторов являются следующие операторы.

1. Оператор типа Шредингера (см. [3, 8])

$$\Delta\psi + V(x)\psi = \int_{Q_p^n} [|\xi_1|_p^2 + |\xi_2|_p^2 + \dots + |\xi_n|_p^2 + V(x)] \tilde{\psi}(\xi) \chi_p(-(\xi, x)) d\xi; \quad (1.2)$$

с символом

$$|\xi_1|_p^2 + |\xi_2|_p^2 + \dots + |\xi_n|_p^2 + V(x). \quad (1.3)$$

2. Оператор эволюции квантового  $p$ -адического гармонического осциллятора [1, 2]

$$U(t)\psi = \int_{Q_p} K_t^{(p)}(x, y) \psi(y) dy, \quad t \in G_p, \quad (1.4)$$

где ядро  $K^{(p)}(x, y)$  имеет вид

$$K_t^{(p)}(x, y) = \lambda_p(t) |\frac{t}{t}|^{1/2} \chi_p \left( \frac{2xy}{\sin t} - \frac{x^2 + y^2}{\operatorname{tg} t} \right). \quad (1.5)$$

Этот оператор задает унитарное представление группы  $G_p$ :

$$U(t)U(t') = U(t+t'), \quad t, t' \in G_p.$$

Его символ есть

$$a_t(\xi, x) = \int_{Q_p} K_t^{(p)}(x, y) \chi_p(\xi y) dy = \chi_p \left( \operatorname{tg} t x^2 + \frac{\operatorname{tg} t}{4} \xi^2 + \frac{\xi x}{\cos t} \right). \quad (1.6)$$

Ключевые слова:  $p$ -адическая квантовая механика, псевдодифференциальный оператор, дискретность спектра, символ оператора, компактность оператора, оператор типа Шредингера.

3. Оператор эволюции свободной квантовой  $p$ -адической частицы

$$U(t)\psi = \lambda_p(t) |t|_p^{1/2} \int_{Q_p} \chi_p\left(-\frac{(x-y)^2}{t}\right) \psi(y) dy, \quad t \in Q_p. \quad (1.7)$$

Он задает унитарное представление аддитивной группы поля  $Q_p$ ; его символ равен

$$a_t(\xi, x) = \chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4} t\right).$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $\check{\psi}(\xi)$  - преобразование Фурье функции  $\psi(x)$ ;

$$\check{\psi}(\xi) = \int_{Q_p^n} \psi(x) \chi_p((\xi, x)) dx, \quad (\xi, x) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n.$$

Группа  $G_p = \{t \in Q_p : |t|_p \leq 1/p\}$  при  $p \neq 2$  и  $G_2 = \{t \in Q_2 : |t|_2 \leq 1/4\}$ ;  $\chi_p(x)$  - аддитивный (нормированный) характер поля  $Q_p$ ;  $\lambda_p(x)$  - теоретико-числовая функция, определяемая равенствами: если  $x \in Q_p$  имеет канонический вид  $x = p^\gamma (x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots)$ ,  $\gamma \in \mathbb{Z}$ ,  $x_0 \neq 0$ ,  $0 \leq x_j \leq p-1$  ( $x_j$  - целые), то

$$\lambda_p(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma \text{ четное,} \\ \left(\frac{x_0}{p}\right), & \text{если } \gamma \text{ нечетное, } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ i \left(\frac{x_0}{p}\right), & \text{если } \gamma \text{ нечетное, } p \equiv 3 \pmod{4}; \end{cases}$$

$$\lambda_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} [1 + (-1)^{x_1} i], & \text{если } \gamma \text{ четное,} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (-1)^{x_1} [(-1)^{x_2} + i], & \text{если } \gamma \text{ нечетное,} \end{cases}$$

где  $\left(\frac{x_0}{p}\right)$  - символ Лежандра;  $dx$  - мера Хаара на аддитивной группе поля  $Q_p$ , нормированная условием

$$\int_{Q_p} \Omega(|x|_p) dx = \int_{|x|_p \leq 1} dx = 1, \quad \text{где } \Omega(\alpha) = 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \Omega(\alpha) = 0, \quad \alpha > 1.$$

По поводу принятых обозначений, терминологии и используемых результатов см. работы [1-9].

## § 2. О дискретности спектра ограниченного снизу самосопряженного оператора

Пусть  $A$  - ограниченный снизу самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве  $H$  с областью определения  $D(A)$ :

$$(A\varphi, \varphi) \geq c \|\varphi\|^2, \quad \varphi \in D(A) \quad (2.1)$$

при некотором вещественном  $c$ . Обозначим  $\rho(A)$  - резольвентное множество,  $\sigma(A)$  - спектр оператора  $A$ . Замкнутую билинейную форму, порожденную оператором  $A$ , обозначим  $A(\varphi, \psi)$ ; ее область определения обозначим через  $Q(A) \supset D(A)$ , так что на

элементах  $\varphi$  и  $\psi$  из  $D(A)$  справедливо равенство

$$A(\varphi, \psi) = (A\varphi, \psi). \quad (2.2)$$

Обозначим через  $\lambda_k(A)$ ,  $k=1, 2, \dots$  величины, определяемые принципом минимакса

$$\lambda_k(A) = \sup_{\varphi_1, \varphi_{k-1} \in H} \inf_{\substack{(\psi, \varphi_i) = 0, \\ \psi \in Q(A)}} \frac{A(\psi, \psi)}{\|\psi\|^2}, \quad i=1, 2, \dots, k-1. \quad (2.3)$$

Имеет место следующая теорема (см., например, [9], Т. 4).

**Теорема.** Пусть  $A$  - ограниченный снизу самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве  $H$  с областью определения  $D(A)$ ; пусть  $A(\varphi, \psi)$  - соответствующая билинейная форма с областью определения  $Q(A)$ .

Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) оператор  $(A-\lambda)^{-1}$  компактен при некотором  $\lambda \in \rho(A)$ ;
- (2) оператор  $(A-\lambda)^{-1}$  компактен при всех  $\lambda \in \rho(A)$ ;
- (3) множество функций  $\{\psi \in D(A) : \|\varphi\| \leq a, \|A\varphi\| \leq b\}$  компактно при всех  $a$  и  $b$ ;
- (4) существует ортонормированный базис  $\{\varphi_k, k=1, 2, \dots\}$  в  $D(A)$  такой, что

$$A\varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad k=1, 2, \dots \quad (2.4)$$

при некоторых  $\lambda_k$  таких, что

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lambda_k \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty; \quad (2.5)$$

- (5)  $\lambda_k(A) \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty,$

где числа  $\lambda_k(A)$  определяются формулой (2.3).

