И. М. Горжалцан УДК 512.81

ИНВАРИАНТЫ КВАЗИПРОСТОЙ ГРУППЫ ЛИ $\widetilde{D}_n^m$

Квазипростая группа Ли получается своеобразным вырождением простой группы Ли, соответствующим некоторому инволютивному автоморфизму последней. Этот процесс описан в [1]. Глобальное определение квазипростой группы Ли дано в [2]. Описание квазипростой группы Ли $\widetilde{D}_{n+1}^m$ и ее геометрическая интерпретация в виде группы преобразований пространства $\overline{S}p_n^m(i, j)$ даны в [3]. На основе указанной интерпретации в этой статье изучаются инварианты группы $\widetilde{D}_{n+1}^m$ как симплектические инварианты пар точек и других образов симметрии пространства $\overline{S}p_n^m(i, j)$.

§ 1. О проективных инвариантах точек пространства $P_n(i, j)$

Симплектические инварианты двух точек пространства $\overline{S}p_n^m(i, j)$ могут быть найдены как проективные инварианты двух точек этого пространства, рассматриваемого как проективное пространство $P_n(i, j)$ над алгеброй кватернионов, наделенное дополнительной, „вырожденной симплектической" структурой (см. [3]). Проективным инвариантом двух нуль-пар (т. е. пар „точка+гиперплоскость") проективного пространства является двойное отношение этих нуль-пар. Оно и определяет симплектические инварианты двух точек пространства $\overline{S}p_n^m(i, j)$, т. к. в случае кватернионного пространства нуль-системы, задающие его структуру, переводят каждую точку в гиперплоскость, не проходящую через эту точку [3] (в отличие от вещественного случая, где это не так).

Теорема 1. *Две нуль-пары пространства $P_n(i, j)$ (точки которых не лежат в соответственных гиперплоскостях) обладают ровно двумя независимыми вещественными проективными инвариантами (напр., вещественная часть и модуль мнимой части двойного отношения этих нуль-пар).*

Доказательство. Проективным инвариантом двух нуль-пар пространства $P_n(i, j)$ является инвариант преобразований $w' = z^{-1}wz$ алгебры кватернионов (w — двойное отношение этих нуль-пар, z — любой отличный от нуля кватернион), т. е. инвариант группы автоморфизмов этой алгебры (см. [4]). Эта группа изоморфна группе собственных вращений сферы трехмерного вещественного векторного пространства, которое образуют все чисто мнимые кватернионы. Ввиду транзитивности этой группы преобразования $w' = z^{-1}wz$ переводят любой чисто мнимый кватернион в любой чисто мнимый кватернион того же модуля. Следовательно, эти преобразования сохраняют вещественную часть и модуль мнимой части кватерниона w, и других независимых инвариантов этих преобразований нет.

Эти инварианты представляют собой вещественную часть и модуль мнимой части собственных чисел комплексной матрицы $W = \begin{pmatrix} a+bi & -c+di \\ c+di & a-bi \end{pmatrix}$, представляющей кватернион $w = a + bi + cj + dk$.

§ 2. Симплектические инварианты точек

Теорема 2. *Две точки x и y пространства $\overline{S}p_n^m(i, j)$ (не принадлежащие точечному абсолюту) обладают ровно двумя независимыми вещественными симплектическими инвариантами.*

Доказательство. Каждой из точек x, y пространства $\overline{S}p_n^m(i, j)$ фиксированные нуль-системы, задающие структуру этого пространства, однозначно ставят в соответствие гиперплоскости u, v. Двойное отношение нуль-пар (x, u) и (y, v) и определяет ровно два независимых вещественных инварианта точек x, y.

Двойное отношение указанных нуль-пар $w = (ux)^{-1}(uy)(vy)^{-1}(vx)$ (см. [4]; здесь x, y, u, v обозначают матричные координаты соответственных объектов) в нормированных проективных координатах пространства $\overline{S}p_n^m(i, j)$ приводится к виду $w = i(\overline{x}_0^T i y_0)\, i(\overline{y}_0^T i x_0)$ (все обозначения см. в [3]). В случае $x_0 \neq y_0$ в качестве указанных в теореме 2 инвариантов можно взять вещественную часть и модуль мнимой части этого кватерниона w. В случае же $x_0 = y_0$ эти инварианты не выделяют пару точек из других пар, им симплектически не инвариантных.

