V. N. Berestovskii, V. M. Gichev, Metrized left-invariant orders on topological groups,
*Algebra i Analiz*, 1999, Volume 11, Issue 4, 1–34

https://www.mathnet.ru/eng/aa1061

Алгебра и анализ
Том 11 (1999), вып. 4

# МЕТРИЗОВАННЫЕ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ ПОРЯДКИ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ

© В. Н. Берестовский, В. М. Гичев

В работе предлагается метрический подход к изучению левоинвариантных порядков на топологических группах в связи с задачами теории оптимального управления. Вводятся три системы аксиом для метризованного порядка, связанные с понятиями полугруппы множеств, (почти) внутренней антиметрики и подграфика функции „антирасстояния" до единицы группы, и доказывается их эквивалентность. Понятие внутренней антиметрики включает в себя расстояние, определямое лоренцевой метрикой на группе Ли как точная верхняя граница длин временноподобных кривых, соединяющих данные точки. Метризованные порядки на локально-компактных группах реализованы в виде предела метризованных порядков на группах Ли. Предварительно изучаются острые и локально порожденные полугруппы в топологических группах.

## Введение

Изучение инвариантных порядков на однородных пространствах первоначально мотивировалось проблемами обоснования теории относительности, построенного на понятии причинности (А. Робб, А. Д. Александров [A]). С начала 80-х годов интенсивно изучаются двусторонне инвариантные порядки на группах Ли (Э. Б. Винберг [Vi], С. Панейц [Pa], Г. И. Ольшанский [Ol1, Ol2]), задаваемые полугруппами Ли. Левоинвариантные порядки на группах Ли изучены гораздо меньше. Во многом это обусловлено существованием неголономных левоинвариантных порядков, что составляет принципиальное отличие от двусторонне инвариантного случая. Вся эта проблематика тесно связана с известной в теории оптимального управления задачей определения множеств достижимости.

*Ключевые слова:* острые, локально порожденные полугруппы, полугруппы множеств, функция расстояния.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 97-01-00687.

Примером метризованного порядка в нашем понимании может служить пространство-время Минковского с лоренцевой функцией расстояния. Лоренцевы метризации эллиптических порядков определяются с точностью до конформных преобразований метрики. Существуют группы Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками, являющимися решениями уравнений Эйнштейна, среди них — стационарный цилиндрический мир Эйнштейна с постоянной положительной пространственной кривизной и некоторые стационарные миры Фридмана с постоянной отрицательной кривизной (отвечающие отрицательной плотности материи). Помимо лоренцевых метризаций инвариантные порядки на группах Ли допускают множество анизотропных метризаций. В связи с этим отметим, что в последние годы изучаются анизотропные финслеровы обобщения теории относительности (см., например, монографии [Pil, Bo]).

В данной работе предлагаются три естественные, на наш взгляд, системы аксиом, относящиеся к метризованным порядкам, и доказывается их эквивалентность. Аксиоматики являются для нас не самоцелью, а необходимым средством для точного определения объекта исследования, изучения его с разных точек зрения и в разных ситуациях. Важное значение при нашем подходе имеют понятия острой и локально порожденной полугрупп. Упомянутые выше полугруппы Ли, определяющие порядок, — в точности острые и локально порожденные полугруппы в группах Ли.

Наиболее традиционна, хотя и не получила широкого распространения, система аксиом АМ, определяющая по нашей терминологии левоинвариантные почти внутренние антиметрики $\tau$ на топологической группе $G$. В основном это понятие совпадает с понятием (левоинвариантной) внутренней кинематической метрики у Р. И. Пименова [Pi2], подчиненной дополнительному условию совпадения интервальной (александровской) топологии для $\tau$ на $G$ с исходной. Почти внутренняя антиметрика является некоторым обобщением внутренней кинематической метрики в [Pil, Pi2]. В случае полной топологической группы эти понятия совпадают. В лоренцевой геометрии известны аналоги или синонимы этого понятия: мировая функция, функция расстояния, характеристическая функция [Syn]. Мировая функция (введенная Рузе в 1931 г.) у Дж. Синга в [Syn] определяется как половина квадрата меры геодезической, соединяющей достаточно близкие точки; геодезические могут быть невременноподобными. Мировая функция в лоренцевой геометрии играет столь же фундаментальную роль, как внутренняя метрика в римановой геометрии (определенная Хопфом и Риновом в 1931 г.). Длину временноподобной (длиннейшей) кривой относительно антиметрики можно интерпретировать как собственное время жизни (свободной) частицы положительной массы. Такой подход обусловлен представлением о времени как основной величине в пространстве-времени.

Система аксиом МП („метризованный порядок“ или „множеств полугруппа") основана на введенном А. Глисоном понятии однопараметрической полугруппы множеств в топологической группе. Метризованный порядок на $G$ определяется как строго убывающая однопараметрическая полугруппа $\{U_t\}_{t\geq 0}$ открытых множеств в $G$ с пустым пересечением, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям. Для антиметрики $\tau$, $U_t := \{g \in G : \tau(e,g) > t\}$ — „внешний шар" радиуса $t$ с центром в единице $e$ в терминологии [Bim]. Эта система аксиом аналогична и в некотором смысле двойственна введенной в работе [BPS] аксиоматике геометрии на топологической группе, основанной на следующем наблюдении: открытые шары $V_t$, $t > 0$, радиусов $t$ с центром в единице группы $G$ с левоинвариантной внутренней метрикой образуют однопараметрическую полугруппу множеств в $G$.

Наиболее экономная и удобная в техническом отношении аксиоматика ПГ относится к функции $\mathfrak{t}(g) := \max\{0, \tau(e,g)\}$ на $G$: $\mathfrak{t}$ неотрицательна и непрерывна, а ее подграфик является острой и локально порожденной полугруппой. Подобным же образом можно охарактеризовать левоинвариантные (почти) внутренние метрики в терминах надграфиков. Между ними имеется и прямая связь. Как показывает теорема 2.3, изучение левоинвариантных (почти) внутренних метрик на группах в некотором смысле охватывается исследованием (почти) внутренних антиметрик.

Изучение левоинвариантных (почти) внутренних антиметрик по сравнению с внутренними метриками сопряжено с дополнительными трудностями, например с неограниченностью внешних шаров $U_t$. Поэтому изучению острых и локально порожденных полугрупп в топологических группах приходится посвятить специальный раздел.

В работе изучаются метризованные порядки на общих метризуемых топологических группах. Из более специальных классов топологических групп рассматриваются лишь локально компактные, для которых доказана возможность реализации любого метризованного порядка в виде предела метризованных порядков на группах Ли.

Предложенный в работе подход охватывает с единой точки зрения все левоинвариантные финслеровы, в том числе классические лоренцевы, анизотропные, а также и неголономные антиметрики на группах Ли. Неголономная геометрия имеет длительную историю, связанную с задачами механики, термодинамики и других областей. В то же время неголономная метрическая геометрия, являющаяся обобщением римановой и финслеровой геометрий, по-настоящему изучалась лишь начиная с работ М. Громова конца 70-х–начала 80-х годов. Результаты в этом направлении обобщены в монографии [Gr]. На русском языке есть обзор [VG]. В работе [B3] доказано, что всякая левоинвариантная внутренняя метрика на группе Ли является финслеровой, возможно, неголономной. Это означает, что существуют левоинвариантное, вполне неголономное распределение $\Delta$ подпространств касательного расслоения и норма $F$ на $\Delta$ такие, что расстояние между точками равно точной нижней границе (измеряемых относительно $F$) длин соединяющих их путей, касающихся $\Delta$. Авторами получен аналогичный результат для антиметрик с заменой нормы на антинорму, а точной нижней границы — на верхнюю. Под антинормой понимается функция $\mathfrak{t}$ на векторном пространстве со свойствами: $\mathfrak{t}$ неотрицательна, непрерывна, обращается в нуль вне открытого острого выпуклого конуса $U_0$ и положительна на $U_0$, $\mathfrak{t}$ однородна степени 1 (т.е. $\mathfrak{t}(tv) = t\mathfrak{t}(v)$ для всех $t \geq 0$, $v \in V$) и $\mathfrak{t}(u + v) \geq \mathfrak{t}(u) + \mathfrak{t}(v)$ для всех $u, v \in U_0$. Неголономность метрики (антиметрики) означает, что распределение $\Delta$ не совпадает с касательным расслоением группы Ли. Это невозможно, если метрика (антиметрика) биинвариантна. С другой стороны, существуют левоинвариантные неголономные внутренние метрики (антиметрики), например на всякой неабелевой односвязной нильпотентной группе Ли. В связи с этим отметим, что полученное в работе [Gi] необходимое и достаточное условие того, чтобы инвариантный относительно присоединенного представления конус в алгебре Ли определял двусторонне инвариантное упорядочение, также выражается в метрических терминах (порядка касания конуса с некоторыми специальными подпространствами). Этот эффект позднее получил объяснение в терминах неголономной геометрии.

Насколько известно авторам, неголономные метризованные порядки до сих пор не изучались. Поиск длиннейших для внутренних антиметрик на группах Ли связан с применением методов оптимального управления (подобно исследованию внутренних метрик и их кратчайших в работе [B2]). Отдельного рассмотрения заслуживает также случай топологических векторных пространств. В работе [Ra2] приведен ряд интересных примеров внутренних метрик и получено описание полугрупп компактных подмножеств в локально выпуклых векторных пространствах. Из-за недостатка места результаты о метризованных порядках на группах Ли и топологических векторных пространствах будут опубликованы позднее (основной результат для групп Ли кратко описан выше). Здесь мы рассматриваем лишь метрический и топологический аспекты проблематики. Мы благодарны рецензенту, внимательно прочитавшему текст работы и сделавшему ряд полезных замечаний, позволивших, в частности, упростить доказательство п. б) леммы 1.3.

## §1. Подполугруппы и полугруппы множеств в топологических группах

Произведение $AB$ подмножеств $A, B$ группы $G$ определяется как множество всех попарных произведений $ab$, где $a \in A$, $b \in B$; при этом произведение будем считать пустым множеством, если хотя бы один из сомножителей пуст. Множество $S \subseteq G$ называется полугруппой, если $S^2 \subseteq S$.

Обозначим через $\mathcal{T}_e$ семейство всех открытых окрестностей единицы $e$ в топологической группе $G$.

**Определение 1.1.** Полугруппу $S$ в топологической группе $G$ будем называть *локально порожденной*, если она топологически порождается пересечением любой окрестности единицы с ней:

$$S \subseteq \operatorname{clos} \bigcup_{n=1}^{\infty} (V \cap S)^n \quad \text{для всех } V \in \mathcal{T}_e \tag{1.1}$$

(т.е. алгебраически порожденная множеством $V \cap S$ полугруппа плотна в $S$).

**Определение 1.2.** Полугруппу $S$ в топологической группе $G$ будем называть *острой*, если

(a) $e \in \operatorname{clos} S$;

(b) для каждой окрестности $U \in \mathcal{T}_e$ найдется $V \in \mathcal{T}_e$ такая, что условия $x, y \in S$, $xy \in V$ влекут за собой включения $x, y \in U$.

Другими словами, если мало́ произведение, то малы и сомножители. Импликацию в условии (b) можно записать в виде включения

$$(VS^{-1} \cap S) \cup (S^{-1}V \cap S) \subseteq U, \tag{1.2}$$

при этом (a) гарантирует непустоту множеств $VS^{-1} \cap S$ и $S^{-1}V \cap S$. Оба определения легко переформулируются для полугрупп, не вложенных в группы. Часто используемое условие

$$\operatorname{clos} S \cap \operatorname{clos} S^{-1} = \{e\} \tag{1.3}$$

является следствием определения 1.2, а в случае локально компактной $G$ и локально порожденной $S$ условие (1.3) ему равносильно (предложение 1.1).

Условие (1.3) гарантирует, что формула

$$x \leq y \Leftrightarrow x^{-1}y \in \operatorname{clos} S \tag{1.4}$$

задает левоинвариантное упорядочение в группе $G$, для которого полугруппа $\operatorname{clos} S \setminus \{e\}$ совпадает с множеством положительных (т.е. строго бо́льших единицы) элементов.

В следующей лемме отмечаются некоторые простые свойства полугрупп (доказательство опускается ввиду его тривиальности).

**Лемма 1.1.** а) *Пусть $S_1, S_2$ — острые (локально порожденные) полугруппы в группах $G_1, G_2$. Тогда полугруппа $S_1 \times S_2$ в $G_1 \times G_2$ острая (локально порожденная).*

б) *Если $S_1$, $S_2$ — полугруппы в группе $G$, $S_1 \subseteq S_2$, $e \in \operatorname{clos} S_1$ и полугруппа $S_2$ острая, то полугруппа $S_1$ тоже острая.*

в) *Если $p : G_1 \to G_2$ — непрерывный гомоморфизм и $S$ — локально порожденная полугруппа в $G_1$, то $p(S)$ — локально порожденная полугруппа в $G_2$.*

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих данные выше определения.