**Пример 1.** Псевдодифференциальный оператор

$$D^\alpha \varphi = \int_{Q_p} |\xi|_p^\alpha \tilde{\varphi}(\xi) \chi_p(-x, \xi) d\xi; \quad \alpha > -1 \quad (2.6)$$

ограничен снизу и самосопряжен в гильбертовом пространстве  $H = \mathcal{L}_2(Q_p)$ :

$$(D^\alpha \varphi, \psi) = \int_{Q_p} |\xi|_p^\alpha \tilde{\varphi}(\xi) \tilde{\psi}(\xi) d\xi; \quad \varphi, \psi \in D(A), \quad (2.7)$$

$$\|D^\alpha \varphi\|^2 = \int_{Q_p} |\xi|_p^{2\alpha} |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 d\xi, \quad \varphi \in D(A) \quad (2.8)$$

с областью определения

$$D(D^\alpha) = \{\varphi \in \mathcal{L}_2(Q_p) : |\xi|_p^\alpha \tilde{\varphi} \in \mathcal{L}_2(Q_p)\}.$$

Соответствующая (2.7) билинейная форма

$$(D^\alpha \varphi, \psi) = \int_{Q_p} |\xi|_p^\alpha \tilde{\varphi}(\xi) \tilde{\psi}(\xi) d\xi; \quad \varphi, \psi \in Q(D^\alpha)$$

замкнута и ее область определения есть

$$Q(D^\alpha) = \{\varphi \in \mathcal{L}_2(Q_p), \quad |\xi|_p^{\alpha/2} \tilde{\varphi} \in \mathcal{L}_2(Q_p)\}.$$

Отметим, что на основных функциях  $\varphi \in D(Q_p)$  оператор (2.6) принимает вид

$$D^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{Q_p} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{|x-y|_p^{\alpha+1}} dy, \quad \alpha > -1,$$

где  $\Gamma_p(\alpha)$  -  $p$ -адическая  $\Gamma$ -функция

$$\Gamma_p(\alpha) = \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}}, \quad \alpha \neq 0. \quad (2.9)$$

**Пример 2.** Псевдодифференциальный оператор

$$A^{\alpha, \beta} \varphi = D^\alpha \varphi + |x|_p^\beta \varphi, \quad \varphi \in D(A^{\alpha, \beta}), \quad \alpha, \beta > -1 \quad (2.10)$$

с символом  $|\xi|_p^\alpha + |x|_p^\beta$  и область определения

$$D(A^{\alpha, \beta}) = [\varphi \in \mathcal{L}_2(Q_p) : |\xi|_p^\alpha \tilde{\varphi} \in \mathcal{L}_2(Q_p), |x|_p^\beta \varphi \in \mathcal{L}_2(Q_p)]$$

допускает (единственное) самосопряженное по Фридрихсу расширение  $\lambda^{\alpha, \beta}$  с помощью замкнутой ограниченной снизу билинейной формы

$$A^{\alpha, \beta}(\varphi, \psi) = \int_{Q_p} |\xi|_p^\alpha \tilde{\varphi}(\xi) \overline{\tilde{\psi}(\xi)} d\xi + \int_{Q_p} |x|_p^\beta \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx, \quad (2.11)$$

с область определения

$$Q(A^{\alpha, \beta}) = [\varphi \in \mathcal{L}_2(Q_p) : |\xi|_p^{\alpha/2} \tilde{\varphi} \in \mathcal{L}_2(Q_p), |x|_p^{\beta/2} \varphi \in \mathcal{L}_2(Q_p)]. \quad (2.12)$$

Для области определения  $D(\lambda^{\alpha, \beta})$  оператора  $\lambda^{\alpha, \beta}$  справедливы включения

$$D(A^{\alpha, \beta}) \subset D(\lambda^{\alpha, \beta}) \subset Q(A^{\alpha, \beta})$$

и равенство

$$A^{\alpha, \beta}(\varphi, \psi) = (\lambda^{\alpha, \beta} \varphi, \psi), \quad \varphi, \psi \in D(\lambda^{\alpha, \beta}). \quad (2.13)$$

### § 3. Критерии компактности функций $p$ -адического аргумента

Так как пространство  $Q_p^n$  локально-компактно, то некоторые критерии компактности функций вещественного аргумента (см., например, [9], т. 4) непосредственно переносятся и на функции  $p$ -адического аргумента.

Пусть  $G$  - открыто-замкнутое множество в  $Q_p^n$  (не обязательно ограничено, например,  $G=Q_p^n$ ). Пространство  $\mathcal{L}_2(G)$  мы будем рассматривать как множество всех функций из  $\mathcal{L}_2(Q_p^n)$ , для которых носитель содержится в  $G$ .

**Определения.** 1) Множество функций  $M \subset \mathcal{L}_2(G)$  состоит из равномерно непрерывных в целом в  $\mathcal{L}_2(G)$  функций  $f$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $n=n_\varepsilon \in \mathbb{Z}$ , что

$$\int_G |f(x+h) - f(x)|^2 dx < \varepsilon, \quad |h|_p \leq p^n, \quad f \in M.$$

2) Множество  $M \subset \mathcal{L}_2(G)$  состоит из функций  $f$  с равномерно непрерывными  $\mathcal{L}_2(G)$

интегралами на бесконечности, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N = N_\varepsilon \in \mathbb{Z}$ , что

$$G \cap \{|x|_p \geq p^N\} \int |f(x)|^2 dx < \varepsilon, f \in M.$$

3) Измеримая вещественная функция  $F(x)$ , заданная на  $G$ , стремится к  $+\infty$  на бесконечности (т.е. при  $|x|_p \rightarrow \infty, x \in G$ ), если для любого  $M > 0$  существует такое  $N = N_M, N \in \mathbb{Z}$ , что  $F(x) > M$  при  $|x| \geq p^N, x \in G$ .

**Критерий компактности Рисса-Колмогорова.** Для того чтобы множество  $M \subset \mathcal{L}_2(G)$  было компактным в  $\mathcal{L}_2(G)$ , необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условиям:

- (1) ограничено в  $\mathcal{L}_2(G)$ ;
- (2) состоит из равностепенно непрерывных в целом в  $\mathcal{L}_2(G)$  функций;
- (3) состоит из функций с равностепенно непрерывными  $\mathcal{L}_2(G)$ -интегралами на бесконечности.

Переходя к преобразованию Фурье, из критерия Рисса-Колмогорова получаем такой критерий:

Для того чтобы множество  $M \subset \mathcal{L}_2(G)$  было компактным в  $\mathcal{L}_2(G)$ , необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия (1), (3) и

(2') множество  $\{g = \check{f}, f \in M\}$  состоит из функций с равностепенно непрерывными  $\mathcal{L}_2(Q_p^n)$ -интегралами на бесконечности.

Здесь  $\check{f}$  - преобразование Фурье функции  $f$  (точнее функции  $f \in \mathcal{L}_2(G)$ , продолженной нулем на  $Q_p^n \setminus G$ ).

Из последнего критерия сразу следует аналог критерия Реллиха: если множество  $M$  ограничено в  $\mathcal{L}_2(G)$  и удовлетворяет условиям

$$\int_{Q_p} \sigma(\xi) |\check{f}(\xi)|^2 d\xi \leq C, f \in M, \quad (3.1)$$

$$\int_G \rho(x) |f(x)|^2 dx \leq C, f \in M, \quad (3.2)$$

где  $\sigma(\xi)$  и  $\rho(x)$  положительные функции, стремящиеся к  $+\infty$  на бесконечности, то  $M$  компактно в  $\mathcal{L}_2(G)$ .

**Замечание.** В случае ограниченной области  $G$  условия (3) и (3.2), естественно, отсутствуют.

#### § 4. О спектре псевдодифференциального оператора $a^* + V$

Пусть  $G$  - открыто-замкнутое множество пространства  $Q_p^n$ , например, шар  $B_r = \{x \in Q_p^n, |x|_p \leq r\}$ , сфера  $S_r = \{x \in Q_p^n, |x|_p = r\}$ , все пространство  $Q_p^n$ , внешность шара  $B_r$ , внешность сферы  $S_r: Q_p^n \setminus S_r$  ( $r \in \mathbb{Z}$ ) и т.д.

