Л. Е. Файбусович, Обобщенные потоки Тода, уравнения Риккати на грассманиане и *QR*-алгоритм, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 2, 88–89

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 2, 88—89

УДК 517.9

ОБОБЩЕННЫЕ ПОТОКИ ТОДА, УРАВНЕНИЯ РИККАТИ НА ГРАССМАНИАНЕ И QR-АЛГОРИТМ

Л. Е. Файбусович

Установленная в [1] связь QR-алгоритма и класса динамических систем, называемых обобщенными потоками Тода, инициировала ряд публикаций. Предложенный в [2; 3] QR-алгоритм оказался одним из наиболее эффективных алгоритмов для нахождения спектров различных классов матриц [4]. Его модификация с помощью численных методов интегрирования динамических систем, приводящая к существенному упрощению вычислительной схемы, представляет несомненный интерес. Настоящая заметка посвящена детальному изучению асимптотического поведения обобщенных потоков Тода. Наш подход основан на одном замечании Б. Костанта, В. Гийемина и С. Стернберга [5], согласно которому это поведение определяется действием однопараметрической группы линейных преобразований на многообразии полных флагов, т. е. на языке математической теории систем — асимптотическим поведением матричного дифференциального уравнения Риккати (см., например, [6—8]).

Для данной квадратной комплексной $n \times n$ матрицы Y пусть $Y = Y_+ + Y_0 + Y_-$, где Y_+, Y_- — строго верхнетреугольная и нижнетреугольная матрицы соответственно, а $Y_0 = \operatorname{Re}(Y_0) + i \operatorname{Im}(Y_0)$ — диагональная матрица. Положим $\Pi_0(Y) = Y_- - Y_-^* + i \operatorname{Im}(Y_0)$, где Y_-^* — эрмитово сопряженная к Y_- матрица. Для данной $n \times n$ матрицы X_0 пусть G — комплексная аналитическая функция, определенная в открытом множестве $\mathbf{C}$, содержащем спектр X_0. Фазовый поток динамической системы

$$\dot{X} = [X, \Pi_0(G(X))], \qquad X(0) = X_0 \tag{1}$$

назовем обобщенным потоком Тода [9]. Здесь [,] — обычный коммутатор матриц. Система (1) укладывается в схему Костанта — Симмса — Адлера [5]. Ее решение имеет вид $X(t) = Q^*(t) X_0 Q(t)$, где

$$\exp(tG(X_0)) = Q(t) R(t) \tag{2}$$

— разложение в произведение унитарной матрицы $Q(t)$ и верхнетреугольной матрицы $R(t)$ с вещественными неотрицательными элементами на диагонали (QR-разложение). Взяв $G(z) = \ln(z - c)$, где $c \in \mathbf{C}$ — некоторая константа, получим, что значения решения $X(t)$ задачи (1) при $t = 0, 1, \ldots$ суть последовательные итерации QR-алгоритма с постоянным сдвигом [9].

Для вещественного γ пусть $E(\gamma)$ — прямая сумма корневых подпространств матрицы $G(X_0)$, отвечающих собственным числам λ с $\operatorname{Re}\lambda = \gamma$. Пусть $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots \gamma_m$ — все вещественные числа, для которых $E(\gamma_i) \neq 0$. Положим $P_i = \sum\{E(\gamma_j): j \leqslant i\}$, $N_i = \sum\{E(\gamma_j): j \geqslant m + 1 - i\}$, $i \in [1, m]$. Пусть еще $\pi_i: \mathbf{C}^n \to E(\gamma_i)$, $i \in [1, m]$ — проекция на $E(\gamma_i)$ параллельно $\sum\{E(\gamma_j): j \neq i\}$. Для заданного подпространства $V \subset \mathbf{C}^n$ положим $\Pi_+(V) = \sum\{\pi_i(V \cap P_i): i \in [1, m]\}$, $\Pi_-(V) = \sum\{\pi_i(V \cap N_i): i \in [1, m]\}$. Пусть, далее, e_i, $i \in [1, n]$,— стандартный базис в $\mathbf{C}^n$ и V_i — подпространство, натянутое на e_j, $j \in [1, i]$. Положим $V_i^{\pm} = \Pi_{\pm}(V_i)$, $i \in [1, n]$. Ясно, что $0 \subset V_1^{\pm} \subset V_2^{\pm} \subset \ldots \subset V_n^{\pm} = \mathbf{C}^n$ образуют полные флаги подпространств в $\mathbf{C}^n$. Выберем в $\mathbf{C}^n$ ортонормированные базисы e_i^+, e_i^-, $i \in [1, n]$ так, чтобы e_j^+ (e_j^-), $j \in [1, i]$ порождали V_i^+ (V_i^-), $i \in [1, n]$. Пусть $Q_{\pm}$ — унитарные преобразования в $\mathbf{C}^n$, определяемые условиями $Q_{\pm} e_i = e_i^{\pm}$, $i \in [1, n]$. Пусть, наконец, $X_{\pm} = Q_{\pm}^* X_0 Q_{\pm} = \| x_{ij}^{\pm} \|$.

Теорема 1. *Пусть $G(X_0)$ полупроста и* $\exp[G(X_{\pm})t] = U_{\pm}(t) R_{\pm}(t)$ — QR-*разложения. Тогда унитарные матрицы $T_{\pm}(t) = U_{\pm}^*(t) Q_{\pm}^* Q(t) = \| t_{ij}^{\pm}(t) \|$ (см. (2), где определено $Q(t)$) таковы, что $t_{ij}^+(t) \to 0$, $t \to +\infty$; $t_{ij}^-(t) \to 0$, $t \to -\infty$; $i \neq j$. Для решения $X(t)$ задачи (1) имеют место представления*

$$X(t) = T_{\pm}^*(t) U_{\pm}^*(t) X_{\pm} U_{\pm}(t) T_{\pm}(t). \tag{3}$$

Из представлений (3) немедленно получаем

Следствие. Пусть в условиях теоремы 1 V_i^+ является $G(X_0)$-инвариантным подпространством, $i \in [1, n-1]$.