**Пример 1.1.** Пусть $G$ — аддитивная группа рациональных точек в $\mathbb{R}^2$ с наследованной из $\mathbb{R}^2$ топологией, $S = \{(u,v) \in G : v - \sqrt{2}u > 0\}$. Тогда для $S$ выполняется (1.3), хотя $S$ не является острой. При этом $S$ замкнута в $G$. Группа $G$ неполна, и для замыкания $S$ в пополнении $G$ не выполняется (1.3).

**Пример 1.2.** Для целого $n \neq 0$ обозначим через $k(n)$ наибольшее натуральное $k$ такое, что $2^k$ делит $n$. Пусть

$$S_1 = \{(n, 2^{-k(n)}) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{(0,0)\}, \quad S_2 = \{(x,y) : y \geq |x|,\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда $S = S_1 + S_2$ — замкнутая полугруппа в $\mathbb{R}^2$, для которой выполняется (1.3), но для каждого $x \in \operatorname{Int} S$ множество $S \cap (x - S)$ неограниченно. В этом примере полугруппа $S$ не является локально порожденной, группа $G$ локально компактна.

**Пример 1.3.** Пусть $X$ — бесконечномерное банахово пространство, $A : X \to X$ — компактный линейный оператор с тривиальным ядром, $S$ — конус в $\mathbb{R} \oplus X$, заданный неравенством $t - \|Ax\| \geq 0$ ($t \in \mathbb{R}$, $x \in X$). Легко проверить, что (1.3) выполнено, но $S$ не является острой полугруппой; поскольку множество вида $\{x \in X : \|Ax\| \leq t\}$ неограниченно при любом $t > 0$ — это означает, что включения $t \oplus x \in S$, $t \oplus (-x) \in S$ возможны при сколь угодно большом по норме $x \in X$ для каждого $t > 0$, хотя сумма этих элементов, равная $t \oplus 0 \in S$, может быть сколь угодно мала. Полугруппа $S$ локально порождена; группа $G$ не является нелокально компактной.

**Замечание.** Во всех предыдущих примерах интервальная топология (см. определение 1.4 ниже) строго слабее исходной топологии группы.

**Пример 1.4.** Пусть $G$ — аддитивная группа пространства $L^p[0,1]$ (вещественнозначных функций), $0 < p \leq \infty$, $S$ — множество почти всюду положительных функций в $G$. Полугруппа $S$ острая и локально порожденная. При всех указанных значениях $p$ справедливо равенство $G = S - S$, но внутренность $S$ непуста лишь при $p = \infty$. При остальных значениях $p$ интервальная топология строго сильнее исходной.

В действительности для острых полугрупп выполняется более сильное, чем (b), условие:

(b′) для любой $U$ из $\mathcal{T}_e$ найдется $V$ из $\mathcal{T}_e$ такая, что $V \subseteq U$ и

$$x, y \in S,\ xy \in V \implies x, y \in V. \tag{1.5}$$

Прежде чем доказывать это утверждение, отметим несколько простых тождеств, верных для любых множеств $A \subseteq G$:

$$AS^{-1} \cap S = (A \cap S)S^{-1} \cap S; \qquad S^{-1}A \cap S = S^{-1}(A \cap S) \cap S;$$

$$S^{-1}AS^{-1} \cap S = S^{-1}(A \cap S)S^{-1} \cap S.$$

Действительно, пусть $g \in S$ и $g = x^{-1}ay^{-1}$, где $a \in A$, $x, y \in S$. Тогда $a = xgy \in S$, откуда $S^{-1}AS^{-1} \cap S \subseteq S^{-1}(A \cap S)S^{-1} \cap S$. Поскольку противоположное включение очевидно, это доказывает последнее из равенств; остальные доказываются аналогично.

**Лемма 1.2.** *Для каждой острой полугруппы $S$ в $G$ выполняется условие* (b′); *обратно, если для полугруппы $S$ выполняются* (a) *и* (b′), *то $S$ острая. При этом выполнение* (a) *влечет равносильность импликации* (1.5) *и включения*

$$S^{-1}VS^{-1} \cap S \subseteq V. \tag{1.6}$$

*Если $S^2 = S$, то $V \subseteq U$ в* (b′) *можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство*

$$S^{-1}VS^{-1} \cap S = V \cap S. \tag{1.7}$$

**Доказательство.** Доказательство равносильности импликации (1.5) и включения (1.6) стандартно. Очевидно, условие (b′) сильнее условия (b). Таким образом, требуется установить, что для острой полугруппы выполняется (1.6) (в обозначениях (b′)) и в случае $S^2 = S$ (1.7).

Пусть $S$ — острая полугруппа, $U \in \mathcal{T}_e$. Выберем $W_1, W_2 \in \mathcal{T}_e$ так, чтобы

$$W_1S^{-1} \cap S \subseteq U, \quad S^{-1}W_2 \cap S \subseteq W_1,$$

и положим $V = S^{-1}W_2S^{-1} \cap U$. Тогда $V \in \mathcal{T}_e$, $V \subseteq U$, и так как

$$S^{-1}W_2S^{-1} \cap S = (S^{-1}W_2 \cap S)S^{-1} \cap S \subseteq W_1S^{-1} \cap S \subseteq U,$$

то $V \cap S = S^{-1}W_2S^{-1} \cap S$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S^{-1}VS^{-1} \cap S &= S^{-1}(V \cap S)S^{-1} \cap S = S^{-1}(S^{-1}W_2S^{-1} \cap S)S^{-1} \cap S \\ &= S^{-1}(S^{-1}W_2S^{-1})S^{-1} \cap S = S^{-2}W_2S^{-2} \cap S \\ &\subseteq S^{-1}W_2S^{-1} \cap S = V \cap S, \end{aligned}$$

причем единственное включение в этой цепочке обращается в равенство, если $S^2 = S$. $\bullet$

**Определение 1.3.** Пусть $X$ — множество с заданным на нем отношением предпорядка $\leq$. Определенная на $X$ вещественная функция $f$ называется *неубывающей*, если $f(x) \leq f(y)$ для всех пар $x, y$ таких, что $x \leq y$.

В случае левоинвариантного предпорядка в группе $G$, заданного полугруппой $S$ по правилу (1.4), это условие равносильно выполнению неравенства

$$f(yx) \geq f(y) \quad \text{для всех } x \in S, \ y \in G.$$

**Лемма 1.3.** а) *Если $G$ локально компактна и недискретна, полугруппа $S$ замкнута и удовлетворяет условию* (1.3), *причем $e$ содержится в замыкании внутренности $S$, то найдутся неубывающая непрерывная функция $f$ на $G$ и окрестность $V \in \mathcal{T}_e$ такие, что $f(e) = 0$ и $f(g) > 0$ при $g \in (S \cap V) \setminus \{e\}$.*

б) *Если, кроме того, $S$ локально порождена, то функцию $f$ можно выбрать строго положительной на $S \setminus \{e\}$ и удовлетворяющей условию: для любой окрестности $U \in \mathcal{T}_e$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что множество*

$$F_\varepsilon := \{g \in S : f(g) \leq \varepsilon\}$$

*компактно и содержится в $U$.*

**Доказательство.** а) Пусть $\sigma$ — левоинвариантная мера на $G$, $\chi$ — характеристическая функция $S$, $U$ — произвольная окрестность единицы с компактным замыканием, $U = U^{-1}$, $\eta$ — характеристическая функция множества $U \setminus S^{-1}$. Последнее множество непусто благодаря тому, что $U \neq \{e\}$ ($G$ недискретна), $U$

пересекается с внутренностью $S$, которая не совпадает с $\{e\}$, а также благодаря (1.3). Определим $f$ как свертку

$$f(g) = \int \chi(x^{-1}g)\eta(x)\,d\sigma(x).$$

Поскольку $\chi$ — неубывающая функция и $\eta \geq 0$, то $f$ не убывает. Доказательство непрерывности стандартно. Очевидно, $f(e) = 0$. Окрестность $V \in \mathcal{T}_e$ подберем так, чтобы $VV^{-2} \subseteq U$. Так как выражение под знаком интеграла равно единице при $x \in gS^{-1} \cap (U \setminus S^{-1})$, то для проверки положительности $f$ на $V_0 := (S \cap V) \setminus \{e\}$ достаточно доказать, что внутренность множества $S \cap (U \setminus S)g = (gS^{-1} \cap (U \setminus S^{-1}))^{-1}g$ непуста для всех $g \in V_0$. Отметим, что $e \notin Sg$ благодаря (1.3). Так как $g \in V_0$ и $V_0 V_0^{-2} \subseteq U$, то $V_0 g^{-2} \subseteq U$, откуда $e \in V_0 g^{-1} \subseteq Ug$. Осталось лишь заметить, что $Ug \setminus Sg \in \mathcal{T}_e$, поскольку множество $Sg$ замкнуто, а также что внутренность множества $(U \setminus S)g \cap S$ непуста ввиду того, что $e$ содержится в замыкании внутренности $S$.

б) Выберем $W_1, W_2 \in \mathcal{T}_e$ так, чтобы $\operatorname{clos} W_1 \subseteq V$, $\operatorname{clos} W_2^2 \subset W_1$ и окрестность $W_1$ имела компактное замыкание. Можно считать, что $(S \cap \operatorname{clos} W_1) \setminus W_2$ — непустое компактное подмножество $(V \cap S) \setminus \{e\}$. Действительно, $S \neq \{e\}$, так как в противном случае группа $G$ была бы дискретной (по условию $S$ имеет непустую внутренность). Поэтому можно предположить, что $S \setminus V \neq \varnothing$. Благодаря этому и локальной порожденности $S$ найдутся $s_1, s_2 \in S \cap W_2$ такие, что $s = s_1 s_2 \notin W_2$; но тогда, так как $W_2^2 \subset W_1$, то $s \in (S \cap W_1) \setminus W_2$. Это доказывает непустоту; компактность очевидна. Выберем $f$ так, чтобы было выполнено а). Тогда

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \inf\{f(g) : g \in (S \cap \operatorname{clos} W_1) \setminus W_2\} > 0.$$

Положим $\widetilde{F}_\varepsilon = F_\varepsilon \cap W_1$; тогда $\widetilde{F}_\varepsilon \subseteq W_2 \subseteq U$ и $\widetilde{F}_\varepsilon W_2 \subseteq W_1$. Следовательно, $\widetilde{F}_\varepsilon = F_\varepsilon \cap \operatorname{clos} W_1$ и $\widetilde{F}_\varepsilon$ — компакт. Докажем, что $\widetilde{F}_\varepsilon = F_\varepsilon$. Согласно условиям леммы, полугруппа, порожденная множеством $\widetilde{F}_\varepsilon$, плотна в $S$. Поэтому предположение $\widetilde{F}_\varepsilon \neq F_\varepsilon$ означает существование набора $s_1, \ldots, s_n \in \widetilde{F}_\varepsilon$ такого, что $s_1 s_2 \cdots s_n \in F_\varepsilon \setminus \widetilde{F}_\varepsilon$. Обозначим $x_l = s_1 \cdots s_l$. Ввиду неубывания $f$, $x_l \in F_\varepsilon$ для $l = 1, \ldots, n$; при этом $x_n \notin W_1$. Пусть $k$ — наибольшее такое, что $x_k \in W_1$. Ясно, что $1 \leq k < n$. Так как $x_k \in F_\varepsilon$, то $x_k \in W_2$. Тогда $x_{k+1} \in W_2^2 \subseteq W_1$, что приводит к противоречию с выбором $k$. •

**Лемма 1.4.** *Пусть $U$ — открытая полугруппа в $G$, подчиненная условию $e \in \operatorname{clos} U$. Тогда множество $gU \cap hU^{-1}$ непусто тогда и только тогда, когда $h \in gU$. Кроме того, непустые множества вида $gU \cap hU^{-1}$, $g, h \in G$, образуют базу* *топологии в $G$, предбазой которой является семейство множеств вида $gU^{\pm 1}$, $g \in G$.*

**Доказательство.** Если $f \in gU \cap hU^{-1}$, то $f \in gU$, $h \in fU$. Следовательно, $h \in gU^2 \subseteq gU$. Обратно, пусть $h \in gU$. Так как $gU$ — окрестность $h$, а $h \in \operatorname{clos} hU^{-1}$, то $gU \cap hU^{-1} \neq \varnothing$.

Пусть $f \in gU \cap hU =: V$. Тогда $V$ — открытая окрестность $f$, причем $f \in \operatorname{clos} fU^{-1}$. Следовательно, $V \cap fU^{-1} \neq \varnothing$; пусть $l$ — некоторый элемент этого множества. Очевидно, $f \in lU \subseteq V$. Аналогично доказывается, что если $f \in gU^{-1} \cap hU^{-1}$, то $f \in lU^{-1} \subseteq gU^{-1} \cap hU^{-1}$ для некоторого $l \in G$. Отсюда непосредственно вытекает, что если $f$ — общий элемент конечного семейства множеств $g_kU^{\varepsilon_k}$, $\varepsilon_k = \pm 1$, то $f$ содержится в некотором интервале $gU \cap hU^{-1}$, содержащемся во всех множествах $g_kU^{\varepsilon_k}$. •

**Определение 1.4.** Эта топология называется *интервальной*, или *александровской* (впервые она была определена А. Д. Александровым).

