Алгебра и логика, 61, № 6 (2022), 706—719

DOI: 10.33048/alglog.2022.61.603 УДК 510.5

СЕМЕЙСТВА ПЕРЕСТАНОВОК И ИДЕАЛЫ ТЬЮРИНГОВЫХ СТЕПЕНЕЙ*)

А. С. МОРОЗОВ, В. Г. ПУЗАРЕНКО, М. Х. ФАЙЗРАХМАНОВ

Введение

Согласно классическому результату К. Джокуша [1], см. также [2, гл. XII, теор. 3.4], семейство всех вычислимых функций, как и семейство всех вычислимых перестановок, см. предложение 1, является $\mathbf{a}$-вычислимым тогда и только тогда, когда тьюрингова степень $\mathbf{a}$ — высокая ($\mathbf{0}'' \leqslant \mathbf{a}'$). Как обычно, процитированный результат допускает релятивизацию. Она позволяет охарактеризовать классы степеней, вычисляющих семейства всех перестановок, степени которых принадлежат главным тьюринговым идеалам. Как следует из результатов работы [3], классический объект теории вычислимости — группа $\mathfrak{G}_{\mathbf{a}}$ всех $\mathbf{a}$-вычислимых перестановок натурального ряда ω — имеет изоморфные $\mathbf{x}$-вычислимые копии в точности для тех степеней $\mathbf{x}$, для которых $\mathbf{a}'' \leqslant \mathbf{x}$. Отсюда следует, что классы скачков степеней, вычисляющих семейство всех $\mathbf{a}$-вычислимых перестановок, и степеней, вычисляющих изоморфные копии группы $\mathfrak{G}_{\mathbf{a}}$, совпадают. Настоящая работа имеет целью прояснение особенностей строения спектров групп перестановок, степени которых принадлежат произвольному (необязательно главному) тьюринговому идеалу I, с помощью скачков семейств перестановок, чьи степени также принадлежат I.

*) Работа первого из авторов выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-01-00300 А, и Минобрнауки России, базовый проект № FWNF-2022-0012; второго из авторов — при поддержке Матем. центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2022-281; третьего из авторов — при поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-20024, и в рамках реализации программы развития Научно-образовательного матем. центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2022-882.

Мы будем часто отождествлять семейства $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ с моделями вида $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, построенными в [4] по семейству $\mathcal{S}$. Можно выбрать и другие равносильные способы построения моделей по семействам подмножеств натуральных чисел, см., напр., [5, 6]. Как следует из результатов процитированных работ, счётное семейство $\mathcal{S}$ будет $\mathbf{a}$-вычислимым тогда и только тогда, когда счётная модель $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$ обладает изоморфной копией с $\mathbf{a}$-вычислимой атомной диаграммой, будем называть такие алгебраические системы *$\mathbf{a}$-вычислимыми*. Класс всех степеней $\mathbf{a}$, для которых алгебраическая система $\mathfrak{A}$ является $\mathbf{a}$-вычислимой, называется *спектром степеней* системы $\mathfrak{A}$, [7] и обозначается как $\mathrm{Spec}\,(\mathfrak{A})$. Если $\mathrm{Spec}\,(\mathfrak{A})$ содержит наименьший элемент $\mathbf{a}$, то он называется *степенью* системы $\mathfrak{A}$, [8]. Вместо $\mathrm{Spec}\,(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ будем использовать $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{S})$. Скачок $\mathfrak{M}'_{\mathcal{S}}$ модели $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, см. [9–12], будем называть *скачком* семейства $\mathcal{S}$ и обозначать его как $\mathcal{S}'$. Из [13, предл. 4] следует, что для любого семейства $\mathcal{S}$, как и для любой алгебраической системы, выполняется $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{S}') = \{\mathbf{a}' : \mathbf{a} \in \mathrm{Spec}\,(\mathcal{S})\}$.

В работе приводятся описания спектров степеней семейств $\mathcal{P}_{\mathrm{I}}$, состоящих из всех перестановок натурального ряда, степени которых принадлежат I, и их скачков $\mathcal{P}'_{\mathrm{I}}$ для любого счётного тьюрингова идеала I. Устанавливается связь спектров степеней групп перестановок $\mathfrak{G}_{\mathrm{I}}$, заданных на семействах $\mathcal{P}_{\mathrm{I}}$ операцией композиции, со спектрами степеней систем $\mathcal{P}'_{\mathrm{I}}$, которые совпадают для главных идеалов I. Для некоторых идеалов I, порождённых в. п. степенями, определяются спектры семейств $\mathcal{P}_{\mathrm{I}}$ и приводятся соответствующие примеры.

