ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 1.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-357-363

О размере множества произведения множеств рациональных чисел

Ю. Н. Штейников

Штейников Юрий Николаевич — кандидат физико-математических наук, Научно-исследовательский институт системных исследований РАН (г. Москва).
e-mail: yuriisht@gmail.com

Аннотация

Впервые в статье [1] были установлены нетривиальные нижние оценки на размер множества произведений рациональных чисел, числители и знаменатели которых ограничены некоторой величиной Q. Грубо говоря, было показано, что размер произведения отклоняется от максимального не меньше чем в $\exp\left\{(9+o(1))\frac{\log Q}{\sqrt{\log\log Q}}\right\}$ раз. В статье [7] показатель у $\log\log Q$ был улучшен со значения $1/2$ до значения 1 и доказательство основного результата о множестве произведений дробей было принципиально другим. Это доказательство, его аргумент был основыван на поиске специального большого подмножества исходного множества рациональных чисел, у множество числителей и знаменателей которых являлись попарно взаимно простыми числами. Главным инструментом было рассмотрение случайных подмножеств. Была получена нижняя оценка математического ожидания величины размера этого случайного подмножества. Там же удалось получить верхнюю оценку на мультипликативную энергию рассматриваемого множетсва. Нижние оценка на число произведений и верхняя оценка на мультипликативную энергию множества являются близкими к оптимальным результатам. В данной статье мы предлагаем следующую схему. Мы в общем и целом следуем схеме доказательства статьи [1], при этом модифицируем некоторые шаги и привнося некоторые дополнительные оптимизации и тоже улучшаем показатель со значения $1/2$ до значения $1-\varepsilon$ для произвольного положительного $\varepsilon > 0$.

Ключевые слова: рациональные числа, делимость, дроби, случайное множество, энергия, число представлений, функция делителей, гладкие числа, преобразование Абеля, подмножество.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
Ю. Н. Штейников. О размере множества произведения множеств рациональных чисел // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 357–363.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 1.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-357-363

On the size of the set of the product of sets of rational numbers

Yu. N. Shteinikov

Shteinikov Yuri Nikolaevich — scientific research, Institute of System Analysis of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: yuriisht@gmail.com

Abstract

For the first time in the article [1] was established non-trivial lower bounds on the size of the set of products of rational numbers, the numerators and denominators of which are limited to a certain quantity Q. Roughly speaking, it was shown that the size of the product deviates from the maximum by no less than $\exp\Big\{(9+o(1))\frac{\log Q}{\sqrt{\log\log Q}}\Big\}$ times. In the article [7], the index of $\log\log Q$ was improved from 1/2 to 1, and the proof of the main result on the set of fractions was fundamentally different. This proof, its argument was based on the search for a special large subset of the original set of rational numbers, the set of numerators and denominators of which were pairwise mutually prime numbers. The main tool was the consideration of random subsets. A lower estimate was obtained for the mathematical expectation of the size of this random subset. There, it was possible to obtain an upper bound for the multiplicative energy of the considered set. The lower bound for the number of products and the upper bound for the multiplicative energy of the set are close to optimal results. In this article, we propose the following scheme. In general, we follow the scheme of the proof of the article [1], while modifying some steps and introducing some additional optimizations, we also improve the index from 1/2 to $1-\varepsilon$ for an arbitrary positive $\varepsilon > 0$.

Keywords: rational numbers, divisibility, fractions, random set, energy, number of representations, divisor function, smooth numbers, Abel transformation, subset.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
Yu. N. Shteinikov 2020, "On the size of the set of the product of sets of rational numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 357–363.

1. Введение

Пусть дано положительное достаточно большое Q и пусть A, B являются множествами рациональных чисел:

$$A, B \subseteq F_Q = \Big\{\frac{r}{s} : 1 \le r, s \le Q\Big\}.$$

По определению произведение множеств A и B это

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

Ж. Бургейн, С.В. Конягин и И.Е. Шпарлинский [1] установили следующий результат.