Псевдодифференциальный оператор  $a^* + V = A$ ,

$$A\varphi = \int_{Q_p^n} \tilde{a}(\xi)\tilde{\varphi}(\xi)\chi_p(-(\xi, x))d\xi + V(x)\varphi(x), \quad (4.1)$$

будем рассматривать на множестве  $G$ . Его символом является функция

$$\tilde{a}(\xi) + V(x), \quad \xi \in Q_p^n, \quad x \in G$$

(ср. пример 2, § 2). Предполагаем, что функции  $\tilde{a}(\xi)$  и  $V(x)$  ограничены снизу, локально интегрируемы и стремятся к  $+\infty$  на бесконечности. При изучении задач о спектре оператора  $a^*+V$  без ограничения общности можно считать, что функции  $\tilde{a}(\xi)$  и  $V(x)$  неотрицательны.

Областью определения оператора  $A$  являются функции

$$D(A) = [\varphi \in \mathcal{L}_2(G) : \tilde{a} \cdot \tilde{\varphi} \in \mathcal{L}_2(Q_p^n), V \cdot \varphi \in \mathcal{L}_2(G)].$$

Оператор  $A$  симметричен и ограничен снизу в  $\mathcal{L}_2(G)$ . С помощью соответствующей (замкнутой и ограниченной снизу) билинейной формы

$$A(\varphi, \psi) = \int_{Q_p^n} \tilde{a}(\xi)\tilde{\varphi}(\xi)\tilde{\psi}(\xi)d\xi + \int_G V(x)\varphi(x)\psi(x)dx, \quad (4.2)$$

с областью определения

$$Q(A) = [\varphi \in \mathcal{L}_2(G) : \sqrt{\tilde{a}} \cdot \tilde{\varphi} \in \mathcal{L}_2(Q_p^n), \sqrt{V} \cdot \varphi \in \mathcal{L}_2(G)]$$

оператор  $A$  допускает (единственное) самосопряженное по Фридрихсу расширение  $\tilde{A}$  с областью определения  $D(\tilde{A}) \subset Q(A)$ , причем

$$A(\varphi, \psi) = (\tilde{A}\varphi, \psi), \quad \varphi, \psi \in D(\tilde{A}) \quad (4.3)$$

(ср. пример 2, § 2, см. [9], Т.1).

„Краевая“ задача для оператора  $A$  на множестве  $G$  ставится так: пусть  $f \in \mathcal{L}_2(G)$ , найти функцию  $\varphi$  из  $D(\tilde{A})$ , удовлетворяющую в  $G$  уравнению

$$\tilde{A}\varphi(x) = \lambda\varphi(x) + f(x), \quad x \in G. \quad (4.4)$$

При  $f=0$  получим задачу на собственные значения.

В силу критерия Реллиха (§ 3), любое ограниченное в  $\mathcal{L}_2(G)$  множество  $M$ , удовлетворяющее условию

$$\tilde{A}(\varphi, \varphi) \leq B, \quad \varphi \in M, \quad (4.5)$$

компактно в  $\mathcal{L}_2(G)$ . Поэтому, пользуясь теоремой § 2, получаем следующую теорему.

**Основная теорема.** При указанных выше предположениях спектр оператора  $A$  дискретный и состоит из вещественных собственных значений  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \lambda_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$ , каждое собственное значение конечной кратности. Соответствующие собственные функции  $\varphi_k \in D(\tilde{A})$  образуют ортонормальный базис  $\mathcal{L}_2(G)$ , так что

$$\tilde{A}\varphi_k = \lambda_k\varphi_k, \quad (\tilde{A}\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{ki}, \quad k, i=1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Справедлив принцип минимакса.

При  $\lambda \neq \lambda_k, k=1, 2, \dots$  оператор  $(\tilde{A} - \lambda I)^{-1}$  вполне непрерывен, так что уравнение

(4.5) однозначно разрешимо в  $D(\tilde{\lambda})$  при любой  $f \in \mathcal{L}_2(G)$  и решение его выражается формулой

$$\varphi = (\tilde{\lambda} - \lambda I)^{-1} f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k. \quad (4.7)$$

При  $\lambda = \lambda_k$  решение уравнения (4.5) существует тогда и только тогда, когда  $f$  ортогональна ко всем собственным функциям, соответствующим собственному значению  $\lambda_k$ ,

$$(f, \varphi_{k+i}) = 0, \quad i=0, \dots, n_k-1, \quad (4.8)$$

где  $n_k$  - кратность собственного значения  $\lambda_k$ ; это решение выражается формулой

$$\varphi = \sum_{\substack{i=0 \\ \lambda_i \neq \lambda_k}}^{\infty} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i - \lambda_k} \varphi_i + \sum_{i=0}^{n_k-1} c_i \varphi_{k+i}, \quad (4.9)$$

где  $c_i$  - произвольные постоянные.

**Замечание.** Для ограниченного множества  $G$  условие  $V(x) \rightarrow +\infty$  при  $|x|_p \rightarrow \infty, x \in G$ , естественно, отсутствует.

### § 5. Спектр оператора $D^\alpha, \alpha > 0$ на $Q_p$ .

Спектр оператора  $D^\alpha, \alpha > 0$  ( $n=1, p \neq 2$ ), в  $\mathcal{L}_2(Q_p)$  и соответствующие собственные функции построены в работе [4] (см. также [5-7]).

**Теорема.** Спектр оператора  $D^\alpha, \alpha > 0$  ( $n=1, p \neq 2$ ), в  $\mathcal{L}_2(Q_p)$  состоит из счетного числа собственных значений  $\lambda_N = p^{\alpha N}, n \in \mathbb{Z}$ , каждое из которых бесконечной кратности, и точки  $\lambda=0$  (предельной точки собственных значений). Существует ортонормальный базис в  $\mathcal{L}_2(Q_p)$ , состоящий из собственных функций I рода:

$$\psi_{N,j,\varepsilon}^\ell(x) = p^{\frac{N-1}{2}} \sqrt{\frac{p}{p-1}} \delta(|x|_p - p^{\ell-N}) \chi_p(\varepsilon p^{\ell-2N} x^2 + j p^{\ell-N-1} x),$$

$$\ell=2, 3, \dots; \quad j=1, 2, \dots, p-1, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \dots + \varepsilon_{\ell-2} p^{\ell-2},$$

$$\varepsilon_0 \neq 0, \quad \varepsilon_s = 0, 1, \dots, p-1, \quad s=0, 1, \dots, \ell-2, \quad (5.1')$$

и собственных функций II рода:

$$\psi_{N,j,\varepsilon}^\ell(x) = p^{\frac{N-1}{2}} \Omega(p^{N-1} |x|_p) \chi_p(j p^{-N} x),$$

$$\ell=1, \quad j=1, 2, \dots, p-1, \quad \varepsilon=0, \quad (5.1'')$$

соответствующих собственному значению  $\lambda_N, N \in \mathbb{Z}$ .