**Предложение 1.1.** *Пусть $G$ — топологическая хаусдорфова группа, $S$ — полугруппа в $G$. Тогда*

а) *если $S$ острая, то выполняется* (1.3);

б) *если $S$ открыта и $e \in \operatorname{clos} S$, то порожденная $S$ интервальная топология совпадает с исходной топологией группы $G$ в том и только том случае, когда $S$ острая*;

в) *если $G$ локально компактна, а полугруппа $S$ локально порождена и $e$ содержится в замыкании внутренности $S$, то верно обратное к* а) *утверждение.*

**Доказательство.** а) В противном случае существует $u \in G$ со свойствами $u, u^{-1} \in \operatorname{clos} S$ и $u \neq e$; тогда $uV \cap S \neq \varnothing$, $u^{-1}V \cap S \neq \varnothing$ для всех $V \in \mathcal{T}_e$. Существует окрестность $U \in \mathcal{T}_e$ такая, что множества $uU$ и $u^{-1}U$ не пересекаются с $U$. Тогда для произвольной $V \in \mathcal{T}_e$ найдутся $x, y \in S$ такие, что $xy \in V$, но $x, y \notin U$ — достаточно найти $W \in \mathcal{T}_e$ со свойствами $(uWu^{-1})W \subseteq V \cap U$, $W \subseteq U$ и взять $x$ из $uW \cap S$, а $y$ из $u^{-1}W \cap S$.

б) Интервальная топология слабее (нестрого) исходной, поскольку порядковые интервалы открыты. Пусть $W \in \mathcal{T}_e$. Выберем симметричную окрестность $U \in \mathcal{T}_e$ так, чтобы $U^2 \subseteq W$. Если $S$ острая, то, согласно (1.2), $U$ содержит нетривиальный порядковый интервал $I = xS^{-1} \cap S$, где $x \in S \cap V$ (этот интервал содержится в множестве $VS^{-1} \cap S$). Тогда для $y \in I$ интервал $y^{-1}I$ содержится в $W$ и $e \in y^{-1}I$. Поэтому интервальная топология не может быть строго слабее, чем исходная топология группы. Обратно, пусть интервальная топология совпадает с исходной. Тогда любая окрестность $U \in \mathcal{T}_e$ содержит порядковый интервал $V = gS^{-1} \cap h^{-1}S$, где $g, h \in S$ такой, что $V^{-1}V \subseteq U$. Если $x, y \in S$ и

$xy \in V$, то $xy = gz^{-1}$ для некоторого $z \in S$, поэтому $x = g(yz)^{-1} \in gS^{-1}$, т.е. $x \in gS^{-1} \cap S \subset V$. Тогда $y = x^{-1}(xy) \in V^{-1}V \subseteq U$.

в) Достаточно доказать выполнение определения 1.2 для $\operatorname{clos} S$, поэтому можно предполагать $S$ замкнутой. Пусть $U \in \mathcal{T}_e$, $U = U^{-1}$, а $f$, $\varepsilon$ и $F_\varepsilon$ построены по $U$, как в лемме 1.3 (в частности, множество $F_\varepsilon$ компактно). Выберем $V \in \mathcal{T}_e$ так, чтобы $V \subseteq U$, $V^{-1}F_\varepsilon \subseteq U$ и $f(g) < \varepsilon$ при $g \in V$. Если $x, y \in S$, $xy \in V$, то $f(xy) < \varepsilon$ и ввиду неубывания $f$ $f(x) < \varepsilon$, откуда $x \in F_\varepsilon \subseteq U$ и $y = x^{-1}(xy) \in F_\varepsilon^{-1}V \subseteq U$. •

**Лемма 1.5.** *Пусть $S$ — открытая локально порожденная полугруппа. Тогда для любой $U \in \mathcal{T}_e$*

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty}(S \cap U)^n.$$

**Доказательство.** Обозначим через $\widetilde{S}$ множество в правой части доказываемого равенства. Пусть $x \in S$. Так как $S$ открыта в $G$, то существует $V \in \mathcal{T}_e$ такая, что $xV \subset S$, $V^{-1} = V$ и $V \subseteq U$. По определению локальной порожденности множество $\widetilde{S}$ плотно в $S$, поэтому $x(V \cap S^{-1}) \cap \widetilde{S} \neq \varnothing$ (в противном случае $S \setminus \widetilde{S}$ содержит непустое открытое подмножество $x(V \cap S^{-1})$; $V \cap S^{-1} \neq \varnothing$ также благодаря локальной порожденности $S$). Это означает, что $x \in \widetilde{S}(S \cap V) \subseteq \widetilde{S}(S \cap U)$; с другой стороны, непосредственно из определения $\widetilde{S}$ следует включение $\widetilde{S} \supseteq \widetilde{S}(S \cap U)$. •

**Определение 1.5.** Семейство множеств $\{S_t\}_{t \geq 0}$ в $G$ будем называть *однопараметрической полугруппой множеств*, если $S_t S_s = S_{t+s}$ для всех $t, s \geq 0$ и $S_t \neq \varnothing$ для всех $t \geq 0$.

Согласно этому определению, $S_0^2 = S_0$, в частности $S_0$ — полугруппа. Поскольку мы будем рассматривать только однопараметрические полугруппы множеств, условимся употреблять термин *полугруппа множеств* по отношению к введенному понятию. Полугруппу $\{S_t\}_{t \geq 0}$ будем называть *убывающей* (*возрастающей*), если $S_t \supseteq S_s$ при $t \leq s$ ($t \geq s$).

**Лемма 1.6.** *Пусть $S_t$ — полугруппа множеств, $V \in \mathcal{T}_e$ удовлетворяет условию* (b′) *относительно полугруппы $S = \bigcup_{t \geq 0} S_t$. Тогда*

$$(S_t \cap V)(S_s \cap V) \cap V = S_{t+s} \cap V$$

*для всех $t, s \geq 0$.*

**Доказательство.** Левая часть равенства, очевидно, содержится в правой. Пусть $g \in S_{t+s} \cap V$. По определению полугруппы множеств найдутся $x \in S_t$, $y \in S_s$ такие, что $g = xy$. Согласно (b′), $x, y \in V$. •

Каждой полугруппе множеств $\{S_t\}_{t \geq 0}$ можно сопоставить точечную полугруппу в группе $G \times \mathbb{R}$:

$$\widetilde{S} = \{(g,t) : t \geq 0,\ g \in S_t\} = \bigcup_{t \geq 0} (S_t \times \{t\}). \tag{1.8}$$

Множество $\widetilde{S}$ строится по любому однопараметрическому семейству $\{S_t\}_{t \geq 0}$; оно является полугруппой тогда и только тогда, когда $S_t S_s \subseteq S_{t+s}$ для всех $t, s \geq 0$. Если $\{S_t\}_{t \geq 0}$ — полугруппа множеств, то $\widetilde{S}$ обладает свойством $\widetilde{S}^2 = \widetilde{S}$.

**Определение 1.6.** Полугруппу множеств $\{S_t\}_{t \geq 0}$ будем называть *локально порожденной*, если определенная формулой (1.8) полугруппа $\widetilde{S}$ локально порождена, и *острой*, если $\widetilde{S}$ острая.

Из этого определения следует, что полугруппа $S_0$ острая, если $\{S_t\}_{t \geq 0}$ острая (при этом $S_0$ может состоять из одного элемента $e$). Для доказательства нужно лишь заметить, что условия $x, y \in \widetilde{S}$, $xy \in \widetilde{S} \cap (G \times \{0\})$ влекут за собой включения $x, y \in \widetilde{S} \cap (G \times \{0\})$. Во многих случаях аналогичное утверждение можно доказать и для локально порожденных полугрупп.

**Лемма 1.7.** *Если $\{S_t\}_{t \geq 0}$ — локально порожденная полугруппа множеств в $G$ и $p : G \to H$ — непрерывный гомоморфизм, то семейство $\{p(S_t)\}_{t \geq 0}$ образует локально порожденную полугруппу множеств в $H$.*

**Доказательство.** Гомоморфизм $p$ продолжается до гомоморфизма $\widetilde{p} : G \times \mathbb{R} \to H \times \mathbb{R}$ формулой $\widetilde{p}(g,t) = (p(g), t)$. Согласно лемме 1.1, полугруппа $\widetilde{p}(\widetilde{S})$ локально порождена; очевидно, $\widetilde{p}(\widetilde{S})$ совпадает с полугруппой, построенной по $p(\{S_t\}_{t \geq 0})$, как в (1.8). •

Условия следующей леммы выполняются, в частности, для убывающих локально порожденных полугрупп, состоящих из открытых множеств.

**Лемма 1.8.** *Пусть $\{U_t\}_{t \geq 0}$ — убывающее семейство непустых открытых подмножеств $G$ такое, что множество $\widetilde{U}$ в $G \times \mathbb{R}$, определенное по $\{U_t\}_{t \geq 0}$ формулой (1.8), представляет собой локально порожденную полугруппу. Тогда*

$$U_t = \bigcup_{s > t} U_s \tag{1.9}$$

*для всех* $t \geq 0$.

**Доказательство.** Обозначим через $U^t$, $t \geq 0$, множество в правой части (1.9). Требуется доказать, что $U_t = U^t$. Так как $\widetilde{U}$ — полугруппа, то $U_t U_s \subseteq U_{t+s}$ при $t, s \geq 0$. Следовательно,

$$U_t U^0 = U_t \bigcup_{s>0} U_s = \bigcup_{s>0} U_t U_s \subseteq \bigcup_{s>0} U_{t+s} = \bigcup_{s>t} U_s = U^t.$$

Из локальной порожденности $\widetilde{U}$ и непустоты $U_s$ при $s > 0$ следует, что любая окрестность единицы $V$ в $G$ содержит элементы $U_s$ для достаточно малых $s > 0$ (иначе некоторая окрестность единицы в $G \times \mathbb{R}$ вида $V \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ пересекает $\widetilde{U}$ по слою $U_0 \times \{0\}$, который не может порождать полугруппу $\widetilde{U}$). Поэтому $e \in \operatorname{clos} U^0$ и $g \in \operatorname{clos} g(U^0)^{-1}$ для всех $g \in G$. Пусть $g \in U_t$. Так как $U_t$ — открытая окрестность любой своей точки, то $g(U^0)^{-1} \cap U_t \neq \varnothing$, откуда $g \in U_t U^0 \subseteq U^t$. Ввиду произвола в выборе $g \in U_t$, $U_t \subseteq U^t$, а так как $\{U_t\}_{t \geq 0}$ убывает, то $U_t = U^t$. •

**Следствие.** *В условиях леммы для каждого $g$ из $U_0$ множество*

$$I_g := \{t \in [0, \infty) : g \in U_t\}$$

*представляет собой интервал вида $[0, \tau)$, где $\tau \in (0, \infty]$.*

**Предложение 1.2.** *Пусть $S_1 \subseteq S_2$ — полугруппы в хаусдорфовой группе $G$ и $S_1$ всюду плотна в $S_2$. Полугруппа $S_2$ — локально порожденная (острая) тогда и только тогда, когда $S_1$ локально порожденная (соответственно острая).*

**Доказательство.** Условие локальной порожденности полугруппы $S$ эквивалентно включению (1.1), выполняющемуся для всех $V \in \mathcal{T}_e$. Это в свою очередь эквивалентно тому, что для всех $U, V \in \mathcal{T}_e$ выполняется включение

$$\operatorname{clos} S \subseteq \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} (S \cap V)^n \right) U.$$

Теперь остается заметить, что вследствие непрерывности операции умножения в рассматриваемом случае $(S_1 \cap V)^n U = (S_2 \cap V)^n U$.