Теорема 1. *Если $A, B \subseteq F_Q$, тогда имеет место оценка*

$$|AB| \ge |A||B| \exp\Big\{(-9+o(1))\frac{\log Q}{\sqrt{\log\log Q}}\Big\}, Q \to \infty. \tag{1}$$

Этот результат далее использовался этими и другими авторами для важных теоретико-числовых задач, заинтересованных читателей мы отсылаем к статьям [1], [2], [3],[5], [6]. Х. Силлеруело [2] доказал Теорему 1 и улучшил показатель 9 в формулировке Теоремы 1. Далее автор этой статьи с помощью подхода, отличного от [1], в работе [7] вывел такую оценку.

Теорема 2. *Существует абсолютная константа $C > 0$, такая что если $A, B \subseteq F_Q$, тогда справедлива оценка*

$$|AB| \geq |A||B| \exp\Big\{(-C + o(1))\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}, Q \to \infty, \tag{2}$$

и в качестве C можно взять $8\log 2$.

В случае если $A = B$ можно взять $C = 6\log 2$ и константа C не может быть взята меньше чем $4\log 2$.

В данной же статье мы будем следовать рассуждениям из [1] с добавлением идей и модификациям и выведем из них такой результат.

Теорема 3. *Существует абсолютная константа $C > 0$ такая что если $A, B \subseteq F_Q$ тогда справедливо неравенство*

$$|AB| \geq |A||B| \exp\Big\{(-C + o(1))\frac{\log Q \log\log\log Q}{\log\log Q}\Big\}, Q \to \infty, \tag{3}$$

Мы отмечаем, что основной результат слабее предыдущего. Однако главной задачей и целью является демонстрация самого метода [1] и его некоторая оптимизация.

Работа организована следующим образом. Во втором разделе собраны вспомогательные утверждения, в третьем мы доказываем основную теорему.

2. Предварительные результаты

Как обычно через $\tau(n)$ будем обозначать число делителей числа n. Напомним известную оценку на $\tau(n)$, которая может быть найдена в книге [10], Theorem 5.2, Kapitel 1.

$$\tau(n) \leq 2^{\frac{(1+o(1))\log n}{\log\log n}}, n \to \infty. \tag{4}$$

Нам необходимы некоторые дополнительные утверждения и леммы. Начнем с определения гладких чисел. Для целого n пусть $P^+(n)$ обозначает наибольший простой делитель n, и $P^+(1) = 1$. Для $x \geq y \geq 2$ пусть

$$\psi(x, y) = |\{n \leq x : P^+(n) \leq y\}|.$$

Это множество называется множеством $y-$ гладких чисел, не превосходящих x. Мы приводим верхние оценки на $\psi(x, y)$, которые могут быть в точности представлены в [12], Theorem 1.4, которые мы приводим ниже.

Лемма 1. *Равномерно для $x \geq y \geq 2$, справедливо*

$$\log\psi(x, y) = Z\Big\{1 + O(\frac{1}{\log y} + \frac{1}{\log\log x})\Big\},$$

где

$$Z = Z(x, y) = \frac{\log x}{\log y}\log(1 + \frac{y}{\log x}) + \frac{y}{\log y}\log(1 + \frac{\log x}{y}).$$

Пусть $\tau(n, z)$ обозначает число делителей числа n, которые не превосходят z, то есть

$$\tau(n, z) = |\{d : d|n, d \leq z\}|.$$

Приведем далее такую лемму.

Лемма 2. *Количество делителей числа $n < Q$, не превосходящих z, не превосходит*

$$\psi(z, (1 + o(1))\log Q), Q \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $p_1^{t_1}...p_s^{t_s}$ разложение на простые множители, причем $p_1 < p_2 < \ldots < < p_s$.

Рассмотрим отображение делителей числа n

$$\sigma : p_1^{l_1}...p_s^{l_s} \to p_{(1)}^{l_1}...p_{(s)}^{l_s},$$

где $p_{(i)}$ — i-ое простое число в натуральном ряду, то есть $p_{(1)} = 2, p_{(2)} = 3, p_{(3)} = 5, ...$

Это отображение инъективно. Также, $\sigma(d) \leq d \leq z$.