Здесь используются стандартные обозначения и терминология из теории вычислимости. Через Φ_e^A обозначается частично A-вычислимая функция с гёделевским номером e. Будем использовать запись $\Phi_e^A(x)\!\downarrow$, если x принадлежит области определения Φ_e^A, и $\Phi_e^A(x)\!\uparrow$ в противном случае. Через $\Phi_{e,s}^A$ будем обозначать сильную аппроксимацию рассматриваемой функции. Кроме того, будем предполагать, что $\Phi_{e,s}^A(x)\!\downarrow\ \Rightarrow\ ((x < s)\,\&\,(e < s))$. Через l и r будем обозначать проекции номера пары относительно вычислимой нумерации пар $c(x,y)$ на первую и вторую координаты соответственно: $lc(x,y) = x$, $rc(x,y) = y$. Определим по индукции

$c(x_0, \dots, x_{n+2}) = c(x_0, \dots, x_n, c(x_{n+1}, x_{n+2}))$. Множество всех идеалов тьюринговых степеней будем обозначать как $\mathcal{J}(\mathrm{L}_T)$. Остальные обозначения см. в [2]. Некоторые результаты статьи используют сведения из теории допустимых множеств. Они приведены в [14–16].

§ 1. Семейства перестановок

В настоящем параграфе приводится описание спектров степеней семейств $\mathcal{P}_\mathrm{I}$. Для этого покажем, что для любого, необязательно счётного, тьюрингова идеала I семейство перестановок $\mathcal{P}_\mathrm{I}$ эквивалентно семейству $\mathcal{F}_\mathrm{I}$ всех функций, степени которых принадлежат I, в смысле следующего определения, см. [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{P}(\omega)$. Говорят, что семейство $\mathcal{S}_0$ Σ-*сводимо* к $\mathcal{S}_1$ (и используют обозначение $\mathcal{S}_0 \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}_1$), если любое допустимое множество $\mathbb{A}$ удовлетворяет следующему условию: если $\mathcal{S}_1$ вычислимо в $\mathbb{A}$, то $\mathcal{S}_0$ вычислимо в $\mathbb{A}$. Говорят, что $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}_1$ Σ-*эквивалентны* (и используют обозначение $\mathcal{S}_0 \equiv_\Sigma \mathcal{S}_1$), если $\mathcal{S}_0 \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_1 \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}_0$.

Понятие Σ-сводимости семейств может быть задано в терминах операторов перечисления [4, теор. 1.1(8)]. В частности, если для некоторых $n \in \omega$ и оператора перечисления Θ справедливо

$$\mathcal{S}_0 \cup \{\varnothing\} = \{\Theta(\{m\} \oplus (A_1 \oplus \dots \oplus A_n)) : m \in \omega, A_i \in \mathcal{S}_1, 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

то $\mathcal{S}_0 \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}_1$; если $\mathcal{S}_1$ состоит только из вычислимо перечислимых множеств, то верно и обратное.

Пусть $\mathrm{I} \in \mathcal{J}(\mathrm{L}_T)$. Для любого $s \in \omega$ положим $[s] = \{x \in \omega : x < s\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для любого* $\mathrm{I} \in \mathcal{J}(\mathrm{L}_T)$ *имеют место соотношения* $\mathcal{F}_\mathrm{I} \equiv_\Sigma \mathcal{P}_\mathrm{I}$ *и* $\mathcal{F}_\mathrm{I} \cup \{\omega\} \equiv_\Sigma \mathcal{P}_\mathrm{I} \cup \{\omega\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что операторы, осуществляющие сводимости, не будут зависеть от идеала I.

($\sqsubseteq_\Sigma$) Возьмём $f \in \mathcal{F}_\mathrm{I}$; тогда оба множества $c(\Gamma_f)$, $\omega - c(\Gamma_f)$ бесконечны и их тьюринговы степени принадлежат I. Определим функции h_0 и

h_1 согласно следующим правилам: $h_0(x) \leftrightharpoons c(x, f(x))$, а $h_1(x)$ перечисляет множество $\omega - c(\Gamma_f)$ в порядке строгого возрастания. В этом случае имеем $h_0 \oplus h_1 \in \mathcal{P}_{\mathrm{I}}$ и $r((h_0 \oplus h_1)(2x)) = rh_0(x) = rc(x, f(x)) = f(x)$. Зададим теперь оператор перечисления Θ следующим образом: если φ — конечная инъективная функция с $2x \in \delta\varphi$, то $c(x, r\varphi(2x)) \in \Theta(\varphi)$. Кроме того, $n \in \Theta(\{0; 1\})$ для всех $n \in \omega$. Таким образом, $\Theta(\mathcal{P}_{\mathrm{I}}) = \mathcal{F}_{\mathrm{I}}$ и $\Theta(\mathcal{P}_{\mathrm{I}} \cup \{\omega\}) = \mathcal{F}_{\mathrm{I}} \cup \{\omega\}$.