Точке спектра  $\lambda=0$  соответствует единственная обобщенная собственная функция  $\psi(x)=1$ , собственному значению  $\lambda_N$  соответствуют обобщенные функции

$$\psi(x) = \chi_p(\xi x), \quad |\xi|_p = p^N. \quad (5.2)$$

Собственные функции  $\psi_{N,j,\varepsilon}^\ell$  обладают свойствами:



$$\psi_{N,j,\varepsilon}^\ell \in \mathcal{D}(Q_p), \quad \int_Q \psi_{N,j,\varepsilon}^\ell(x) dx = 0, \quad N \in \mathbb{Z}, \quad \ell=1, 2, \dots; \quad (5.3)$$

$$\tilde{\psi}_{N,j,\varepsilon}^\ell(\xi) = p^{-N/2} \sqrt{\frac{p}{p-1}} \delta(|\xi|_p - p^N) \lambda_p(\varepsilon p^\ell) \chi_p\left(-p^{2N-\ell} \frac{\xi^2}{4\varepsilon} - p^{N-1} \frac{j\xi}{2\varepsilon}\right),$$

$$N \in \mathbb{Z}, \quad \ell=2, 3, \dots, \quad j=1, 2, \dots, p-1, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \dots + \varepsilon_{\ell-2} p^{\ell-2}; \quad (5.4')$$

$$\tilde{\psi}_{N,j,0}^\ell(\xi) = p^{\frac{-N-1}{2}} \delta(|\xi|_p - p^N) \delta(\xi_0 - j),$$

$$N \in \mathbb{Z}, \quad \ell=1, \quad j=1, 2, \dots, p-1, \dots, \quad \varepsilon=0. \quad (5.4'')$$

Обозначим через  $\mathcal{L}_2^I(Q_p)$  и  $\mathcal{L}_2^{II}(Q_p)$  инвариантные подпространства, натянутые на собственные функции I и II рода соответственно; обозначим через  $h_N^\ell$ ,  $N \in \mathbb{Z}$ ,  $\ell=1, 2, \dots$  подпространства, натянутые на собственные функции I рода размерности  $(p-1)^2 p^{\ell-2}$  при  $\ell=2, 3, \dots$  и на собственные функции II рода размерности  $p-1$  при  $\ell=1$ . Тогда

$$\mathcal{L}_2(Q_p) = \mathcal{L}_2^I(Q_p) \oplus \mathcal{L}_2^{II}(Q_p) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \oplus h_N^\ell. \quad (5.5)$$

Обозначим через  $\mathcal{L}'_2(B_r)$  гильбертово пространство функций  $f$  из  $\mathcal{L}_2(B_r)$ , для которых

$$\int_{|x|_p \leq p^r} f(x) dx = 0; \quad (5.6)$$

через  $\mathcal{L}'_2(S_r)$  гильбертово пространство функций  $f$  из  $\mathcal{L}_2(S_r)$ , для которых

$$\int_{|x|_p = p^r} f(x) \chi_p(-j p^{-r} x) dx = 0; \quad j = 1, 2, \dots, p-1. \quad (5.7)$$

Тогда при всех  $r \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{L}'_2(B_r) = \sum_{\gamma=-\infty}^r \sum_{\ell=1}^{\infty} \oplus h_{\ell-\gamma}^\ell, \quad (5.8)$$

$$\mathcal{L}'_2(S_r) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \oplus h_{\ell-r}^\ell. \quad (5.9)$$

## § 6. Спектр оператора $D^\alpha$ , $\alpha > 0$ на $B_r$ .

По определению § 4 собственные функции оператора  $D^\alpha$ ,  $\alpha > 0$  ( $n=1$ ,  $p \neq 2$ ) в  $\mathcal{L}_2(B_r)$  - это те собственные функции для  $Q_p$ , у которых носители содержатся в  $B_r$  (см. (5.3)). Среди собственных функций I рода (см. (5.1')) таковыми являются те, для которых  $\ell - N \leq r$ ; среди собственных функций II рода (см. (5.1'')) - те, для которых  $1 - N \leq r$ , а при  $1 - N < r$  они превращаются в 1 в  $B_r$ . Но и 1 является собственной функцией оператора  $D^\alpha$  на  $B_r$ , соответствующей собственному значению

$$\lambda_0 = \frac{p-1}{p^{\alpha+1}-1} p^{\alpha(1-r)}. \tag{6.1}$$

Проверим это. По определению (см. (2.9)), при  $|x|_p \leq p^r$  имеем

$$\begin{aligned} D^\alpha \Omega(p^{-r}|x|_p) &= \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{\Omega(p^{-r}|y|_p)-1}{|x-y|_p^{\alpha+1}} dy = \\ &= \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{|y|_p \geq p^{r+1}} |y|_p^{-\alpha-1} dy = -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \sum_{\gamma=r+1}^{\infty} \int_{|y|_p=p^\gamma} |y|_p^{-\alpha-1} dy = \\ &= -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\gamma=r+1}^{\infty} p^{-\alpha\gamma} = -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^{-\alpha(r+1)} \frac{1}{1-p^{-\alpha}} = \\ &= \frac{p-1}{p^{\alpha+1}-1} p^{\alpha(1-r)}. \end{aligned}$$

Итак, в соответствии с разложением (5.8) собственному значению  $\lambda_0$  соответствует собственная функция  $\psi_0(x) = p^{-r/2}$  (кратность 1, см. (5.6)); собственному значению

$$\lambda_1 = p^{(1-r)\alpha} \quad (N=1-r) \tag{6.2}$$

соответствуют собственные функции II рода

$$\psi_{1-r,j,0}^1(x), \quad j=1,2,\dots,p-1 \text{ (кратность } p-1); \tag{6.3}$$

собственному значению

$$\lambda_k = p^{(k-r)\alpha} \quad (N=k-r), \quad k=2,3,\dots, \tag{6.4}$$

соответствуют собственные функции I рода

$$\psi_{k-r,j,\varepsilon}^\ell(x), \quad \ell=2,3,\dots, \quad j=1,2,\dots,p-1, \tag{6.5'}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \dots + \varepsilon_{\ell-2} p^{\ell-2}$$

и собственные функции II рода

$$\psi_{k-r,j,0}^1(x), \quad j=1,2,\dots,p-1, \tag{6.5''}$$

суммарной кратности

$$(p-1)^2 + (p-1)^2 p + \dots + (p-1)^2 p^{k-2} + p-1 = p^{k-1}(p-1). \tag{6.6}$$

Построенные собственные функции образуют ортонормальный базис в  $\mathcal{L}_2(B_r)$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ .

### § 7. Спектр оператора $D^\alpha$ , $\alpha > 0$ на $S_r$

Среди собственных функций I рода (5.1') собственными функциями оператора  $D^\alpha$ ,  $\alpha > 0$  на сфере  $S_r$  ( $n=1$ ,  $p \neq 2$ ) являются те, для которых  $\ell=N=r$ , а среди собственных функций II рода (5.1'') таковых не имеется (см. (5.9)). Как видно из предложения (5.9), коразмерность подпространства  $\mathcal{L}'_2(S_r)$ , натянутого на собственные функции

I рода при  $r = \ell - N$ , равна  $p-1$  и функции

$$\varphi_j(x) = \chi_p(jp^{r-1}x), \quad x \in S_r, \quad j = 1, 2, \dots, p-1, \quad (7.1)$$

представляют базис соответствующего дефектного подпространства (см. (5.7)). Так как

$$\sum_{j=1}^{p-1} \varphi_j(x) = \sum_{j=1}^{p-1} \chi_p(jp^{r-1}x) = \sum_{j=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{jx_0}{p}} = -1, \quad x \in S_r,$$

то вместо базиса (7.1) можно выбрать базис

$$1, \varphi_1^{-\varphi_2}, \varphi_2^{-\varphi_3}, \dots, \varphi_{p-2}^{-\varphi_{p-1}}. \quad (7.2)$$

Проверим, что 1 есть собственная функция, соответствующая собственному значению

$$\lambda_0 = \frac{p^{\alpha+p-2}}{p^{\alpha+1}-1} p^{(1-r)\alpha}. \quad (7.3)$$

Действительно, по определению при  $|x|_p = p^r$  имеем

$$\begin{aligned} D^\alpha \delta(|x|_p^{-p^r}) &= \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{\delta(|y|_p^{-p^r})^{-1}}{|x-y|_p^{\alpha+1}} dy = \\ &= -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \left[ \int_{|y|_p < p^r} \frac{dy}{|x-y|_p^{\alpha+1}} + \int_{|y|_p > p^r} \frac{dy}{|x-y|_p^{\alpha+1}} \right] = \\ &= -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \left[ \int_{|y|_p \leq p^{r-1}} |x|^{-\alpha-1} dy + \int_{|y|_p \geq p^{r+1}} |y|^{-\alpha-1} dy \right] = \\ &= -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \left[ p^{-(\alpha+1)r} p^{r-1} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\gamma=r+1}^{\infty} p^{-\gamma(\alpha+1)+\gamma} \right] = \\ &= -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} p^{(1-r)\alpha} \left[ p^{-(1+\alpha)} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^{-2\alpha} \frac{1}{1-p^{-\alpha}} \right] = \\ &= p^{(1-r)\alpha} \frac{p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha-1}} \left[ p^{-(1+\alpha)} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{p^{-\alpha}}{p^{-\alpha}-1} \right] = p^{(1-r)\alpha} \frac{p^{\alpha+p-2}}{p^{\alpha+1}-1}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Докажем, что функции  $\varphi_j^{-\varphi_{j+1}}$ ,  $j=1, 2, \dots, p-2$ , являются собственными функциями, соответствующими собственному значению

$$\lambda_1 = p^{(1-r)\alpha}. \quad (7.5)$$

Действительно, пользуясь (7.4) при  $|x|_p = p^r$ , получим

$$D^\alpha \left[ \delta(|x|_p^{-p^r}) \varphi_j(x) \right] = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{\delta(|y|_p^{-p^r}) \varphi_j(y) - \varphi_j(x)}{|x-y|_p^{\alpha+1}} dy =$$

$$= - \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \varphi_j(x) \left[ \int_{|y|_p < p^r} \frac{dy}{|x-y|_p^{\alpha+1}} + \int_{|y|_p > p^r} \frac{dy}{|x-y|_p^{\alpha+1}} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{\substack{|y|_p = p^r \\ y \neq x}} \frac{\chi_p(jp^{r-1}y) - \chi_p(jp^{r-1}x)}{|x-y|_p^{\alpha+1}} dy = p^{(1-r)\alpha} \frac{p^{\alpha+p-2}}{p^{\alpha+1}-1} \varphi_j(x) + \mathcal{T},$$

где

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{\substack{|y|_p = p^r \\ y_0 \neq x_0}} \frac{\exp(2\pi i \frac{j}{p} y_0) - \exp(2\pi i \frac{j}{p} x_0)}{|x-y|_p^{\alpha+1}} dy =$$

$$= \frac{p^{-r(\alpha+1)}}{\Gamma_p(-\alpha)} \left[ \int_{\substack{|y|_p = p^r \\ y_0 \neq x_0}} \exp(2\pi i \frac{j}{p} y_0) dy - \exp(2\pi i \frac{jx_0}{p}) \int_{\substack{|y|_p = p^r \\ y_0 \neq x_0}} dy \right] =$$

$$= \frac{p^{-r(\alpha+1)}}{\Gamma_p(-\alpha)} \left[ \sum_{\substack{y_0=1 \\ y_0 \neq x_0}}^{p-1} \exp(2\pi i \frac{jy_0}{p}) p^r \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{p-1} - \varphi_j(x) p^r \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{p-2}{p-1} \right] =$$

$$= -p^{(1-r)\alpha} \frac{p^{-\alpha-1}(p-1)}{\Gamma_p(-\alpha)} \varphi_j(x) + L,$$

где

$$L = \frac{p^{-r\alpha-1}}{\Gamma_p(-\alpha)} \sum_{y_0=1}^{p-1} \exp\left(2\pi i \frac{jy_0}{p}\right) = \frac{p^{-r\alpha-1}}{\Gamma_p(-\alpha)}.$$

Поэтому

$$D^\alpha \{ \delta(|x|_p - p^r) [\varphi_j(x) - \varphi_{j+1}(x)] \} = p^{(1-r)\alpha} \left[ \frac{p^{\alpha+p-2}}{p^{\alpha+1}-1} - \frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{\Gamma_p(-\alpha)} \right] \times$$

$$\times [\varphi_j(x) - \varphi_{j+1}(x)] + L - L = p^{(1-r)\alpha} [\varphi_j(x) - \varphi_{j+1}(x)],$$

это и требовалось установить. Так как

$$\int_{|x|_p = p^r} \varphi_k(x) \overline{\varphi_j(x)} dx =$$

$$= \int_{|x|_p = p^r} \chi_p((k-j)p^{r-1}x) dx = \begin{cases} -p^{r-1}, k \neq j, \\ p^r \left(1 - \frac{1}{p}\right), k=1, \end{cases} \quad (7.6)$$

то собственные функции

$$\psi_j(x) = \frac{p^{-r/2}}{\sqrt{2}} [\chi_p(jp^{\Gamma-1}x) - \chi_p((j+1)p^{\Gamma-1}x)], \quad j = 1, 2, \dots, p-2, \quad (7.7)$$

удовлетворяют условиям

$$(\psi_k, \psi_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j=k, \\ 1/2, & \text{если } j=k+1, \\ 0, & \text{если } j \neq k \text{ и } j \neq k+1. \end{cases} \quad (7.8)$$

Суммируя результаты с учетом формул (5.7) и (5.8) получим: собственному значению  $\lambda_0$  (см. (7.3)) кратности 1 соответствует собственная функция  $\psi_0(x) = p^{-r/2} \sqrt{\frac{p}{p-1}}$ ; собственному значению  $\lambda_1$  (см. (7.5)) кратности  $p-2$  соответствуют собственные функции (7.7); собственному значению

$$\lambda_k = p^{(k-r)\alpha}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (7.9)$$

кратности  $(p-1)^2 p^{k-2}$  соответствуют собственные функции I рода

$$\psi_{k-r, j, \varepsilon}^k(x), \quad j=1, 2, \dots, p-1, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \dots + \varepsilon_{k-2} p^{k-2}. \quad (7.10)$$

Перечисленные собственные функции образуют нормированный базис в  $\mathcal{L}_2(S_r)$  — они взаимно-ортогональны, кроме функций (7.7), для которых имеют место соотношения (7.8).