Известно, что если $n := p_1^{t_1}...p_s^{t_s} < Q$ то $p_{(s)} \leq (1 + o(1)) \log Q$. Отсюда количество чисел в образе отображения σ, которые не превосходят z не больше $\psi(z, (1 + o(1)) \log Q)$. А это и есть исходное утверждение. Лемма доказана. □

Из предыдущих двух лемм можно вывести такое лемму. Она нам понадобится в дальнейшем при доказательстве основной теоремы.

Лемма 3. *Пусть C_1— некоторая фиксированная константа, Q— достаточно большое натуральное число, $n \leq Q$ и $s \in [\exp\{C\frac{\log Q}{\log\log Q}\}, Q]$. Тогда существует такая фиксированная константа $C_2 > 0$, что выполнено неравенство*

$$\tau(n, s) \leq s^{\frac{(C_2+o(1))\log\log\log Q}{\log\log Q}}, Q \to \infty.$$

3. Доказательство основных результатов.

Теорема 3

Доказательство. Схема доказательства аналогична доказательству работы [1]. Введем параметры M_1, γ.

$$M_1 = \exp\Big\{\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}; \gamma = \frac{c_0 \log\log\log Q}{\log\log Q},$$

где c_0 - некоторая абсолютная константа, которую определим позже. Мы утверждаем, что существует такое подмножество $B_0 \subseteq F_Q$ размера

$$|B_0| \geq |B| Q^{2\gamma}$$

и $\xi \in \mathbb{Q}$, что $\xi B_0 \subseteq B$ и для любого числа $m > 1$ справедливо

$$|\Big\{r/s \in B_0 : \gcd(r, s) = 1, m|r \quad or \quad m|s\Big\}| \leq \frac{2}{m^\gamma}|B_0|. \tag{5}$$

Конструкция построения такого множества следующая. Для положительного действительного R определим

$$E_R = \Big\{\frac{r}{s} : r, s \in \mathbb{N}, \gcd(r, s) = 1, rs \leq R\Big\}.$$

Ясно, что $F_Q \subseteq E_{R^2}$. Если $B_0 = B$ не удовлетворяет неравенству, то по определению существует такое $m_1 > 1 \in \mathbb{Z}$ (5) и подмножество $B_1 \subseteq E_{Q^2/m_1}$ и размера $|B_1| \geq |B|/m_1^\gamma$ что либо

$$m_1 B_1 \subseteq B_0,$$

либо

$$\frac{1}{m_1} B_1 \subseteq B_0.$$

Далее повторяем итеративно эту процедуру со множеством B_1 вместо B_0. И так далее. После проведения k шагов мы получим множество B_k такое, что

$$B_k \subseteq E_{Q^2/\prod_i m_i}; \xi B_k \subseteq B, \xi \in \mathbb{Q}, |B_0| \geq |B|/(\prod_i m_i)^\gamma. \tag{6}$$

удовлетворяющее условию (5). Так как мы знаем, что $(\prod_i m_i) \leq Q^2$, то

$$B_k \geq |B| Q^{2\gamma}.$$

Из этого неравенства следует, что наша процедура завершится на каком-то шаге k и множество B_k будет удовлетворять нашему требованию. Положим $B_0 = B_k$. Далее, установим нижнюю оценку на размер множества AB_k. Для $\alpha = r/s \in F_Q, \gcd(r,s) = 1$ обозначим

$$B_0(\alpha) = \{u/v \in B_0 : u, v \in \mathbb{N}, \gcd(u,v) = 1, \gcd(u,s) \le M_1, \gcd(v,r) \le M_1\}.$$

Докажем, что при правильно подобранной константе c_0 для любого $\alpha \in F_Q$ справедливо $|B_0(\alpha)| \ge$ $\ge |B_0|/2$. Для этого оценим дополнение

$$|B_0 \setminus B_0(\alpha)| \le |B_0|\Big(\sum_{d|r, d>M_1} 1/d^\gamma + \sum_{d|s, d>M_1} 1/d^\gamma\Big).$$