Теорема 3. *Условие $x_0 = y_0$ для точек x, y пространства $\overline{S}p_n^m(i, j)$ в нормированных координатах равносильно тому, что эти точки лежат на квазисимплектической прямой.*

Доказательство. Если прямая (xy) квазисимплектическая, то на ней существует точка z, принадлежащая абсолютной плоскости; для этой точки $z_0 = x_0 + y_0 t = 0$ (t — кватернионный параметр, отвечающий точке z, т. е. $z = x + yt$, $z \neq y$). Отсюда $x_0 = -y_0 t$, т. е. первые $(m+1)$ координат точек x и y совпадают (как проективные однородные координаты в кватернионном пространстве): $x_0 = y_0$. Если же прямая (xy) симплектическая, то на ней нет точки z, удовлетворяющей условию $z_0 = 0$, т. е. $x_0 \neq y_0$.

Теорема 4. *Если точки x, y пространства $\overline{S}p_n^m(i, j)$ лежат на квазисимплектической прямой, то двумя независимыми вещественными симплектическими инвариантами этих точек являются вещественная часть и модуль мнимой части кватерниона $d = (\overline{x}_1^T - \overline{y}_1^T)\, i\, (x_1 - y_1)$.*

Доказательство. Кватернион d при симплектических преобразованиях пространства $\overline{S}p_n^m(i, j)$ перейдет в кватернион $d' = \overline{\lambda} d \lambda$, где λ можно считать произвольным кватернионом единичного модуля. Поэтому (аналогично доказательству теоремы 1) вещественная часть и модуль мнимой части кватерниона d являются независимыми вещественными инвариантами.

В случае $x_0 \neq y_0$ эти числа не являются инвариантами точек x, y.

§ 3. О проективных инвариантах k-мерных плоскостей

Пусть X, Y — две k-мерные плоскости (и одновременно их проективные точечные матричные координаты [3]), U, V — две $(n-k-1)$-мерные плоскости (и одновременно их тангенциальные проективные матричные координаты) пространства $P_n(i, j)$. Координата U — это матрица, составленная из тангенциальных координат $(k+1)$ линейно независимых гиперплоскостей, проходящих через плоскость U; эта координата определена с точностью до умножения слева на неособенную матрицу. Двойное отношение двух k-пар (X, U) и (Y, V) представляет собой матрицу $W = (UX)^{-1}(UY)(VY)^{-1}(VX)$, которая определена тогда и только тогда, когда плоскости X, U и Y, V в каждой паре не пересекаются (матрицы UX и VY неособенные; см. [5], с. 218). В [5] показано, что сама матрица W не является проективным инвариантом двух k-пар, но класс матриц, подобных W, проективно инвариантен, т. е. проективными инвариантами двух k-пар являются инварианты преобразования $W' = K^{-1}WK$, и только они. А такими инвариантами являются собственные числа комплексной матрицы $(2k+2)$-го порядка, представляющей кватернионную матрицу W [4]. Так как эти собственные числа попарно комплексно сопряжены, то две рассматриваемые k-пары имеют $(2k+2)$ независимых вещественных проективных инвариантов (напр., вещественных частей и модулей мнимых частей этих собственных чисел).

§ 4. Симплектические инварианты k-мерных плоскостей

Эти инварианты определены только для тех k-пар, в которых соответственные k-мерная и $(n-k-1)$-мерная плоскости не пересекаются, т. е. в пространстве $\overline{S}p_n^m(i, j)$ для непараболических плоскостей X и Y [6]. В частности, такими плоскостями являются симплектические плоскости.

Теорема 5. *Две k-мерные симплектические плоскости X и Y пространства $\overline{S}p_n^m(i, j)$ обладают ровно $(2k+2)$ вещественными независимыми симплектическими инвариантами.*

Доказательство является обобщением доказательств теорем 2 и 4. Двойное отношение двух k-пар в пространстве $\overline{S}p_n^m(i, j)$ в нормированных координатах приводится к виду $W = i\,(\overline{X}^T i E_0 Y)\, i\, (\overline{Y}^T i E_0 X)$. В случае, если плоскости X и Y порождают симплектическую плоскость Z, за независимые симплектические инварианты этих плоскостей можно взять собственные числа комплексной матрицы, представляющей кватернионную матрицу W. В случае же, если плоскость Z квазисимплектическая (при $k > (m-1)/2$), указанная выше комплексная матрица имеет $(2m-2k)$ собственных чисел, отличных, вообще говоря, от единицы; они дают $2m-2k$) вещественных независимых симплектических инвариантов. Остальные $(2+4k-2m)$ вещественных инвариантов можно найти с помощью комплексной матрицы, представляющей кватернионную матрицу $D = (\overline{X}^T + (\overline{X}^T i E_0 Y)\, i \overline{Y}^T)\, E_1 i\, (X + Yi\, (\overline{Y}^T i E_0 X))$.