### § 8. Оператор типа Шредингера $D^\alpha + V(|x|_p)$ , $\alpha > 0$ на $Q_p$

Рассмотрим оператор типа Шредингера

$$A = D^\alpha + V(|x|_p), \quad \alpha > 0 \quad (n=1, \quad p \neq 2), \quad (8.1)$$

где потенциал  $V$  — непрерывная ограниченная снизу функция, причем  $V(\rho) \rightarrow +\infty$  при  $\rho \rightarrow \infty$ .

Все собственные функции I рода (5.1') являются собственными функциями оператора  $A$ , соответствующими собственным значениям

$$\lambda_N^\ell = p^{\alpha N} + V(p^{\ell-N}), \quad N \in \mathbb{Z}, \quad \ell = 2, 3, \dots \quad (8.2)$$

Кратность  $\lambda_N^\ell$  в подпространстве  $\mathcal{L}_2^I(Q_p)$  равна  $\omega(p-1)^2 p^{\ell-2}$ , где  $\omega$  — число различных решений  $(x, y)$  диофантова уравнения

$$p^{\alpha x} + V(p^{y-x}) = p^{\alpha N} + V(p^{\ell-N}), \quad x \in \mathbb{Z}, \quad y = 2, 3, \dots; \quad (8.3)$$

это число конечно,  $1 \leq \omega < \infty$  по теореме § 2.

При  $\alpha=2$  и  $V(|x|_p) = |x|_p^2$  существуют только два решения диофантова уравнения

$$p^{2x} + p^{2y-2x} = p^{2N} + p^{2\ell-2N}, \quad x \in \mathbb{Z}, \quad y = 2, 3, \dots, \quad (8.4)$$

если  $\ell \neq 2N$ :  $(x, y) = (N, \ell)$  и  $(\ell-N, \ell)$ ; если  $\ell = 2N$ , то существует только одно решение:  $(x, y) = (N, \ell)$ . Поэтому кратность собственного значения  $\lambda_N^\ell$  оператора  $A = D^2 + |x|_p^2$  в подпространстве  $\mathcal{L}_2^I(Q_p)$  равна

$$2(p-1)^2 p^{\ell-2}, \text{ если } \ell=2N; \quad (p-1)^2 p^{\ell-2}, \text{ если } \ell=2N. \quad (8.5)$$

Ему соответствуют собственные функции

$$\psi_{N,j,\varepsilon}^\ell(x), \psi_{\ell-N,j,\varepsilon}^\ell(x), \quad j=1,2,\dots,p-1, \quad \varepsilon=\varepsilon_0+\varepsilon_1 p + \dots + \varepsilon_{\ell-2} p^{\ell-2} \quad (8.6)$$

(при  $\ell=2N$ ,  $\psi_{N,j,\varepsilon}^\ell = \psi_{\ell-N,j,\varepsilon}^\ell$ ).

Минимальное собственное значение

$$\lambda_N^\ell = p^{2N} + p^{2\ell-2N}, \quad N \in \mathbb{Z}, \quad \ell=2,3,\dots, \quad (8.7)$$

достигается при  $\ell=2$  и  $N=1$  и равно  $2p^2$ ; ему соответствуют  $(p-1)^2$  собственных функций I рода

$$\psi_{1,j,\varepsilon_0}^\ell(x), \quad j=1,2,\dots,p-1, \quad \varepsilon_0=1,2,\dots,p-1.$$

Теперь выясним, какие собственные функции II рода (5.1") являются собственными функциями оператора (8.1). Предварительно докажем лемму.

**Лемма.** Пусть функция  $\eta(x_0)$  такова, что

$$\sum_{x_0=1}^{p-1} \eta(x_0) = 0 \quad (8.7)$$

Тогда при всех  $N \in \mathbb{Z}$

$$[\eta(x_0) \delta(|x|_p - p^{1-N})] = p^{-N} \eta'(\xi_0) \delta(|\xi|_p - p^N), \quad (8.8)$$

$$D^\alpha [\eta(x_0) \delta(|x|_p - p^{1-N})] = p^{\alpha N} \eta(x_0) \delta(|x|_p - p^{1-N}), \quad (8.9)$$

где

$$\eta'(\xi_0) = \sum_{k=1}^{p-1} \eta(k) \exp\left(2\pi i \frac{k\xi_0}{p}\right), \quad \sum_{\xi_0=1}^{p-1} \eta'(\xi_0) = 0. \quad (8.10)$$

**Доказательство.** Используя (8.7) и (8.10), имеем (см. [8])

$$\int_{Q_p} \eta(x_0) \delta(|x|_p - p^{1-N}) \chi_p(\xi x) dx = \int_{|x|_p=p^{1-N}} \eta(x_0) \chi_p(\xi x) dx = 0,$$

если  $|\xi|_p \neq p^N$ . При  $|\xi|_p = p^N$   $\{\xi x\}_p = \frac{\xi_0 x_0}{p}$  и; стало быть,

$$\begin{aligned} \int_{|x|_p=p^{1-N}} \eta(x_0) \chi_p(\xi x) dx &= \int_{|x|_p=p^{1-N}} \eta(x_0) \exp\left(2\pi i \frac{\xi_0 x_0}{p}\right) dx = \\ &= p^{1-N} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{p-1} \sum_{x_0=1}^{p-1} \eta(x_0) \exp\left(2\pi i \frac{\xi_0 x_0}{p}\right) = p^{-N} \eta'(\xi_0), \end{aligned}$$

откуда и следует формула (8.8).

Для вывода формулы (8.9) воспользуемся определением (2.6) оператора  $D^\alpha, \alpha > 0$  и формулой (8.8) с заменой  $N$  на  $1-N$  и  $\eta(x_0)$  на  $\eta'(-\xi_0)$

$$\begin{aligned}
 D^\alpha[\eta(x_0)\delta(|x|_p^{-p^{1-N}})] &= \int_0^1 |\xi|_p^\alpha p^{-N}\eta'(\xi_0)\delta(|\xi|_p^{-p^N})\chi_p(-\xi x)d\xi = \\
 &= p^{N(\alpha-1)}F[\eta'(-\xi_0)\delta(|\xi|_p^{-p^N})] = p^{N(\alpha-1)}p^{N-1}\eta''(-x_0)\delta(|x|_p^{-p^{1-N}}), \quad (8.11)
 \end{aligned}$$

где в силу (8.10)

$$\begin{aligned}
 \eta''(-x_0) &= \sum_{j=1}^{p-1} \eta'(j)\exp\left(-2\pi i \frac{jx_0}{p}\right) = \sum_{j=1}^{p-1} \left( \sum_{k=1}^{p-1} \eta(k)\exp\left(-2\pi i \frac{kj}{p}\right) \right) \exp\left(-2\pi i \frac{jx_0}{p}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^{p-1} \eta(k) \sum_{j=1}^{p-1} \exp\left(-2\pi i \frac{j(k-x_0)}{p}\right) = \sum_{k=1}^{p-1} \eta(k) \begin{cases} p-1, & k=x_0 \\ -1, & k \neq x_0 \end{cases} = \\
 &= (p-1) - \eta(x_0) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq x_0}}^{p-1} \eta(k) = p\eta(x_0),
 \end{aligned}$$