Если $X(t) = \| x_{ij}(t) \|$ — решение задачи (1), то

$$\lim | x_{ij}(t) | = | x^+_{ij} |, \quad t \to +\infty, \quad i \neq j; \quad \lim x_{ii}(t) = x^+_{ii}, \quad t \to +\infty, \ i \in [1, n], \tag{4}$$

где $X_+ = \| x^+_{ij} \| = Q^*_+ X_0 Q_+$. Если, кроме того, V^+_i — X_0-инвариантное подпространство, $i \in [1, n-1]$ (это, в частности, выполнено в двух следующих случаях: а) все собственные числа матрицы $G(X_0)$ имеют попарно различные вещественные части; б) $G(X_0)$ имеет только вещественные собственные числа и всякое $G(X_0)$ — инвариантное подпространство — X_0-инвариантно), то матрица X_+ верхнетреугольна. Если матрица X_0 нормальна, а все вещественные части собственных чисел матрицы $G(X_0)$ попарно различны, то имеет место (4) и матрица X_+ диагональна.

Замечание. Ясно, что имеет место аналогичное описание асимптотического поведения (1) при $t \to -\infty$.

Замечание. Результаты следствия обобщают известное описание асимптотического поведения QR-алгоритма [10]. Отметим, что аналог теоремы 1 в рамках теории QR-алгоритма не был получен ранее.

Идея доказательства теоремы 1 основана на следующем простом наблюдении. Рассмотрим стандартный флаг $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = \mathbf{C}^n$. В силу верхнетреугольности $Q(t)$ (см. (2)) имеем $\exp(G(X_0)t) V_i = Q(t) V_i$, $i \in [1, n]$. Асимптотическое поведение $R(t)$ определяет асимптотику решения $X(t)$ системы (1) и определяется асимптотическим поведением действия однопараметрической группы с генератором $G(X_0)$ на стандартном флаге. Но это последнее действие есть фазовый поток цепочки вложенных матричных дифференциальных уравнений Риккати. Асимптотическое поведение этих уравнений детально изучено в математической теории систем [8].

Теорема 2. *Пусть* $E_1 = \sum \{E(\gamma_i): i \in [p+1, n]\}$, $E_2 = \sum \{E(\gamma_i): i \in [1, p]\}$, $\dim E_1 = r$. *Пусть, далее,* $V_r \cap E_2 = 0$. *Если* $X(t) = \| x_{ij}(t) \|$ — *решение задачи* (1), *то* $\lim x_{ij}(t) = 0$, $t \to \infty$, $n \geqslant i \geqslant r+1$, $r \geqslant j \geqslant 1$.

Доказательство теоремы 2 сводится к утверждению о том, что $\lim \exp(G(X_0)t) \times V_r = E_1$, $t \to \infty$, в стандартной топологии грассманова многообразия r-мерных подпространств $\mathbf{C}^n$. Пара трансверсальных подпространств E_1, E_2 определяет карту на этом многообразии. Искомое утверждение становится очевидным при переходе в эту карту.

При определении матрицы рассеяния для системы (1), а также при численном определении спектра X_0 существен порядок расположения собственных чисел X_0 на диагонали $X_\pm$.

Теорема 3. *Пусть вещественные части собственных чисел матрицы* $G(X_0)$ *попарно различны. Для того чтобы диагональные элементы матрицы* X_+ (*совпадающие в силу следствия со спектром* X_0) *удовлетворяли условию* $\operatorname{Re} \overset{+}{x}_{11} > \operatorname{Re} \overset{+}{x}_{22} > \ldots > \operatorname{Re} \overset{+}{x}_{nn}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$V_i \cap (E(\gamma_1) \oplus \ldots \oplus E(\gamma_{n-i})) = 0, \ i \in [1, n-1].$$

Изучение алгоритмов типа QR в вычислительной линейной алгебре и асимптотического поведения матричных дифференциальных уравнений Риккати в математической теории систем началось примерно в одно и то же время (начало 60-х годов) и продолжается по настоящий момент. Удивительно, что, по-видимому, до сих пор тождественность рассматриваемых задач осталась неосознанной обеими сторонами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Symmes W. W.* // Physica.—1982.— V. 4D.— P. 275—280. 2. *Кублановская В. Н.* // ЖВМиМФ.—1961.— Т. 1, № 4.— С. 555—570. 3. *Фаддеев Д. К.*, *Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры.— М.: Физматгиз, 1963. 4. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений.— М.: Мир, 1983. 5. *Guillemin V.*, *Sternberg S.* Symplectic techniques in physics.— Cambridge: Camb. Univ. Press.—1984.— P. 468. 6. *Файбусович Л. Е.* // Функцион. анализ и его прил.—1985. — Т. 19, вып. 1.— С. 85—86. 7. *Faibusovich L. E.* // Int. J. Contr.—1986.— V. 43, № 3.— P. 781—792. 8. *Shayman M.* // SIAM J. Contr. Opt.—1986.— V. 24, № 1. — P. 1—65. 9. *Chu M. T.* // SIAM J. Alg. Discr. Meth.—1984.— V. 5, № 2.— P. 187—201. 10. *Воеводин В. В.*, *Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления.— М.: Наука. 1984.

Военная академия тыла
и транспорта

Поступило в редакцию
16 мая 1986 г.