Если $S_2$ — острая полугруппа, то $S_1$ острая (лемма 1.1). Пусть $S_1$ — острая полугруппа и $W \in \mathcal{T}_e$. Существует $U \in \mathcal{T}_e$ с включением $\operatorname{clos} U \subseteq W$. Выберем

$V \in \mathcal{T}_e$, удовлетворяющую условию (b) определения 1.2 для $U$ и $S_1$. Пусть $x, y \in S_2$, $xy \in V$. Так как $S_1$ плотна в $S_2$, то существуют элементы $x_1, y_1 \in S_1$, сколь угодно близкие к $x, y$ такие, что $x_1 y_1 \in V$; тогда $x_1, y_1 \in U$. Следовательно, $x, y \in \operatorname{clos} U \subseteq W$. Таким образом, $V$ удовлетворяет (b) для $S_2$ и $W$. Очевидно, $e \in \operatorname{clos} S_1 = \operatorname{clos} S_2$. •

**Следствие.** 1) *Пусть $\{S_t\}_{t \geq 0}$ — убывающая острая локально порожденная полугруппа открытых множеств. Тогда $\widetilde{S}' := \widetilde{S} \setminus (G \times \{0\})$ является открытой острой локально порожденной подполугруппой $G \times \mathbb{R}$.*

2) *При тех же условиях для любой окрестности $W$ единицы в $G \times \mathbb{R}$ и каждого $x \in \widetilde{S}'$ существует конечное разложение $x = x_1 \ldots x_n$, где $x_1, \ldots, x_n \in \widetilde{S}' \cap W$.*

**Доказательство.** Очевидно, $\widetilde{S}'$ — полугруппа. Если $t > 0$ и $(g, t) \in \widetilde{S}'$, то ввиду следствия леммы 1.8 существует $\tau > t$ такое, что $(g, \tau) \in \widetilde{S}'$. Так как $\{S_t\}_{t \geq 0}$ убывает, то $\widetilde{S}' \supset S_\tau \times (0, \tau)$. Последнее множество является окрестностью $(g, t)$ в $G \times \mathbb{R}$. Таким образом, полугруппа $\widetilde{S}'$ открыта. Благодаря следствию леммы 1.8 $\widetilde{S}'$ плотна в $\widetilde{S}$. Это позволяет применить предложение 1.2 при $S_1 = \widetilde{S}'$ и $S_2 = \widetilde{S}$, что доказывает 1). Утверждение 2) следует из леммы 1.5. •

**Предложение 1.3.** *Пусть $\mathfrak{t}$ — непрерывная неотрицательная и не равная тождественно нулю функция на $G$, $\mathfrak{t}(e) = 0$. Для $t \geq 0$ положим*

$$U_t := \{g \in G : \ t < \mathfrak{t}(g)\}; \quad \Pi_t := \{(g, s) \in G \times \mathbb{R} : \ t < s < \mathfrak{t}(g)\}.$$

*Условие, что подграфик $\Pi := \Pi_0$ функции $\mathfrak{t}$ — полугруппа, эквивалентно выполнению неравенства $\mathfrak{t}(gh) \geq \mathfrak{t}(g) + \mathfrak{t}(h)$ для всех $g, h \in U_0$. Кроме того, равносильны следующие утверждения:*

а) $\Pi$ — *локально порожденная полугруппа;*

б) *семейство $\{\Pi_t\}_{t \geq 0}$ образует убывающую локально порожденную полугруппу множеств;*

в) *семейство $\{U_t\}_{t \geq 0}$, образует убывающую локально порожденную полугруппу множеств;*

г) *множество $\widetilde{U} \subset G \times \mathbb{R}$, построенное по формуле* (1.8), *является локально порожденной полугруппой.*

**Доказательство.** Утверждение об эквивалентности неравенства и свойства подграфика быть полугруппой очевидно. Отметим также, что убывание семейств $\{\Pi_t\}_{t \geq 0}$ и $\{U_t\}_{t \geq 0}$ следует непосредственно из определений. Обозначим через $p_1, p_2$ канонические проекции из $G \times \mathbb{R}$ на $G$ и $\mathbb{R}$ соответственно; обе проекции — гомоморфизмы и $p_1(\Pi_t) = U_t$. Благодаря этому и лемме 1.7 из б) следует в).

Импликация в) $\Longrightarrow$ г) очевидна. Включение $(g,t) \in \Pi$ равносильно тому, что $0 < t < \mathfrak{t}(g)$, поэтому $U_t = \{g \in G : (g,t) \in \Pi\}$ при $t > 0$. Согласно этому равенству, построенная по формуле (1.8) полугруппа $\widetilde{U}$ совпадает с $\Pi \cup (U_0 \times \{0\})$. Поэтому локальная порожденность $\widetilde{U}$ влечет локальную порожденность $\Pi$ на основании следствия предложения 1.2. Таким образом, из г) следует а), и осталось вывести б) из а).

Предположим, что $\Pi$ — локально порожденная полугруппа. Семейство интервалов вида $(r,\infty)$, $r \geq 0$, образует полугруппу множеств в $\mathbb{R}$, поэтому включение $\Pi_t\Pi_s \subseteq \Pi_{t+s}$ следует из равенства $\Pi_r = p_2^{-1}((r,\infty)) \cap \Pi$. Пусть $V$ — окрестность единицы в $G$. Так как $\Pi$ открыта, то из ее локальной порожденности и леммы 1.5 следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ любой элемент из $\Pi$ представим в виде конечного произведения элементов из $(V \times (0,\varepsilon)) \cap \Pi$. Пусть $(g,r) \in \Pi_{t+s}$; положим $\varepsilon = \frac{1}{2}(r-t-s)$. Тогда $(g,r) = (g_1 \dots g_n, r_1 + \dots + r_n)$ для некоторых $g_1, \dots, g_n \in V \cap p_1(\Pi)$ и $r_1, \dots, r_n \in (0,\varepsilon)$. Из определения $\varepsilon$ следует, что найдется натуральное $m < n$ такое, что $r_1 + \dots + r_m > t$ и $r_{m+1} + \dots + r_n > s$ (достаточно взять наименьшее $m$, для которого выполняется первое из этих неравенств). Полагая

$$x = (g_1 \dots g_m, r_1 + \dots + r_m), \quad y = (g_{m+1} \dots g_n, r_{m+1} + \dots + r_n),$$

получаем $x \in \Pi_t$, $y \in \Pi_s$ и $g = xy$. Это доказывает обратное включение. Таким образом, $\Pi_t$, $t \geq 0$, — полугруппа множеств. Докажем ее локальную порожденность. По определению это равносильно тому, что полугруппа

$$\widetilde{\Pi} := \{(g,s,t) \in G \times \mathbb{R}^2 : (g,s) \in \Pi_t\} = \{(g,s,t) \in G \times \mathbb{R}^2 : 0 < t < s < \mathfrak{t}(g)\}$$

локально порождена. Поскольку $\Pi$ локально порождена и открыта, согласно следствию предложения 1.2, для каждых $(g,s) \in \Pi$, $V \in \mathcal{T}_e$ и $\varepsilon > 0$ найдутся $g_1, \dots, g_n$ и $s_1, \dots, s_n$ такие, что $g = g_1 \dots g_n$, $s = s_1 + \dots + s_n$ и $(g_k, s_k) \in \Pi \cap (V \times (0,\varepsilon))$, $k = 1, \dots, n$. Подобрав числа $t_1, \dots, t_n$ так, чтобы $t_k \in (0, s_k)$ для всех $k = 1, \dots, n$ и $t_1 + \dots + t_n = t$, получим искомое разложение элемента $(g,s,t)$ в произведение элементов из пересечения $\widetilde{\Pi}$ со сколь угодно малой окрестностью единицы вида $V \times (-\varepsilon,\varepsilon) \times (-\varepsilon,\varepsilon)$. •

Во многих случаях можно характеризовать острые локально порожденные полугруппы множеств в терминах, относящихся к группе $G$.

**Лемма 1.9.** *Предположим, что $\{U_t\}_{t \geq 0}$ — убывающее семейство открытых множеств. При этих условиях $\{U_t\}_{t \geq 0}$ является острой локально порожденной полугруппой множеств тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

(а) $U_tU_s \subseteq U_{t+s}$ *для всех* $t, s \geq 0$;
(б) $U_0$ — *острая полугруппа;*
(в) *для всех* $t \geq 0$ *и* $V \in \mathcal{T}_e$

$$U_t = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_{t/n} \cap V)^n. \tag{1.10}$$

**Доказательство.** Пусть $\widetilde{U}$ построена по $\{U_t\}_{t\geq 0}$ по формуле (1.8). Выполнение (а) означает, что $\widetilde{U}$ — полугруппа. Ввиду включений $e \in \operatorname{clos} U_0$, $\widetilde{U} \subseteq U_0 \times [0, \infty)$ и благодаря лемме 1.1 при выполнении (б) полугруппа $\widetilde{U}$ острая. Докажем, что каждый элемент $(g, t)$ полугруппы $\widetilde{U}$ допускает представление в виде произведения конечного числа сколь угодно малых сомножителей из $\widetilde{U}$. Если $(g, t) \in \widetilde{U}$, то $g \neq e$. Действительно, $e \notin U_0$ вследствие остроты и открытости $U_0$. Так, если $U_t \subseteq U_0$, то $(e, t) \notin \widetilde{U}$ для всех $t \geq 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем $V \in \mathcal{T}_e$ так, чтобы $g \notin V$. Тогда при выполнении (в) $g = g_1 \dots g_k$ для некоторого $k$ и $g_1, \dots, g_k \in V \cap U_{t/k}$, причем $k \geq 2$, так как $g \notin V$. Эту процедуру с уменьшением $V$ можно применить к каждому сомножителю. Продолжая ее, за конечное число шагов получим разложение $(g, t)$ в конечное произведение

$$(g, t) = (g_1, t_1) \dots (g_n, t_n) \tag{1.11}$$

элементов из $(V \times (-\varepsilon, \varepsilon)) \cap \widetilde{U}$ (в случае $t = 0$ — из $(V \times \{0\}) \cap \widetilde{U}$). Из доказанного, в частности, следует, что $\widetilde{U}$ локально порождена. То, что $\{U_t\}_{t\geq 0}$ — полугруппа множеств, доказывается, как в предложении 1.3. Точнее, пусть $t, s \geq 0$ и $g \in U_{t+s}$. Благодаря (а) и локальной порожденности $\widetilde{U}$ для $\{U_t\}_{t\geq 0}$ выполнены условия леммы 1.8. Согласно следствию этой леммы, $g \in U_{t+s+2\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Построим разложение (1.11) для $(g, t+s+2\varepsilon)$ с сомножителями из $(V \times (0, \varepsilon)) \cap \widetilde{U}$, выберем наименьшее $m$, для которого $t_1 + \dots + t_m > t$, и положим $x = g_1 \dots g_m$, $y = g_{m+1} \dots g_n$. Тогда $g = xy$. Так как $t_1 + \dots + t_n = t + s + 2\varepsilon$, то $t_{m+1} + \dots + t_n > s$ и $x \in U_t$, $y \in U_s$, согласно (а). Ввиду того что $g \in U_{t+s}$, было выбрано произвольно, $U_{t+s} = U_tU_s$.

Пусть $\{U_t\}_{t\geq 0}$ — острая локально порожденная полугруппа множеств. Выполнение (а) следует непосредственно из определения. Так как $U_0 \times \{0\} \subset \widetilde{U}$, $\widetilde{U}$ острая и $\{U_t\}_{t\geq 0}$ убывает, то $e \in \operatorname{clos} U_0$ и (б) верно благодаря лемме 1.1. Осталось доказать (в).

При $t = 0$ равенство (1.10) равносильно тому, что $U_0$ локально порождена; но локальная порожденность $U_0$ следует из локальной порожденности $\widetilde{U}$ и леммы 1.1, так как проекция $\widetilde{U}$ на $G$ совпадает с $U_0$ ввиду убывания $\{U_t\}_{t\geq 0}$ .

Пусть $t > 0$ и $g \in U_t$. Ввиду следствия предложения 1.2 и леммы 1.5 существуют $g_1 \dots g_n \in V$ и $t_1, \dots, t_n > 0$ такие, что $(g,t) = (g_1,t_1)\dots(g_n,t_n)$ и $(g_k,t_k) \in \widetilde{U}$ для всех $k = 1,\dots,n$. При этом можно предполагать, что окрестность $V$ удовлетворяет условию (b′) относительно $U_0$.

Поскольку множества $I_g, I_{g_1}, \dots, I_{g_n}$ ввиду следствия леммы 1.8 являются полуоткрытыми интервалами, можно подобрать рациональные числа $r, r_1, \dots, r_n$ так, чтобы выполнялись условия

$$r_k \geq t_k,\ \ g_k \in U_{r_k} \cap V, \quad k = 1,\dots,n \ \ (\text{и } r_1 + \dots + r_n = r \geq t).$$

Запишем $r_k$ и $r$ в виде отношения натуральных чисел с общим знаменателем:

$$r_k = \frac{p_k}{q}, \quad k = 1,\dots,n, \quad r = \frac{p}{q}, \quad p_1 + \dots + p_n = p.$$

Благодаря последнему равенству и лемме 1.6

$$\begin{aligned} g = g_1 \dots g_n &\in (U_{r_1} \cap V)\dots(U_{r_n} \cap V) = (U_{p_1/q} \cap V)\dots(U_{p_n/q} \cap V) \\ &\subseteq (U_{1/q} \cap V)^{p_1}\dots(U_{1/q} \cap V)^{p_n} = (U_{1/q} \cap V)^p = (U_{r/p} \cap V)^p. \end{aligned}$$

Ввиду убывания полугруппы

$$g \in (U_{r/p} \cap V)^p \subseteq (U_{t/p} \cap V)^p.$$

Это доказывает нетривиальное включение в (1.10) в случае $t > 0$ и тем самым (в). •

## §2. Аксиоматика

В работе [BPS] была определена *геометрия* на полной топологической группе $G$ над частично упорядоченной абелевой полугруппой $\langle S, \leq, + \rangle$ как база $\{U_s : s \in S\}$ топологии $G$ в единице $e$ с аксиомами

(G1) $U_s \subseteq U_t$ тогда и только тогда, когда $s \leq t$;

(G2) $U_s U_t = U_{s+t}$;

(G3) $\bigcap\limits_{s \in S} U_s = \{e\}$;

(G4) $\bigcup\limits_{s \in S} U_s = G$;

(G5) $U_s^{-1} = U_s$.