Для оценки каждой суммы применим будем применять преобразование Абеля. Продемонстрируем это на примере первой суммы. Пусть $\chi(d)$ обозначает характеристическую функцию множества делителей числа r, а $X(s) = \sum_{M_1<d\le s} \chi(d)$.

$$\sum_{d|r, d>M_1} 1/d^\gamma = \sum_{M_1<d\le Q} \chi(d)/d^\gamma = X(Q)/Q^\gamma + \gamma \int_{M_1}^{Q} X(s)/s^{\gamma+1} ds.$$

Далее, заметим, что $X(Q) \le \tau(r)$. А по Лемме 3 имеет место неравенство

$$X(s) \le \tau(r,s) \le s^{\frac{(C_2+o(1))\log\log\log Q}{\log\log Q}}.$$

Подставим эти неравенства в последнее выражение и получим, что при достаточно большом, но фиксированном c_0 (в определении γ) мы имеем

$$\sum_{d|r, d>M_1} 1/d^\gamma + \sum_{d|s, d>M_1} 1/d^\gamma < 1/2.$$

Поэтому для любого $\alpha \in F_Q$ верно $|B_0(\alpha)| \ge |B_0|/2$. $\square$

Теперь оценим снизу размер множества AB. Легко видеть, что

$$|AB| \ge |AB_0| \ge |\bigcup_{\alpha\in A} \{\alpha\beta : \beta \in B_0(\alpha)\}| \ge \frac{|A||B_0|}{2L},$$

где по определению $L = \max_\xi |\{(\alpha,\beta) : \alpha \in A, \beta \in B_0(\alpha), \alpha\beta = \xi\}|$. Оценим сверху L. Пусть

$$\xi \in F_{Q^2}, \xi = x/y, \alpha = r/s, \beta = u/v, \gcd(x,y) = \gcd(r,s) = \gcd(u,v) = 1.$$

Пусть $\gcd(r,u) = m_1, \gcd(u,s) = m_2$. Тогда, во-первых, по построению множества $B_0(\alpha)$ имеем $m_1, m_2 \le M_1$. Обозначим $r' = r/m_1, s' = s/m_2, u' = u/m_2, v' = v/m_1$. Тогда $r'u' = x, s'v' = y$. Число возможных четверок (r', s', u', v') не превосходит $\tau(x)\tau(y)$. Число же пар (m_1, m_2) не превосходит M_1^2. Подставляя известные оценки получаем, что для некоторой фиксированной абсолютной константы $C > 0$

$$L \le \exp\Big\{(-C + o(1))\frac{\log Q}{\log\log Q}\Big\}, Q \to \infty.$$

Остается заметить, что $|B_0| \ge |B| \exp\Big\{(-C + o(1))\frac{\log Q \log\log\log Q}{\log\log Q}\Big\}$ для некоторой фиксированной абсолютной константы $C > 0$. Подставляя все эти оценки мы получаем утверждение Теоремы 3. Эти мы завершаем доказательство теоремы.