откуда и из (8.11) следует формула (8.9). •

Из леммы следует, что нормированные функции

$$p^{N/2} \left( \sum_{k=1}^{p-1} \eta^2(k) \right)^{-1/2} \eta(x_0)\delta(|x|_p^{-p^{1-N}}), \quad \sum_{k=1}^{p-1} \eta(k) = 0 \quad (8.12)$$

являются собственными функциями оператора  $A$ , соответствующими собственным значениям

$$\lambda_N^1 = p^{\alpha N} + V(p^{1-N}), \quad N \in \mathbb{Z}. \quad (8.13)$$

Собственные функции вида (8.12) можно выбрать, например, в виде

$$p^{N/2} \frac{1}{\sqrt{p-1}} \left( \frac{x_0}{p} \right) \delta(|x|_p^{-p^{1-N}}), \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_{N,j}(x) &= p^{N/2} \sqrt{\frac{p-1}{p-2}} \left[ \frac{1}{p-1} - \delta(x_0-j) \right] \delta(|x|_p^{-p^{1-N}}), \\
 j &= 1, 2, \dots, p-1, \quad (8.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_{N,j}(x) &= p^{N/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \delta(x_0-j) - \delta(x_0-j-1) \right] \delta(|x|_p^{-p^{1-N}}), \\
 j &= 1, 2, \dots, p-2, \quad (8.16)
 \end{aligned}$$

Линейно-независимых собственных функций вида (8.15) фактически  $p-2$ , так как

$$\sum_{j=1}^{p-1} \varphi_{N,j}(x) = 0.$$

Поэтому кратность собственного значения  $\lambda_N^1$  не меньше  $p-2$ .

При  $\alpha=2$  и  $V(|x|_p) = |x|_p^2$  кратность собственного значения

$$\lambda_N^1 = p^{2N} + p^{2-2N} = \lambda_{1-N}^1, \quad N \in \mathbb{Z}, \quad (8.17)$$

не меньше  $2(p-2)$ .

Из принципа минимакса (см. § 2) следует, что существует собственное значение

$\lambda_N^0$  оператора  $A=D^2+|x|_p^2$ , которое меньше, чем  $\lambda_N^1$ : если

$$\psi_0(x) = p^{N/2}\Omega(p^N|x|_p)+p^{-N/2}\Omega(p^{-N}|x|_p), \quad \tilde{\psi}_0(\xi) = \psi_0(\xi),$$

то в силу (8.17)

$$\lambda_N^0 < \frac{(A\psi_0, \psi_0)}{\|\psi_0\|^2} = \frac{2 \int_{Q_p} |x|_p^2 |\psi_0(x)|^2 dx}{2(1+p^{-|N|})} = \frac{p^{2N}+p^{-2N}+2p^{-3|N|}}{1+p^{-|N|}} \times \\ \times \frac{p^2}{p^2+p+1} < p^{2N}+p^{2-2N} = \lambda_N^1$$

Отсюда следует также, что минимальное собственное значение  $\lambda_0$  оператора  $A=D^2+|x|_p^2$  положительное, простое и не превосходит

$$0 < \lambda_0 = \min_{N \in \mathbb{Z}} \lambda_N^0 < \min_{N \in \mathbb{Z}} \frac{p^{2N}+p^{-2N}+2p^{-3|N|}}{1+p^{-|N|}} \frac{p^2}{p^2+p+1} = \frac{2p^2}{p^2+p+1} < 2. \quad (8.18)$$

**Вопрос.** Как вычислить собственные значения  $\lambda_N^0$ ,  $N \in \mathbb{Z}$ , и соответствующую собственную функцию оператора  $D^2+|x|_p^2$ ?

### § 9. Оператор эволюции квантового $p$ -адического гармонического осциллятора

Оператор эволюции  $U(t)$  (см. (1.4)) задает унитарное представление в  $\mathcal{L}_2(Q_p)$  коммутативной компактной группы  $G_p$ . Поэтому задача о разложении по собственным функциям оператора  $U(t)$  эквивалентна задаче о разложении на неприводимые представления  $U(t)$  группы  $G_p$ . Эта задача решена в работе [6] (см. также [2,7]), где вычислены собственные значения  $\lambda_\alpha(t)$  и размерности соответствующих инвариантных подпространств  $H_\alpha$  оператора  $U(t)$ :

$$\lambda_\alpha(t) = \chi_p(\alpha t), \quad (9.1)$$

где при  $p \equiv 1 \pmod{4}$

$$\alpha=0 \text{ и } \alpha=p^{-\gamma}(\alpha_0+\alpha_1 p+\dots+\alpha_{\gamma-2} p^{\gamma-2}), \dim H_\alpha=\infty,$$

$$\gamma=2, 3, \dots, 0 \leq \alpha_j \leq p-1, \alpha_0 \neq 0, j=0, 1, \dots, \gamma-2;$$

при  $p \equiv 3 \pmod{4}$

$$\alpha=0, \dim H_0=1 \text{ и } \alpha=p^{-2\gamma}(\alpha_0+\alpha_1 p+\dots+\alpha_{2\gamma-2} p^{2\gamma-2}),$$

$$\dim H_\alpha=p+1, \gamma=1, 2, \dots, 0 \leq \alpha_j \leq p-1, \alpha_0 \neq 0, j=0, 1, \dots, 2\gamma-2;$$

при  $p=2$

$$\alpha=0 \text{ и } \alpha=2^{-3}, \dim H_\alpha=2 \text{ и } \alpha=2^{-\gamma}(1+\alpha_2 2^2+\dots+\alpha_{\gamma-3} 2^{\gamma-3}),$$

$$\dim H_\alpha=4, \gamma=4, 5, \dots, 0 \leq \alpha_j \leq 1, j=2, 3, \dots, \gamma-3.$$

Пространство  $\mathcal{L}_2(Q_p)$  разлагается в ортогональную прямую сумму собственных подпространств  $H_\alpha$ :



$$\mathcal{L}_2(Q_p) = \sum_{\alpha} \otimes H_{\alpha}. \quad (9.2)$$

Даны некоторые интегральные представления для собственных функций. В частности, получены явные выражения для основных состояний  $\psi_0 \in H_0$  („вакуумов“) - собственных функций, соответствующих собственному значению  $\lambda_0(t)=1$  (при  $\alpha=0$ ),

$$U(t)\psi_0(t) = \psi_0(t). \quad (9.3)$$

При  $p \equiv 1 \pmod{4}$

$$\psi_0(t) = \Omega(|x|_p), \quad \chi_p(\tau x^2) \delta(|x|_p - p^{\gamma}), \quad \gamma = 1, 2, \dots, (\tau^2 = -1); \quad (9.4)$$

при  $p \equiv 3 \pmod{4}$

$$\psi_0(t) = \Omega(|x|_p); \quad (9.5)$$

при  $p=2$

$$\psi_0(t) = \Omega(|x|_p), \quad \Omega(2|x|_p). \quad (9.6)$$

### § 10. Оператор эволюции свободной квантовой $p$ -адической частицы

Оператор эволюции  $U(t)$  (см. (1.7)) имеет вид

$$U(t)\psi = K_t * \psi, \quad \psi \in \mathcal{L}_2(Q_p), \quad t \in Q_p, \quad (10.1)$$

где в силу (1.8)

$$K_t(x) = \lambda_p(t) \left| \frac{2}{t} \right|^{1/2} \chi_p \left( -\frac{x^2}{t} \right), \quad K_t(\xi) = \chi_p \left( -\frac{\xi^2}{4} t \right). \quad (10.2)$$