Если $S = \mathbb{R}^+ := (0, \infty)$ с обычными порядком и операцией сложения, то формула

$$\rho(g, h) = \inf\{s \in R^+ : g^{-1}h \in U_s\} \tag{2.1}$$

задает левоинвариантную внутреннюю метрику на $G$. Метрика $\rho$ в метрическом пространстве $M$ называется *внутренней*, если

$$\rho(x, y) = \inf \Lambda(\gamma),$$

где $\inf$ берется по семейству путей $\gamma : [a, b] \to M$, соединяющих $x$ и $y$, а длина пути $\Lambda(\gamma)$ определяется формулой

$$\Lambda(L) = \sup \sum_{k=0}^{n} \rho(\gamma(t_k), \gamma(t_{k+1})),$$

где $\sup$ берется по всем конечным разбиениям $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$. Обратно, любая левоинвариантная внутренняя метрика $\rho$ посредством формулы

$$U_s = \{g \in G : \rho(e, g) < s\} \tag{2.2}$$

определяет геометрию над $\langle \mathbb{R}^+, \leq, + \rangle$, если потребовать (G1) только для $0 < s, t < \operatorname{diam}(G, \rho)$. Позднее выяснилось, что аналогичная аксиоматика была введена ранее в работе Радстрёма [Ra1], где рассматривалось семейство $S_\delta$ замкнутых подмножеств топологической хаусдорфовой группы $G$, удовлетворяющее аксиомам

(S1) $\bigcup\limits_{\delta \geq 0} S_\delta = G$;
(S2) $S_0 = \{e\}$;
(S3) $S_\delta = S_\delta^{-1}$;
(S4) $S_{\delta_1} S_{\delta_2} = S_{\delta_1 + \delta_2}$;
(S5) для любых $x \in G$ и $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $x^{-1} S_\varepsilon x \subseteq S_\delta$;
(S6) $\bigcap\limits_{\delta > \delta_0} S_\delta = S_{\delta_0}$.

Множества $S_\delta$ играют роль замкнутых шаров радиуса $\delta$ с центром в $e$. Функция $\rho$, определенная, как в (2.1), задает левоинвариантную внутреннюю метрику на $G$ с дополнительным условием существования кратчайшей, соединяющей любые две наперед заданные точки. Для локально компактных групп эти аксиоматики эквивалентны. В общем случае система аксиом (S1)–(S6) определяет более узкий класс так называемых строгих геометрий (в смысле [BPS]) над $\langle \mathbb{R}^+, \leq, + \rangle$.

В настоящей работе по аналогии с понятием геометрии на группе вводится понятие метризованного порядка (над $\langle \mathbb{R}^+, \leq, + \rangle$). При этом внутренняя метрика заменяется *внутренней антиметрикой*.

**Определение 2.1.** Пусть $G$ — хаусдорфова топологическая группа с первой аксиомой счетности. *Метризованный порядок* $\mathfrak{U}$ на $G$ определяется как семейство $\{U_t\}_{t\geq 0}$ непустых подмножеств $G$, удовлетворяющих следующим аксиомам:

МП$_1$. Если $t \leq s$, то $U_s \subseteq U_t$, причем при $t < s$ включение строгое.

МП$_2$. $U_s U_t \subseteq U_{s+t}$ для всех $t, s \geq 0$.

МП$_3$. $\bigcap\limits_{t>0} U_t = \varnothing$.

МП$_4$. Множества $U_s$, $s \geq 0$, открыты; множества $\bigcap\limits_{0\leq s<t} U_s$ замкнуты в $G$ для всех $t > 0$.

МП$_5$. $U_0$ — острая полугруппа.

МП$_6$. Для всех $t \geq 0$ и любой окрестности $V \in \mathcal{T}_e$ единицы в $G$

$$U_t = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_{t/n} \cap V)^n. \tag{2.3}$$

Эта система аксиом будет в дальнейшем обозначаться через МП.

**Замечание.** Авторы не знают, можно ли заменить громоздкую аксиому МП$_6$ более слабым условием локальной порожденности полугруппы $U_0$ (и включение в МП$_2$ равенством) с тем, чтобы полученная система аксиом была эквивалентна МП. Положим

$$\tau(g,h) = \sup\{s \in \mathbb{R} : g^{-1}h \in U_s\} \tag{2.4}$$

(если $g^{-1}h$ не принадлежит $U_s$ ни при каком $s \geq 0$, то $\tau(g,h) = -\infty$).

**Определение 2.2.** Функцию $\tau$ на $G \times G$ будем называть *антиметрикой*, если

$$\tau(g,h) + \tau(h,f) \leq \tau(g,f)$$

для всех $g, h, f \in G$.

Мы вскоре увидим, что формула (2.4) при выполнении аксиом МП определяет антиметрику; более того, антиметрика $\tau$ удовлетворяет более сильному условию — она почти внутренняя.

**Определение 2.3.** Антиметрику $\tau$ будем называть *почти внутренней*, если для всех $g, h \in G$ таких, что $\tau(g,h) > 0$, и для любой окрестности $V$ единицы $G$

$$\tau(g,h) = \sup \sum_{k=0}^{n} \tau(x_k, x_{k+1}),$$

где sup берется по всем конечным наборам $x_0 = g, x_1, \ldots, x_n = h$ таким, что $\tau(x_k, x_{k+1}) > 0$ и $x_k^{-1}x_{k+1} \in V$.

**Определение 2.4.** Метрику $\rho$ будем называть *почти внутренней*, если для всех $g, h \in G$ и для каждого $\varepsilon > 0$

$$\rho(g,h) = \inf \sum_{k=0}^{n} \rho(x_k, x_{k+1}),$$

где inf берется по всем конечным наборам $x_0 = g, x_1, \dots, x_n = h$ таким, что $\rho(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$.

**Определение 2.5.** Пусть $L : [a,b] \to G$ — временноподобный путь (т.е. $\tau(L(t), L(s)) > 0$ при $t < s$). Определим его *длину* равенством

$$\lambda(L) = \inf \sum_{k=0}^{n} \tau(L(t_k), L(t_{k+1})),$$

где inf берется по всем конечным разбиениям $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$.

Ясно, что длина пути не зависит от выбора параметризации и поэтому определена для кривой.

**Определение 2.6.** Антиметрику $\tau$ будем называть *внутренней*, если для произвольных $g, h \in G$ таких, что $\tau(g,h) > 0$,

$$\tau(g,h) = \sup \lambda(L),$$

где sup берется по множеству всех непрерывных временноподобных путей $L$ с началом $g$ и концом $h$.

Нам удобно будет наряду с $\tau$ рассматривать функцию

$$\tau^{+}(g,h) = \max\{0, \tau(g,h)\}.$$

Для заданной функции $\tau$ на $G \times G$ и $s \geq 0$ положим

$$U_{s,\tau} = \{g \in G : \tau(e,g) > s\}. \tag{2.5}$$

В дальнейшем индекс $\tau$ в обозначениях будем опускать. Рассмотрим набор аксиом АМ, касающихся $\tau$.

$\mathrm{AM}_1$. Множество значений $\tau$ на $G \times G$ содержится в $\{-\infty\} \cup (0, \infty)$ и плотно в этом множестве.

$\mathrm{AM}_2$. Для всех $f, g, h \in G$

$$\tau(g,h) \geq \tau(g,f) + \tau(f,h)$$

(*неравенство антитреугольника*).

$\mathrm{AM}_3$. Антиметрика $\tau$ левоинвариантна.

$\mathrm{AM}_4$. Функция $\tau^+$ непрерывна на $G \times G$.

$\mathrm{AM}_5$. Для каждой окрестности $V$ элемента $x \in G$ существуют $g, h \in G$ такие, что $x \in \{f : \tau(g,f) > 0,\ \tau(f,h) > 0\} \subseteq V$.

$\mathrm{AM}_6$. Антиметрика $\tau$ — почти внутренняя.

**Замечание.** Если в $\mathrm{AM}_6$ потребовать, чтобы $\tau$ была внутренней антиметрикой, то предполагаемая выше первая аксиома счетности для хаусдорфовой группы $G$ будет вытекать из AM.

Наконец, рассмотрим еще одну систему аксиом, относящуюся к функции $\mathfrak{t}$ на $G$.

$\Pi\Gamma_1$. Функция $\mathfrak{t}$ принимает значения в $[0, \infty)$ и непрерывна на $G$.

$\Pi\Gamma_2$. Ее подграфик П, определенный формулой

$$\Pi = \{(g,t) \in G \times \mathbb{R} : 0 < t < \mathfrak{t}(g)\},$$

является острой полугруппой.

$\Pi\Gamma_3$. Полугруппа П локально порождена.

**Замечание.** Из определения острой полугруппы и $\Pi\Gamma_2$ следует, что П непуста и, следовательно, $\mathfrak{t}$ нетривиальна.

Каждому из трех объектов, для которых формулируются аксиомы МП, AM, ПГ, естественным образом сопоставляются два других. Системы МП и AM связаны формулами (2.5) и (2.4). Функция $\mathfrak{t}$, к которой применима система аксиом ПГ, определяется по метризованному порядку $\{U_t\}_{t \geq 0}$ формулой

$$\mathfrak{t}(g) = \inf\{t \geq 0 : g \notin U_t\} \tag{2.6}$$

(при этом $\mathfrak{t}(g) = \infty$, если $g$ содержится во всех множествах $U_t$, $t > 0$), а $\{U_t\}_{t \geq 0}$ восстанавливается по $\mathfrak{t}$ с помощью равенства

$$U_t = \{g \in G : \mathfrak{t}(g) > t\}. \tag{2.7}$$

Связь между $\mathfrak{t}$ и $\tau$ задается так:

$$\mathfrak{t}(g) = \tau^+(e, g), \tag{2.8}$$

$$\tau(g,h) = \sigma(\mathfrak{t}(g^{-1}h)), \tag{2.9}$$

где $\sigma(t) = t$ при $t > 0$ и $\sigma(t) = -\infty$ при $t \leq 0$.

**Теорема 2.1.** *Системы аксиом* МП, АМ *и* ПГ *равносильны, если объекты, к которым они относятся, связаны формулами* (2.4)–(2.9).

**Доказательство.** Пусть для семейства множеств $\{U_t\}_{t\geq 0}$ выполнены аксиомы МП. Определим $\mathfrak{t}$ формулой (2.6) и докажем выполнение ПГ.

Неотрицательность функции $\mathfrak{t}$ следует непосредственно из (2.6); докажем ее непрерывность. Согласно $МП_1$ и (2.6), при $a > 0$ неравенство $\mathfrak{t}(g) \geq a$ равносильно тому, что $g \in U_s$ для всех $s \in (0, a)$, откуда

$$\mathfrak{t}^{-1}([a, \infty)) = \bigcap_{0<s<a} U_s,$$

и ввиду $МП_1$ для всех $a \geq 0$

$$\mathfrak{t}^{-1}((a, \infty)) = \bigcup_{b>a} \mathfrak{t}^{-1}([b, \infty)) = \bigcup_{t>a} U_t. \tag{2.10}$$

Учитывая, что $\mathfrak{t}^{-1}([0, \infty)) = G$ ввиду $МП_3$, и используя $МП_4$, получаем, что прообраз любого открытого интервала в $\mathbb{R}$ открыт. Таким образом, доказана аксиома $ПГ_1$.

Аксиомы $МП_1$ и $МП_4$ позволяют использовать лемму 1.9. Благодаря $МП_2$, $МП_5$ и $МП_6$, выполнены условия (а), (б), (в) этой леммы. Следовательно, семейство $\{U_t\}_{t\geq 0}$ образует острую локально порожденную убывающую полугруппу открытых непустых множеств. Согласно (2.6), (2.10), определению подграфика П и лемме 1.8, $П \cup (U_0 \times \{0\}) = \widetilde{U}$, где $\widetilde{U}$ определено формулой (1.8) для $\{U_t\}_{t\geq 0}$. Применяя следствие предложения 1.2, получаем $ПГ_2$ и $ПГ_3$.