4. Заключение

Отметим, что некоторые результаты о произведениях и частных подмножеств натуральных чисел содержатся в работах [4] – [13] и в приведенной ниже литературе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bourgain J., Konyagin S.V., Shparlinski I.E. Product sets of rationals, multiplicative translates of subgroups in residue rings and fixed points of the discrete logarithm // Int. Math Research Notices. 2008. rnn 090, P. 1-29.
2. Cilleruelo J. A note on product sets of rationals // International Journal of Number Theory. 2016. Vol. 12, № 05, P. 1415-1420.
3. Cilleruelo J., Garaev M. Congruences involving product of intervals and sets with small multiplicative doubling modulo a prime and applications // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 2016. Vol. 160, Issue 03, P. 477-494.
4. Cilleruelo J., Ramana D. S., Ramare O. Quotients and product sets of thin subsets of the positive integers // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2017, Vol 296, P. 58–71.
5. Cilleruelo J., Ramana D. S., Ramare O. The number of rational numbers determined by large sets of integers // Bull. of the London Math. Soc. 2010. Vol 42, №3 P. 517-526.
6. Штейников Ю.Н. Оценки тригонометрических сумм по подгруппам и некоторые их приложения // Матем. заметки. 2015. Том 98, выпуск 4, С. 606–625.
7. Штейников Ю.Н. О произведении множеств рациональных чисел // Тр. МИАН. 2017. Т. 296, С. 252–259.
8. Tao T., Vu V. Additive combinatorics // Cambridge University Press 2006, P. 1-530.
9. Конягин С.В., Шкредов И.Д. Новые результаты о суммах и произведениях в $\mathbb{R}$ // Тр. МИАН, Т. 294, С. 87–98 .
10. Prachar K. Primzahlverteilung // Springer–Verlag Berlin–Gőttingen–Heidelberg, 1957.
11. Shnirel'man L.G. Uber additive Eigenschaften von Zahlen // Mathematische Annalen. 1933. Vol. 107, P. 649-690.
12. Adolf Hildebrand, Gerald Tenenbaum. Integers without large prime factors // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1993. Vol. 5, P.411-484.
13. Штейников Ю.Н. Дополнение к работе Х.Силлеруело, Д.С. Раманы, О. Рамаре "Частные и произведения подмножеств нулевой плотности множества натуральных чисел"// Тр. МИАН, 2017, Т. 296, С. 260–264 .
14. Штейников Ю. Н. О распределении элементов полугрупп натуральных чисел // Чебышевский сб., Т. 13, №3, С. 91–99 .
15. Штейников Ю. Н. О распределении элементов полугрупп натуральных чисел II // Чебышевский сб., Т. 17, №3, С. 197–203 .

REFERENCES

1. Bourgain J., Konyagin S.V., Shparlinski I.E. "Product sets of rationals, multiplicative translates of subgroups in residue rings and fixed points of the discrete logarithm", *Int. Math Research Notices.*, rnn 090, pp. 1-29.
2. Cilleruelo J. A note on product sets of rationals *International Journal of Number Theory* vol. 12, no. 5, pp. 1415-1420.
3. Cilleruelo J., Garaev M. "Congruences involving product of intervals and sets with small multiplicative doubling modulo a prime and applications" *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 160, Issue 03, pp. 477-494.
4. Cilleruelo J., Ramana D. S., Ramare O. "Quotients and product sets of thin subsets of the positive integers" *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, pp. 58-71.
5. Cilleruelo J., Ramana D. S., Ramare O. "The number of rational numbers determined by large sets of integers" *Bull. of the London Math. Soc.*, vol. 42, no. 3, pp. 517-526.

6. Shteinikov Yu. N. ‘Estimates of Trigonometric Sums over Subgroups and Some of Their Applications“ *Math. Notes*, vol 98, no. 4, pp. 667-684.

7. Shteinikov Yu. N. “On the product sets of rational numbers“ *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 296, pp. 243–250.

8. Tao T., Vu V. Additive combinatorics *Cambridge University Press.*, 2006, pp.1-530.

9. Konyagin S. V., Shkredov I. D. “New results on sums and products in $\mathbb{R}$“ *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol 294, pp. 78–88.

10. Prachar K. “Primzahlverteilung“ *Springer–Verlag Berlin–Gőttingen–Heidelberg*, 1957.

11. Shnirel’man L.G. “Uber additive Eigenschaften von Zahlen“ *Mathematische Annalen*, vol. 107, pp. 649-690.

12. Adolf Hildebrand, Gerald Tenenbaum. “Integers without large prime factors“ *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux*, vol. 5, pp.411-484.

13. Shteinikov Yu. N. “Addendum to J. Cilleruelo, D.S. Ramana, and O. Ramare’s Paper ’Quotient and Product Sets of Thin Subsets of the Positive Integers’“ *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol 296, pp. 251-255.

14. Shteinikov, Yu. N. “On the distribution of elements of semigroups of natural numbers“ *Chebyshevskii Sb.* vol. 13, no. 3, pp. 91-99.

15. Shteinikov, Yu. N. “On the distribution of elements semigroups of natural numbers II“, *Chebyshevskiĭ Sb.* , vol.17, no. 3, pp. 197-203.

Получено 18.01.2020 г.
Принято в печать 20.03.2020 г.