Задача на собственные значения для оператора  $U(t)$  принимает вид

$$K_t * \psi = \lambda(t)\psi, \quad \psi \in \mathcal{L}_2(Q_p), \quad \psi \neq 0. \quad (10.3)$$

Применяя к уравнению (10.3) преобразование Фурье [8] и пользуясь (10.2), получим эквивалентное (10.3) уравнение

$$\chi_p \left( \frac{\xi^2}{4} t \right) \tilde{\psi}(\xi) = \lambda(t)\tilde{\psi}(\xi), \quad \tilde{\psi} \in \mathcal{L}_2(Q_p), \quad \tilde{\psi} \neq 0. \quad (10.4)$$

Из уравнения (10.4) следует, что возможными собственными значениями  $\lambda_{\alpha}(t)$  являются числа вида

$$\lambda_{\alpha}(t) = \chi_p \left( \frac{\alpha^2}{4} t \right), \quad \alpha \in Q_p. \quad (10.5)$$

Но тогда уравнение (10.4)

$$\left[ \chi_p \left( \frac{\xi^2}{4} t \right) - \chi_p \left( \frac{\alpha^2}{4} t \right) \right] \tilde{\psi}(\xi) = 0, \quad t \in Q_p,$$

не имеет ненулевых решений в  $\mathcal{L}_2(Q_p)$  и имеет единственное ненулевое решение в  $\mathcal{D}'(Q)$  [8]:

$$\tilde{\psi}_{\alpha}(\xi) = C_{\alpha} \delta(\xi - \alpha), \quad (10.6)$$

где  $C_{\alpha}$  - произвольные постоянные,  $C_{\alpha} \neq 0$ . Поэтому уравнение (10.3) при  $\lambda(t) = \lambda_{\alpha}(t)$

имеет единственное ненулевое решение из  $D'(Q_p)$  вида

$$\psi_\alpha(x) = C_\alpha \chi_p(\alpha x), \alpha \in Q_p. \tag{10.7}$$

Итак, оператор эволюции  $U(t)$  не имеет собственных значений; точкам (10.5) его спектра соответствуют обобщенные собственные функции (10.7).

### § 11. Обращение основной теоремы

Укажем некоторое обращение основной теоремы § 4.

Если псевдодифференциальный оператор  $A$  с символом вида

$$\mathcal{P}(|\xi_1|_p, \dots, |\xi_n|_p) + V(|x_1|_p, \dots, |x_n|_p), \tag{11.1}$$

где  $\mathcal{P}$  и  $V$  — непрерывные ограниченные снизу функции и  $\mathcal{P} \rightarrow +\infty$  при  $|\xi|_p \rightarrow \infty$  таков, что числа  $\lambda_k(A)$ ,  $k=1, 2, \dots$ , определяемые принципом минимакса (2.3), стремятся к  $+\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , то  $V \rightarrow +\infty$  при  $|x|_p \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Рассмотрим сначала случай  $n=1$ . Предположим, что  $V(|x|_p)$  не стремится к  $+\infty$  при  $|x|_p \rightarrow \infty$ . Тогда найдутся такое число  $K > 0$  и последовательность целых чисел  $\{\rho_k > 0, k=1, 2, \dots\}$ ,  $\rho_k \rightarrow +\infty, k \rightarrow \infty$ , что

$$V(p^{\rho_k}) \leq K, k=1, 2, \dots \tag{11.2}$$

Рассмотрим функции I рода (5.1') при  $\ell=2$  и  $N=2-\rho_k$

$$\psi_{2-\rho_k, j, \varepsilon_0}^2(x) = p^{-\rho_k/2} \sqrt{\frac{p}{p-1}} \delta(|x|_p - p^{\rho_k}) \chi_p(\varepsilon_0 p^{2\rho_k-2} x^2 + j p^{\rho_k-1} x) \tag{11.3}$$

и их преобразование Фурье (5.4')

$$\tilde{\psi}_{2-\rho_k, j, \varepsilon_0}^2(\xi) = p^{\frac{\rho_k-2}{2}} \sqrt{\frac{p}{p-1}} \delta(|\xi|_p - p^{2-\rho_k}) \chi_p(-p^{2-\rho_k} \frac{\xi^2}{4\varepsilon_0} - p^{1-\rho_k} \frac{j\xi}{2\varepsilon_0}), \tag{11.3'}$$

$$k = 1, 2, \dots, j, \varepsilon_0 = 1, 2, \dots, p-1.$$

Квадратичная форма (4.2) (при  $a(\xi) = \mathcal{P}(|\xi|_p)$  и  $V(x) = V(|x|_p)$ ) на функциях (11.3) принимает в силу (11.2) и (11.3') следующий вид:

$$A(\psi_{2-\rho_k, j, \varepsilon_0}^2, \psi_{2-\rho_k, j, \varepsilon_0}^2) = \int_{Q_p} \mathcal{P}(|\xi|_p) |\tilde{\psi}_{2-\rho_k, j, \varepsilon_0}^2(\xi)|^2 d\xi + \int_{Q_p} V(|x|_p) |\psi_{2-\rho_k, j, \varepsilon_0}^2(x)|^2 dx = \mathcal{P}(p^{2-\rho_k}) + V(p^{\rho_k}), k=1, 2, \dots,$$

и, следовательно, в силу (11.1) ограничена по  $k$  числом

$$\max_k \mathcal{P}(p^{2-\rho_k}) + K.$$

По теореме § 2 множество функций (11.3) должно быть компактным в  $\mathcal{L}_2(Q_p)$ , что несовместимо с ортонормальностью этой системы функций.

В случае  $n > 1$  доказательство проводится аналогично. В качестве ортонормальной системы функций нужно взять произведение функций (11.3) с различными аргументами.

## С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Vladimirov V.S., Volovich I.V. *p*-adic Quantum Mechanics // *Comm.Math.Phys.* 1989. Vol.123. P.659-676.
- [2] Зеленов Е.И. *p*-адическая квантовая механика при  $p=2$  // *Теорет. и мат. физика.* 1989. Т.80. С.253-264.
- [3] Vladimirov V.S., Volovich I.V. *p*-adic Schrödinger Type Equation // *Lett.Math.Phys.* 1989. Vol.18. P.43-53.
- [4] Vladimirov V.S. *p*-adic Analysis and *p*-adic Quantum Mechanics // *Ann. of the New York Ac. of Sc.: Symposium in Frontiers of Math.* 1988. New York.
- [5] Владимиров В.С., Волович И.В. Применение *p*-адических чисел в математической физике // *Тр. МИАН.* Т.200. 1990.
- [6] Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. Спектральная теория в *p*-адической квантовой механике и теория представлений // *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1990. Т.54. С.275-302.
- [7] Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. Спектральная теория в *p*-адической квантовой механике и теория представлений // *ДАН СССР.* 1990. Т.310, N 2. С.272-276.
- [8] Владимиров В.С. Обобщенные функции над полем *p*-адических чисел // *Успехи мат. наук.* 1989. Т.43, вып.5. С.17-53.
- [9] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1 // *Функциональный анализ.* М.: Мир, 1977; Т.4. Анализ операторов. 1982.

Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР  
117966, Москва, ул. Вавилова, д. 42

Поступило 15 апреля 1990 г.