Докажем выполнение МП для семейства множеств$\{U_t\}_{t\geq 0}$, определенного формулой (2.7), в предположении ПГ. Из (2.7) и непрерывности $\mathfrak{t}$ (аксиома $ПГ_1$) следует $МП_4$, а благодаря конечности $\mathfrak{t}(g)$ для всех $g \in G$ верна $МП_3$. Аксиомы $ПГ_1$ и $ПГ_2$ дают возможность применить предложение 1.3 (из $ПГ_2$ следует, что $\mathfrak{t}(e) = 0$ и $\mathfrak{t} \neq 0$), а $ПГ_3$ означает выполнение его п. а). Согласно п. в), г) этого предложения и $ПГ_2$, можно применить лемму 1.9, условия (а), (б), (в) которой означают выполнение МП$_2$, МП$_5$, МП$_6$. Осталось доказать, что включение $U_t \subseteq U_s$ в МП$_1$ при $t > s$ строгое — нестрогое верно ввиду п. в) предложения 1.3, из которого также вытекает равенство $U_t U_s = U_{t+s}$ для всех $t, s \geq 0$. Непустота $U_t$ при всех $t \geq 0$ следует из этого равенства, нетривиальности $\mathfrak{t}$ и невозрастания$\{U_t\}_{t\geq 0}$ . Предположим, что $U_t = U_s$ и $t > s$. Тогда $U_a = U_b$ для всех $a, b$ из отрезка $I := [s, t]$. Следовательно, $U_a = U_b$ для произвольных $a, b$ из отрезка $nI = [ns, nt]$ и всех натуральных $n$. Если $nt > (n+1)s$, то $nI \cap (n+1)I \neq \varnothing$. Это означает, что $U_a = U_b$ для всех $a, b > s^2/(t-s) + 1$. Вследствие непустоты $U_a$ это противоречит МП$_3$.

Докажем выполнение АМ, предполагая выполненной систему аксиом ПГ; при этом ввиду уже доказанного можно использовать МП. Непосредственно из (2.9) следует АМ$_3$, а вместе с ПГ$_1$ (2.9) дает АМ$_4$. Кроме того, из (2.9) следует, что множества положительных значений $\tau$ и $\mathfrak{t}$ совпадают. Так как, согласно (2.7), для $g \in U_s \setminus U_t$, $t > s$, значение $\mathfrak{t}(g)$ расположено в интервале $(s, t]$, то благодаря МП$_1$ верна АМ$_1$ (как было отмечено выше, $\mathfrak{t}(e) = 0$, поэтому $\tau$ принимает значение $-\infty$). Неравенство антитреугольника (т.е. АМ$_2$) есть просто аналитическая запись того факта, что П — полугруппа, выражаемого неравенством

$$\mathfrak{t}(gh) \geq \mathfrak{t}(g) + \mathfrak{t}(h), \quad g, h \in U_0, \tag{2.11}$$

где $U_0$ — проекция П на $G$. Так как $U_0$ — открытая полугруппа, то, согласно предложению 1.1, МП$_5$ влечет АМ$_5$. Если подставить (2.9) в определение почти внутренней метрики, то для $g \in U_0$ получится следующее:

$$\mathfrak{t}(g) = \sup \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{t}(g_k), \tag{2.12}$$

где sup берется по всем наборам $g_1, \ldots, g_n \in U_0 \cap V$, $V \in \mathcal{T}_e$, таким, что $g = g_1 \ldots g_n$. Это верно благодаря локальной порожденности П (и в действительности является аналитической формой записи этого свойства): при любом $t \in (0, \mathfrak{t}(g))$ элемент $(g, t)$ допускает сколь угодно точное приближение произведениями вида $(g_1, t_1) \ldots (g_n, t_n)$, где $(g_k, t_k) \in \Pi \cap ((U_0 \cap V) \times (0, \varepsilon))$, откуда $t_k < \mathfrak{t}(g_k)$ для всех $k = 1, \ldots, n$ (можно было бы также применить МП$_6$). Из этого с учетом непрерывности $\mathfrak{t}$ следует, что правая часть (2.12) не меньше левой; обратное неравенство верно ввиду (2.11), что доказывает АМ$_6$.

Обратно, докажем, что для функции $\mathfrak{t}$, определенной формулой (2.8), выполняются аксиомы ПГ, если предположить справедливость АМ. Аксиома ПГ$_1$ следует из АМ$_4$ и АМ$_1$. Благодаря АМ$_3$ и АМ$_1$ антиметрика $\tau$ восстанавливается по $\mathfrak{t}$ формулой (2.9). Из АМ$_2$ следует (2.11), вследствие чего подграфик П, определенный в ПГ$_2$, является полугруппой, причем $\Pi \neq \varnothing$ благодаря АМ$_1$.

Поэтому его проекция $U_0$ на $G$ вдоль сомножителя $\mathbb{R}$ тоже является полугруппой, причем $U_0$ открыта, так как открыта полугруппа $\Pi$ (ввиду непрерывности $\mathfrak{t}$). Из $\mathrm{AM}_5$ и предложения 1.1 следует, что $U_0$ — острая полугруппа. Следовательно, острой полугруппой является произведение $U_0 \times [0, \infty)$. Включение $(e, 0) \in \operatorname{clos} \Pi$ следует из определения $\Pi$ и включения $e \in \operatorname{clos} U_0$, поэтому, согласно лемме 1.1, $\Pi$ — острая полугруппа. Таким образом, доказана аксиома $\Pi\Gamma_2$. Ввиду $\Pi\Gamma_1$ для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $V \in \mathcal{T}_e$ такая, что $\mathfrak{t}(h) < \varepsilon$ для всех $h \in V \cap U_0$. Пусть $g \in U_0$; согласно равенству (2.12), представляющему собой переформулировку $\mathrm{AM}_6$ в обозначениях (2.8), для произвольного $\delta > 0$ найдется набор $g_1, \dots, g_n \in V \cap U_0$ такой, что $g = g_1 \dots g_n$ и $\mathfrak{t}(g) - \delta < \mathfrak{t}(g_1) + \dots + \mathfrak{t}(g_n)$. Следовательно, для всех $t \in (0, \mathfrak{t}(g))$ существуют $t_1, \dots, t_n$ такие, что $t_k \in (0, \mathfrak{t}(g_k))$ и $(g, t) = (g_1, t_1) \dots (g_n, t_n)$. Это доказывает $\Pi\Gamma_3$.

Для проверки эквивалентности АМ и МП теперь достаточно установить совпадение объектов, определяемых формулами (2.4), (2.5) и опосредованно через пары формул (2.6), (2.9) и (2.7), (2.8). Пусть выполняется система МП, $\tau$ определена (2.4), а $\mathfrak{t}$ — (2.6). По доказанному функция $\mathfrak{t}$ непрерывна. Полугруппа $\{U_t\}_{t \geq 0}$ строго убывает, согласно $\mathrm{M}\Pi_1$. Множество значений $\mathfrak{t}$ на $U_0$ плотно в $[0, \infty)$. Учитывая все это, при $g \in U_0$ получаем

$$\tau(e, g) = \sup\{t \geq 0 : g \in U_t\} = \inf\{s \geq 0 : g \notin U_s\} = \mathfrak{t}(g).$$

Если $g \notin U_0$, то $\tau(e, g) = -\infty$ по (2.4), $\mathfrak{t}(g) = 0$, согласно (2.6), и требуемое совпадение обеспечивается формулой (2.9).

Пусть выполнены аксиомы АМ, семейство $\{U_t\}_{t \geq 0}$ определено (2.5); для проверки его совпадения с семейством, определенным формулой (2.7) по функции $\mathfrak{t}$, заданной (2.8), достаточно подставить (2.8) в (2.7) и учесть, что в определениях неравенства строгие. •

**Лемма 2.1.** *Пусть $\{U_t\}_{t \geq 0}$ — метризованный порядок на группе $G$, $\tau$ — соответствующая почти внутренняя антиметрика, $h \in U_0$, $\tau(e, h) = 1$. Тогда для произвольного счетного убывающего семейства $\{V_n\}$ окрестностей $e$ в $G$ и каждого $\sigma \in (0, 1)$ существуют плотное счетное подмножество $D$ отрезка $[0, 1]$ и отображение $\gamma : D \to U_0$ такие, что*

а) *$0, 1 \in D$, $\gamma(0) = e$, $\gamma(1) = h$;*

б) *для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется $\delta_n > 0$ такое, что $\gamma(s)^{-1}\gamma(t) \in V_n \cap U_0$, если $s, t \in D$ и $0 < t - s < \delta_n$;*

в) *$\tau(\gamma(s), \gamma(t)) > \sigma(t - s)$, если $s, t \in D$ и $t > s$.*

**Доказательство.** Положим $D_0 = \{0, 1\}$, $V_0 = G$, $\gamma(0) = e$, $\gamma(1) = h$ и будем строить последовательно множества $D_n$ так, чтобы точки из $D_{n+1} \supset D_n$ разбивали каждый из интервалов, концами которых являются соседние точки множества $D_n$, на некоторое количество меньших одинаковых интервалов, а затем определим $D$ как объединение всех $D_n$. Такое построение гарантирует счетность $D$ и плотность $D$ в $[0,1]$. Кроме этого, на $n$-м шаге (начиная с $n=0$) будем заменять окрестность $V_{n+1}$ окрестностью $W_{n+1}$ (положив $W_0 = G$), удовлетворяющей (b′) по отношению к $S = U_0$ и условиям

$$W_{n+1}^2 \subseteq W_n, \quad W_{n+1} \subseteq V_{n+1}. \tag{2.13}$$

Подберем числа $\sigma_n \in (0,1)$ так, чтобы

$$\sigma = \prod_{n=1}^{\infty} \sigma_n. \tag{2.14}$$

Предположим, что $D_n$ построено и на нем определено $\gamma$. Пронумеруем элементы $D_n$ в порядке возрастания: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = 1$. Обозначим $u_k := \gamma(t_k)^{-1}\gamma(t_{k+1})$, $s_k = \tau(e, u_k) > 0$, $k = 0, \ldots, m$. Согласно МП$_6$, можно найти $p_k$ и

$$v_{1,k}, \ldots, v_{p_k,k} \in U_{\sigma_n s_k/p_k} \cap W_{n+1}, \quad k = 0, \ldots, m \tag{2.15}$$

такие, что $u_k = v_{1,k} \ldots v_{p_k,k}$. Если $u_k \notin W_{n+1}$, то $p_k \geq 2$; выполнения этого условия для всех $k = 0, \ldots, m$ можно добиться уменьшением $W_{n+1}$ (с сохранением сформулированных выше требований). Дополним $D_n$ точками $t_{k,j} := t_k + j(t_{k+1} - t_k)/p_k$ и положим

$$\gamma(t_{k,j}) := \gamma(t_k)v_{1,k} \ldots v_{1,j}, \quad j = 1, \ldots, p_k - 1, \ k = 0, \ldots, m. \tag{2.16}$$

Докажем, что проведенное построение обеспечивает выполнение условий а), б), в).

Выполнение а) гарантирует первый шаг построения. Положим $\delta_n$ равным наименьшей из длин интервалов, на которые $D_{n+1}$ разбивает $[0,1]$; тогда из условий $s,t \in D$, $0 < t - s < \delta_n$ следует, что отрезок $[s,t]$ содержится в объединении не более чем двух последовательных отрезков разбиения $D_{n+1}$. Согласно (2.15) и (2.16), это означает, что для некоторых $x, y \in U_0$, а также для соседних или расположенных через одну точек $r_1, r_2$ разбиения $D_{n+1}$ выполняются равенства $\gamma(s) = \gamma(r_1)x$, $\gamma(r_2) = \gamma(t)y$, откуда с учетом (2.13)

$$x\gamma(s)^{-1}\gamma(t)y = \gamma(r_1)^{-1}\gamma(r_2) \in W_{n+1}^2 \cap U_0 \subseteq W_n \cap U_0.$$

Так как для $W_n$ выполняется (b′), то $\gamma(s)^{-1}\gamma(t) \in W_n \subseteq V_n$. Таким образом, доказано б).