В частности, когда $k=m$, все $(2m+2)$ вещественных инвариантов определяются с помощью матрицы D, которая в этом случае принимает вид $D=(\overline{X}^T-\overline{Y}^T)E_1 i(X-Y)$.

В случае, когда плоскости X и Y являются квазисимплектическими, но непараболическими, $(2k-2m)$ вещественных инвариантов этих плоскостей можно получить с помощью матрицы W, а остальные $(2m+2)$ вещественных инвариантов—с помощью матрицы, аналогичной матрице D.

В случае, когда плоскости X и Y являются параболическими, соответствующие им в структуре пространства $\overline{S}p_n^m(i, j)$ плоскости U и V не определены однозначно; их надо выбрать так, чтобы X не пересекалась с U, а Y—с V (поляризация!). Тогда можно воспользоваться матрицей W.

§ 5. Симплектические инварианты комплексных n-цепей

Нормальная комплексная n-цепь пространства $\overline{S}p_n^m(i, j)$ с уравнением $x=-ixi$ (см. [6]) при симплектическом преобразовании $y=Ux$ перейдет в n-цепь с уравнением $y=-UiU^{-1}yi$. Сравнивая эти уравнения, видим, что матрица $A=-UiU^{-1}i$ характеризует (правда, неоднозначно) образ данной цепи. Эту матрицу назовем *матричной координатой n-цепи*. При симплектическом преобразовании $x'=Ux$ матричная координата A нормальной комплексной n-цепи преобразуется по формуле $A'=-UAiU^{-1}i$.

Теорема 6. *Собственные числа комплексной матрицы, представляющей кватернионную матрицу $AiBi$, где A и B — матричные координаты двух нормальных комплексных n-цепей пространства $\overline{S}p_n^m(i, j)$, являются симплектическими инвариантами этих цепей.*

Доказательство. Нормальные n-цепи с координатами A и B в результате симплектического преобразования перейдут в n-цепи с координатами $A'=-UAiU^{-1}i$ и $B'=-UBiU^{-1}i$. Произведение матриц $A'i$ и $B'i$ имеет вид $U(AiBi)U^{-1}$. Следовательно, матрицы $A'iB'i$ и $AiBi$ подобны; поэтому представляющие их комплексные матрицы имеют соответственно одинаковые собственные числа.

Аналогично находятся симплектические инварианты остальных образов симметрии пространства $\overline{S}p_n^m(i, j)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства.— М., 1969.— 547 с.
2. Персиц Д. Б. Геометрия над вырожденными октавами.— ДАН СССР, 1967, т. 173, № 5, с. 1010—1013.
3. Горжалцан И. М. Фундаментальная группа преобразований пространства $\overline{S}p_n^m(i, j)$ и ее расширение.— Изв. вузов. Матем., 1971, № 6, с. 24—32.
4. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии.— М., 1955.— 744 с.
5. Fuhrmann A. Klasse ähnlicher Matrizen als verallgemeinerte Doppelverhältnisse.—Math. Z., 1955, Bd. 62, № 3, S. 211—240.
6. Горжалцан И. М. Плоскости и комплексные цепи в кватернионном пространстве $\overline{S}p_n^m(i, j)$.— ВИНИТИ, № 2469—76 Деп., 1976.

г. Горький

Поступила
8 IV 1980

В. М. Зубов

УДК 517.927

К ТЕОРИИ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА

Настоящей заметкой продолжены исследования [1]—[4]. Предлагаются следующие результаты. Вводится понятие дефектной функции и дефекта обобщенной функции Грина для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Если k — размерность базиса ядра оператора, порожденного краевой задачей, η — дефект обобщенной функции Грина, то $2(k-\eta)$ базисных элементов и 2η дефектных функций определяют единственную обобщенную функцию Грина. Она является обычной функцией Грина $\Gamma(t, s)$ многозначного интегро-дифференциального оператора. Для этого оператора построен сопряженный так, что функция $G(t, s)\overset{\text{def}}{=}\Gamma(s, t)$ является его обычной функцией Грина. Указаны интегральные уравнения, эквивалентные исходной и сопряженной краевым задачам на собственные значения. К интегральным уравнениям эти задачи сводятся с помощью обобщенной функции Грина, дефект которой $\eta=0$. Отметим, что