Любая пара $s, t$ точек из $D$ содержится в некотором $D_{n+1}$. Согласно (2.15) и (2.16), если $s, t$ — соседние точки $D_{n+1}$, расположенные в $k$-м отрезке разбиения $D_n$, то

$$\tau(\gamma(s), \gamma(t)) > \frac{\sigma_n s_k}{p_k} = \sigma_n \frac{\tau(\gamma(t_k), \gamma(t_{k+1}))}{p_k} = \sigma_n \frac{\tau(\gamma(t_k), \gamma(t_{k+1}))}{t_{k+1} - t_k}(t - s).$$

Применяя такие же выкладки к $t_k$ и $t_{k+1}$, повторяя эту процедуру, а также учитывая, что $\tau(e, h) = 1$, приходим к неравенству

$$\tau(\gamma(s), \gamma(t)) > \left(\prod_{k=1}^{n} \sigma_k\right)(t - s), \tag{2.17}$$

которое распространяется на произвольные $s, t \in D_{n+1}$, $s < t$, благодаря неравенству антитреугольника. Осталось лишь отметить, что (2.17) и (2.14) влекут в). •

**Теорема 2.2.** *Почти внутренняя левоинвариантная антиметрика на полной хаусдорфовой топологической группе со счетной базой семейства окрестностей единицы является внутренней.*

**Доказательство.** Обозначим через $G$, $\tau$ рассматриваемые группу и антиметрику. Требуется доказать, что точки $g, h \in G$ такие, что $\tau(g, h) > 0$, могут быть соединены временноподобной кривой с началом в $g$ и концом в $h$. Ввиду левоинвариантности $\tau$ можно считать, что $g = e$; домножая $\tau$ на подходящую константу, можно без ограничения общности предположить, что $\tau(e, h) = 1$. Благодаря существованию убывающей базы семейства окрестностей единицы применима лемма 2.1. Построенное в ней отображение $\gamma$, согласно п. б), равномерно непрерывно на плотном множестве $D \subset [0, 1]$. Так как $G$ полна, то $\gamma$ продолжается до непрерывного пути $L : [0, 1] \to G$, соединяющего $e$ и $h$. Этот путь временноподобен на основании п. в), из которого и непрерывности $\tau^+$ следует также, что

$$\sum_{k=0}^{n} \tau(L(t_k), L(t_{k+1})) \geq \sigma$$

для всех конечных разбиений $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ отрезка $[0, 1]$. Таким образом, для любого $\sigma \in (0, 1)$, $1 \geq \lambda(L) \geq \sigma$. •

**Замечание.** Из теоремы следует, что при выполнении ее условий всякий интервал линейно связен. Следовательно, в рассматриваемом случае группа $G$ локально-линейно связна. Кроме того, полугруппа $U_0$ содержится в компоненте линейной связности единицы. Поэтому изучение левоинвариантных метризованных порядков в полных, в частности локально компактных, группах сводится к случаю линейно связных групп.

Пусть $\tau$ — почти внутренняя антиметрика на топологической группе $G$ с первой аксиомой счетности и $\widetilde{G}$ — пополнение $G$. Как показывает приведенный ниже пример, функция $\tau^+$ не обязана непрерывно продолжаться до непрерывной функции на $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$. Таким образом, в отличие от метрик почти внутренние антиметрики не всегда продолжаются до внутренних антиметрик в пополнении группы.

**Пример 2.1.** Пусть $G$ — группа точек с рациональными координатами из $\mathbb{R}^2$, $\alpha > 0$ — иррациональное число, $\mathfrak{t}(x, y) = y$ при $x > \alpha y > 0$, $\mathfrak{t}(x, y) = 0$ во всех остальных случаях. Тогда замыкание подграфика $\mathfrak{t}$ в $\mathbb{R}^3$ представляет собой трехгранный конус, ограниченный плоскостями $x = \alpha y$, $y = z$, $z = 0$. Ясно, что для $\mathfrak{t}$ в $G$ выполнены аксиомы ПГ, но $\mathfrak{t}$ не допускает непрерывного продолжения на $\widetilde{G} = \mathbb{R}^2$.

Отметим одно полезное свойство длины дуги.

**Предложение 2.1.** *Длина $\lambda = \lambda(t_1, t_2)$ дуги любого временноподобного пути $L : [0, 1] \to G$ с началом $e$ и концом $h$ конечна, неотрицательна, непрерывна и аддитивна. При этом $\lim\limits_{t \to +0} \lambda(0, t) = 0$.*

**Доказательство.** Очевидно, $0 < \tau(e, h) =: s < +\infty$. На основании $\mathrm{AM}_2$ и временноподобности пути $L$, $s \geq \lambda(L) \geq 0$. Аналогично $\tau(e, L(t)) \geq \lambda(0, t) \geq 0$ для любого $t$ из $(0, 1]$ и $\tau(L(t_1), L(t_2)) \geq \lambda(t_1, t_2) \geq 0$, что доказывает конечность и неотрицательность $\lambda(0, t)$ и $\lambda(t_1, t_2)$. Поскольку добавление точки $t_1$ к конечным разбиениям отрезка $[0, t_2]$ вследствие $\mathrm{AM}_2$ не увеличивает суммы в определении $\lambda(0, t_2)$, то можно считать, что $t_1$ входит в такие разбиения. Отсюда вытекают аддитивность и монотонность (нестрогая) длины дуги. Из $\mathrm{AM}_4$ и компактности $[0, 1]$ следует, что функция $\tau^+(L(t), L(s))$ равномерно непрерывна по $t, s$, откуда с использованием уже доказанных аддитивности и неотрицательности легко выводятся непрерывность $\lambda(t_1, t_2)$ и последнее утверждение. •

**Замечание.** В [Pi2] показано, что существуют непрерывные временноподобные кривые с нулевой длиной дуги.

Подобно тому, как в теореме 2.1 охарактеризованы левоинвариантные (почти) внутренние антиметрики через подграфики, можно охарактеризовать левоинвариантные (почти) внутренние метрики в терминах надграфиков. Между ними имеется и прямая связь, как показывает следующая теорема.

**Теорема 2.3.** *Пусть $G$ — топологическая хаусдорфова группа, для которой выполнена первая аксиома счетности. Следующие утверждения, касающиеся определенной на $G$ неотрицательной непрерывной функции $\mathfrak{r}$, равносильны:*

а) *надграфик $\mathfrak{r}$*

$$\aleph = \{(g,t) \in G \times \mathbb{R} : t > \mathfrak{r}(g)\}$$

*является острой открытой локально порожденной подполугруппой $G \times \mathbb{R}$, инвариантной относительно преобразования $\iota : (g,t) \to (g^{-1}, t)$;*

б) *функция*

$$\mathfrak{t}(g,t) = \max\{0, t - \mathfrak{r}(g)\} \tag{2.18}$$

*$\iota$-инвариантна и задает левоинвариантную почти внутреннюю антиметрику $\tau$ в $G \times \mathbb{R}$ по формуле* (2.9);

в) *формула $\rho(g,h) = \mathfrak{r}(g^{-1}h)$ задает левоинвариантную почти внутреннюю метрику $\rho$ в $G$, согласованную с топологией.*

*Если группа $G$ полна, то метрика $\rho$ является внутренней.*

**Доказательство.** Так как подграфик $\Pi \subseteq G \times \mathbb{R}^2$ функции $\mathfrak{t}$ задается неравенствами $0 < s < \mathfrak{t}(g,t)$, равносильными условиям $0 < s$, $\mathfrak{r}(g) < t - s$, то автоморфизм $\varphi(g,t,s) = (g, t-s, s)$ группы $G \times \mathbb{R}^2$ переводит его на $\aleph \times \mathbb{R}^+$. Поэтому $\aleph \times \mathbb{R}^+$ и $\Pi$ являются острыми (локально порожденными) одновременно; согласно лемме 1.1, эти свойства выполняются одновременно для $\aleph$ и $\aleph \times \mathbb{R}^+$. Благодаря (2.18) и неотрицательности $\mathfrak{r}$, $\iota$-инвариантность $\mathfrak{t}$ равносильна условию

$$\mathfrak{r}(g) = \mathfrak{r}(g^{-1}). \tag{2.19}$$

Согласно проведенным рассуждениям и теореме 2.1, а) и б) эквивалентны.

Докажем, что из б) следует в). Отметим, что (2.19) эквивалентно симметричности $\rho$: $\rho(g,h) = \rho(h,g)$. Так как, согласно МП$_5$ и теореме 2.1, неравенство $\mathfrak{t}(x) > 0$ задает острую открытую полугруппу $\Pi_0 = \aleph$, то ввиду того, что при $(g,t) \in \aleph$, $\mathfrak{r}(g) = t - \mathfrak{t}(g,t)$, согласно (2.18), а также (1.3), предложения 1.1 и (2.19), из $\rho(g,h) = 0$ следует $g = h$. Обратно, $\rho(g,g) = \mathfrak{r}(e)$ по определению $\rho$, а $\mathfrak{r}(e) = 0$, так как $\aleph$ — локально порожденная полугруппа. Неравенство треугольника следует из АМ$_2$ и выполнения равенства $\mathfrak{r}(g) = t - \mathfrak{t}(g,t)$ для всех достаточно больших $t$. Таким образом, $\rho$ — метрика. Левоинвариантность $\rho$ вытекает из АМ$_3$. Согласованность $\rho$ с топологией следует из АМ$_5$: для любой окрестности $V$ единицы в $G \times \mathbb{R}$ найдутся $(g,t)$ и $(h,s)$ из $\Pi_0$ такие, что $V$ содержит множество точек $(x,u) \in G \times \mathbb{R}$, заданное неравенствами $\tau((x,u),(g,t)) > 0$ и $\tau((h,s)^{-1},(x,u)) > 0$, т.е. $t - u > \mathfrak{r}(x^{-1}g)$, $u + s > \mathfrak{r}(hx)$. Его пересечение со слоем $G \times \{0\}$ при естественном отождествлении последнего с $G$ представляет собой пересечение шаров $\rho(h^{-1}, x) < s$ и $\rho(x, g) < t$ с центрами $h^{-1}$ и $g$ соответственно, а так как это множество содержит $e$ по $\mathrm{AM}_5$, то $V \cap G$ содержит некоторый шар с центром в $e$. Таким образом, определяемая $\rho$ топология не слабее исходной, а так как $\mathfrak{r}$ непрерывна, то они совпадают. То, что $\rho$ — почти внутренняя, легко проверяется сравнением определений почти внутренних метрики и антиметрики.

Осталось проверить, что в) влечет б). Мы опустим доказательство, так как проверка аксиом AM не вызывает никаких затруднений для антиметрики, построенной по функции $\mathfrak{t}(g, t) = t - \mathfrak{r}(g)$ с помощью формулы (2.9).

Наконец, если $G$ полна, то $\tau$ внутренняя согласно теореме 2.2, поэтому для любых $\varepsilon > 0$ и $g \in G$ существует временноподобная кривая в $G \times \mathbb{R}$, соединяющая единицу с $(g, \mathfrak{r}(g) + \varepsilon)$. Проекция этой кривой на $G$ соединяет единицу с $g$ и имеет длину не больше $\mathfrak{r}(g) + \varepsilon$ ввиду того, что $s = \mathfrak{r}(h) + \mathfrak{t}(h, s) > 0$ и $\mathfrak{t}(h, s) > 0$ для всех $(h, s) \in \Pi_0$ (эти неравенства следует применить к $x_k^{-1} x_{k+1}$, где $x_k, x_{k+1}$ — соседние точки разбиения временноподобной кривой). •

**Замечание.** Условие непрерывности функции $\mathfrak{r}$ в условии теоремы может быть опущено.

Указанный в теореме способ метризации надграфика не единственный, как показывает следующий пример.

**Пример 2.2.** Пусть на $G$ задана внутренняя метрика $\rho$. Тогда для каждого $\alpha \in [1, \infty)$ можно определить внутреннюю антиметрику $\tau_\alpha$ на $G \times \mathbb{R}$, определяемую условием левоинвариантности и формулой $\tau_\alpha(e, (h, t)) = (t^\alpha - \rho(e, h)^\alpha)^{1/\alpha}$ для $(h, t)$ из надграфика $U_0 = \{(h, t) : t > \rho(e, h)\}$. Эта антиметрика удовлетворяет всем аксиомам AM.

## §3. Локально компактные группы

**Лемма 3.1.** *Замкнутая подполугруппа компактной группы является группой.*

**Доказательство.** Пусть $S$ — замкнутая полугруппа в компактной группе $K$, $x \in S$. Достаточно доказать, что $x^{-1} \in S$. Пусть $V \in \mathcal{T}_e$; без ограничения общности можно считать, что $x \notin V$. Докажем, что для некоторого $n > 1$ выполняется включение $x^n \in V$. Если это не так, то бесконечное множество $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ не имеет предельных точек, так как $x^n U \cap x^m U = \varnothing$ при $n \neq m$ для любой $U \in \mathcal{T}_e$ такой, что $UU^{-1} \subseteq V$, что противоречит компактности $K$. Из доказанного следует, что $x^{n-1} \in x^{-1} V$, откуда $x^{-1} V \cap S \neq \varnothing$ и $x^{-1} \in S$ ввиду замкнутости $S$ и произвольности $V$. •

**Следствие.** *Если $S$ — острая замкнутая полугруппа в группе $G$, $K$ — компактная подгруппа $G$, то $S \cap K = \{e\}$.*

В частности, компактные группы не допускают метризованных левоинвариантных порядков.

**Лемма 3.2.** *Пусть $K$ — компактная нормальная подгруппа локально-компактной группы $G$, $p : G \to G/K$ — канонический гомоморфизм. Тогда для любой острой локально порожденной полугруппы $S$ полугруппа $p(S)$ — острая.*

**Доказательство.** Вследствие предложения 1.2 можно считать, что $S$ замкнута. Ввиду компактности $K$ множество $SK$ и, следовательно, $p(S)$ в этом случае замкнуты. Согласно лемме 1.1 и предложению 1.1, достаточно доказать, что $p(S) \cap p(S)^{-1} = \{p(e)\}$. В противном случае существует $x \in SK \setminus K$ такой, что $x^{-1} \in SK$. Тогда для некоторых $k_1, k_2 \in K$, $xk_1 \in S$ и $x^{-1}k_2 \in S$, откуда $(xk_1x^{-1})k_2 \in K \cap S = \{e\}$, т.е. $xk_1 = (x^{-1}k_2)^{-1} \in S \cap S^{-1} = \{e\}$, что противоречит предположению $x \notin K$. •

**Предложение 3.1.** *Пусть $\{U_t\}_{t\geq 0}$ — метризованный порядок на локально компактной группе $G$, $K$ — компактная нормальная подгруппа $G$, $p : G \to G/K =: \widetilde{G}$ — канонический гомоморфизм. Тогда семейство множеств $\{\widetilde{U}_t\}_{t\geq 0}$, где $\widetilde{U}_t = p(U_t)$, определяет метризованный порядок на $\widetilde{G}$. При этом соответствующая антиметрика задается формулой*

$$\widetilde{\tau}(\widetilde{g}, \widetilde{h}) = \max\{\tau(gk_1, hk_2) : k_1, k_2 \in K\},$$

*где $\widetilde{g} = p(g)$, $\widetilde{h} = p(h)$.*

**Доказательство.** Продолжим $p$ до гомоморфизма $G \times \mathbb{R} \to \widetilde{G} \times \mathbb{R}$, считая $p$ тождественным на $\mathbb{R}$. Применяя лемму 3.2 и лемму 1.1 к подграфику $\Pi$ функции $\mathfrak{t}$, получаем, что множество $\widetilde{\Pi} := p(\Pi)$ является острой локально порожденной полугруппой. Так как $x \in \widetilde{\Pi}$ тогда и только тогда, когда $p^{-1}(x) \cap \Pi \neq \varnothing$, то

$$\widetilde{\Pi} = \{(\widetilde{g}, t) \in \widetilde{G} \times \mathbb{R} : 0 < t < \max\{\mathfrak{t}(gk) : k \in K\}\}$$

и $\widetilde{\Pi}$ — подграфик функции

$$\widetilde{\mathfrak{t}}(\widetilde{g}) := \max\{\mathfrak{t}(gk) : k \in K\}. \tag{3.1}$$

Неотрицательность $\widetilde{\mathfrak{t}}$ очевидна, непрерывность следует из равномерной непрерывности $\mathfrak{t}$ на любом множестве вида $p^{-1}(V)$, где $V$ — открытое множество в $\widetilde{G}$ с компактным замыканием. Доказательство завершается применением теоремы 2.1 и формулы (2.9) . •

Напомним определение обратного предела последовательности топологических групп: $G = \varprojlim_{n\to\infty} \{G_n, p_{nm}, n \le m\}$, если

а) $p_{nm}$ — непрерывный эпиморфизм группы $G_m$ на группу $G_n$, где $n \le m$, причем $p_{nm} = p_{nk} \circ p_{km}$ в случае $n \le k \le m$;

б) $G$ состоит из последовательностей $g = (g_1, g_2, \dots)$, где $g_k \in G_k$, $g_n = p_{nm}(g_m)$, если $n \le m$;

в) $G$ снабжено топологией, индуцированной из прямого тихоновского произведения топологических групп $\prod_{n=1}^{\infty} G_n$.

Проекция $p_n : G \to G_n$ определяется формулой $p_n(g_1, \dots, g_n, \dots) = g_n$. Любая связная локально компактная группа со счетной базой семейства окрестностей единицы может быть реализована в виде обратного предела последовательности групп Ли [Yam].

Условимся о сокращенной записи: $G = \varprojlim_{n\to\infty} G_n$.

**Лемма 3.3.** *Предположим, что в каждой группе $G_n$ задана полугруппа $S_n$, причем при $n \le m$ выполняется условие $p_{nm}(S_n) = S_m$. Тогда для множества $S := \varprojlim_{n\to\infty} S_n$, состоящего из $g = (g_1, g_2, \dots) \in G$, таких, что $g_n \in S_n$ при всех $n$, выполняются следующие утверждения:*

а) *если все полугруппы $S_n$ острые, то $S$ — острая полугруппа;*

б) *если все полугруппы $S_n$ локально порождены, то $S$ — локально порожденная полугруппа.*

**Доказательство.** Тот факт, что $S$ — полугруппа, очевиден. Любая окрестность единицы в $G$ содержит окрестность вида

$$V = G \cap \prod_{n=1}^{\infty} V_n,$$

где $V_n$ — окрестность единицы в $G_n$ и лишь конечное число сомножителей $V_n$ отлично от $G_n$. Без ограничения общности можно считать, что все $V_n$ обладают свойством (b$'$) по отношению к $S_n$. Тогда если $x, y \in S$ и $xy \in V$, то для всех $n$, $x_n, y_n \in S_n$ и $x_n y_n \in V_n$. Поэтому $x_n, y_n \in V_n$ и $x, y \in V$, т.е. для $V$ выполнено (b$'$).

Чтобы доказать локальную порожденность $S$, отметим, что любая окрестность $V$ единицы в $G$ содержит, начиная с некоторого номера $N$, ядра гомоморфизмов $p_n$. Фиксируем $n > N$, обозначим через $S'$ полугруппу, алгебраически порожденную $S \cap V$, и через $S'_n$ — подполугруппу $S_n$, порожденную $S_n \cap p_n(V)$.

Ясно, что $S'_n = p_n(S')$. Так как $S_n$ локально порождена, то $S'_n$ плотна в $S_n$, откуда $S_n \subseteq p_n(V)S'_n$. Пусть $K_n$ — ядро $p_n$. Тогда

$$S \subseteq p_n^{-1}(S_n) \subseteq p_n^{-1}(p_n(V)S'_n) = p_n^{-1}(p_n(VS')) = K_nVS' \subseteq V^2S'.$$

Ввиду произвольности $V$, $S'$ плотна в $S$. •

Предположим, что в каждой группе $G_n$ задан метризованный порядок $\mathfrak{U}_n = \{U_t^{(n)}\}_{t\geq 0}$, причем при $n \leq m$ для всех $t \geq 0$ выполняется равенство

$$p_{nm}(U_t^{(m)}) = U_t^{(n)}. \tag{3.2}$$

Определим $U_t$ как подмножество $G$, состоящее из последовательностей $g = (g_1, g_2, \dots)$ таких, что $g_n \in U_t^{(n)}$ для всех $n$, обозначим через $\mathfrak{U}$ семейство множеств $\{U_t\}_{t\geq 0}$ и будем называть его пределом метризованных порядков $\mathfrak{U}_n$: $\mathfrak{U} = \varprojlim_{n\to\infty} \mathfrak{U}_n$.

Следующая теорема аналогична результату, полученному в [B11] для левоинвариантных внутренних метрик.

**Теорема 3.1.** *Любой метризованный порядок на связной локально компактной группе $G$ со счетной базой семейства окрестностей единицы может быть реализован в виде предела $\mathfrak{U}$ метризованных порядков $\mathfrak{U}_n$ на связных группах Ли $G_n$. При этом последовательность $\tau_n^+ \circ p_n$, где $\tau_n$ — соответствующая $\mathfrak{U}_n$ антиметрика в $G_n$, сходится равномерно на компактах в $G \times G$ к функции $\tau^+$, отвечающей $\mathfrak{U}$.*

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что, согласно теореме Ямабе из [Yam], $G$ может быть представлена в виде обратного предела последовательности $G_n$ связных групп Ли, где ядра эпиморфизмов $p_n : G \to G_n$ компактны и убывают по $n$, причем они содержатся в любой окрестности единицы, начиная с некоторого номера. Согласно предложению 3.1, эпиморфизм $p_n$ определяет в $G_n$ метризованный порядок $\mathfrak{U}_n$. Очевидно, эти порядки связаны формулой (3.2). По определению это означает, что $\mathfrak{U} = \varprojlim_{n\to\infty} \mathfrak{U}_n$.

Так как ядра $p_n$ убывают, то, согласно (3.1), последовательность функций $\tau_n^+ \circ p_n$ не возрастает. Ввиду непрерывности $\tau^+$ и того, что ядра $p_n$, кроме конечного числа $n$, содержатся в сколь угодно малой окрестности $e$, $\tau_n^+ \circ p_n$ сходится к $\tau^+$ поточечно. Теперь равномерная сходимость на компактах следует из непрерывности $\tau^+$ и теоремы Дини о монотонной сходимости. •

**Пример 3.1.** Обозначим $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R}^\infty = \varprojlim_{n\to\infty} \mathbb{R}^n$; при этом

$$p_{nm}((x_1, \dots, x_m, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_m).$$

Тогда $\mathbb{R}_+^\infty := \varprojlim_{n\to\infty} \mathbb{R}_+^n$ — острая локально порожденная полугруппа, не имеющая внутренних точек. Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\tau_n^+(x, y) = \max\{0, \min\{y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n\}\}.$$

Замена значения 0 на $-\infty$ приводит к внутренней антиметрике $\tau_n$ на $\mathbb{R}^n$. Поскольку предельная полугруппа не имеет внутренних точек, то предельной антиметрики не существует.

## Список литературы

[A] Александров А. Д., *О философском содержании теории относительности,* Эйнштейн и философские проблемы физики XX века, Наука, М., 1979, сс. 117–137.

[Vi] Винберг Э. Б., *Инвариантные выпуклые конусы и упорядочения в группах Ли,* Функц. анал. и его прил. **14** (1980), № 1, 1–13.

[Pa] Paneitz S., *Invariant convex cones and causality in semisimple Lie algebras and groups,* J. Funct. Anal. **43** (1981), no. 3, 313–359.

[Ol1] Ольшанский Г. И., *Инвариантные упорядочения в простых группах Ли. Решение задачи Э. Б. Винберга,* Функц. анал. и его прил. **16** (1982), № 4, 80–81.

[Ol2] Ольшанский Г. И., *Выпуклые конусы в симметрических алгебрах Ли, полугруппы Ли и инвариантные причинные структуры (упорядочения) на псевдоримановых симметрических пространствах,* Докл. АН СССР **265** (1982), № 3, 537–541.

[Pi1] Пименов Р. И., *Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка,* Сыктывкар, 1987.

[Bo] Богословский Г. Ю., *Теория локально анизотропного пространства-времени,* Моск. ун-т, М., 1992.

[Pi2] Пименов Р. И., *Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени),* Зап. науч. семин. ЛОМИ **6** (1968), 1–496.

[Syn] Синг Дж., *Общая теория относительности,* ИЛ, М., 1963.

[Bim] Бим Дж., Эрлих П., *Глобальная лоренцева геометрия,* Мир, М., 1985.

[BPS] Berestovskiĭ V., Plaut C., Stallmann C., *Geometric groups.* I, Trans. Amer. Math. Soc. **351**(1999), 1403–1422.

[Gr] Gromov M., *Carnot–Caratheodory spaces seen from within,* Sub-Riemannian Geometry (A. Bellaïche and J.-J. Risler, eds.), Progr. Math., vol. 144, Birkhäuser, Basel, 1997.

[VG] Вершик А. М., Гершкович В. Я., *Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи,* Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, т. 16, ВИНИТИ, М., 1987, сс. 5–85.

[B3] Берестовский В. Н., *Однородные многообразия с внутренней метрикой.* 1, Сиб. мат. ж. **29** (1988), № 6, 17–29.

[Gi] Gichev V. M., *Invariant orders in simply connected Lie groups,* J. Lie Theory **5** (1995), no. 1, 41–79.

[B2] Берестовский В. Н., *Однородные пространства с внутренней метрикой,* Докл. АН СССР **301** (1988), № 2, 268–271.

[Ra2] Rådström H., *One-parameter semigroups of subsets of a real linear space,* Ark. Mat. **4** (1960), no. 1, 87–97.

[Ra1] Rådström H., *Convexity and norm in topological groups,* Ark. Mat. **2** (1952), no. 2–3, 99–137.

[Yam] Yamabe H. *A generalization of a theorem of Gleason,* Ann. of Math. (2) **58** (1953), 351–365.

[B11] Берестовский В. Н., *О структуре однородных локально компактных пространств с внутренней метрикой,* Сиб. мат. ж. **30** (1989), № 1, 23–34.

Поступило 25 мая 1998 г.

Омский государственный университет
644077, Омск, пр. Мира, 55а
*E-mail*: berest@math.omsu.omskreg.ru

Омский государственный университет
644077, Омск, пр. Мира, 55а
*E-mail*: gichev@math.omsu.omskreg.ru