($_\Sigma \sqsupseteq$) Возьмём $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{I}}$; тогда $p \in \mathcal{F}_{\mathrm{I}}$, $p^{-1} \in \mathcal{F}_{\mathrm{I}}$ и, к тому же, выполняются соотношения $p(p^{-1}(s)) = s$, $p^{-1}(p(s)) = s$ для всех $s \in \omega$. Далее, пусть $f_0 \in \mathcal{F}_{\mathrm{I}}$ и $f_1 \in \mathcal{F}_{\mathrm{I}}$ таковы, что $f_0(f_1(s)) \neq s$ или $f_1(f_0(s)) \neq s$ для некоторого $s \in \omega$. Тогда найдётся наименьшее $s_0 \in \omega$, для которого выполняются следующие условия:

$\varphi_i \subseteq f_i$, $i = 0, 1$;

$\delta\varphi_0 = [s_0] \cup \varphi_1([s_0])$;

$\delta\varphi_1 = [s_0] \cup \varphi_0([s_0])$;

$\varphi_1 \neq \varphi_0^{-1}$.

Зададим теперь бинарный оператор Ψ следующим образом: если $s_0 \in \omega$ таково, что для конечных функций φ_0 и φ_1 выполняются второе и третье, но не выполняется четвёртое условия, то полагаем $\varphi_0{\restriction}[s_0] = \Psi(\varphi_0, \varphi_1)$; в противном случае полагаем $\Psi(\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_0{\restriction}[s_0 - 1]) \cup \pi$, где $s_0 \in \omega$ — наименьшее число, удовлетворяющее последним трём условиям, а π — частично вычислимая функция, перечисляющая множество $\omega - \rho(\varphi_0{\restriction}[s_0 - 1])$ в порядке строгого возрастания посредством $\omega - [s_0 - 1]$. Кроме того, $n \in \Psi(\varnothing, \{0; 1\}) = \Psi(\{0; 1\}, \varnothing)$ для всех $n \in \omega$. Таким образом, $\Psi(\mathcal{F}_{\mathrm{I}}, \mathcal{F}_{\mathrm{I}}) = \mathcal{P}_{\mathrm{I}}$ и $\Psi(\mathcal{F}_{\mathrm{I}} \cup \{\omega\}, \mathcal{F}_{\mathrm{I}} \cup \{\omega\}) = \mathcal{P}_{\mathrm{I}} \cup \{\omega\}$. $\square$

По определению, из Σ-определимости алгебраической системы $\mathfrak{A}$ в счётной алгебраической системе $\mathcal{B}$ следует $\mathrm{Spec}\,(\mathfrak{B}) \subseteq \mathrm{Spec}\,(\mathfrak{A})$. Для счётных семейств это утверждение следует также из [4, теор. 1.1]. Стало быть, из предложения 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любого счётного тьюрингова идеала* I *справедливо* $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{P}_{\mathrm{I}}) = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{F}_{\mathrm{I}})$.

Далее нам понадобятся следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Последовательность множеств $\{Y_n\}_{n\in\omega}$ будем называть *направленной относительно* $\leqslant_T$ (или просто *направленной*), если для любых i и j найдётся такое k, что $Y_i \leqslant_T Y_k$ и $Y_j \leqslant_T Y_k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что последовательность $\{Y_n\}_{n\in\omega}$ образует *эффективную* T*-цепь*, если $Y_n \leqslant_T Y_{n+1}$ равномерно по каждому $n \in \omega$.

Из следующей теоремы непосредственно вытекает характеризация спектров степеней семейств $\mathcal{P}_{\mathrm{I}}$.

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольного счётного тьюрингова идеала* I *и множества* A *эквивалентны следующие условия*:

(1) *семейство* $\mathcal{P}_{\mathrm{I}}$ *является* A*-вычислимым*;

(2) *существует эффективная* T*-цепь* $\{Y_n\}_{n\in\omega}$, *удовлетворяющая условиям*:

(2.i) $\mathrm{I} = \left\langle \deg_T(Y_n) : n \in \omega \right\rangle$;

(2.ii) $\bigoplus_n Y_n \leqslant_T A$;

(2.iii) $\bigoplus_n Y_n'' \leqslant_T A'$;

(3) *существует направленная последовательность* $\{Y_n\}_{n\in\omega}$, *удовлетворяющая условиям* (2.i)–(2.iii).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя следствие 1, будем рассматривать семейство $\mathcal{F}_{\mathrm{I}}$ вместо $\mathcal{P}_{\mathrm{I}}$.

(1)⇒(2) Пусть $\{f_e\}_{e\in\omega}$ — A-вычислимая последовательность, для которой

$$\mathcal{F}_{\mathrm{I}} = \{f_e : e \in \omega\}.$$

Тогда функция

$$h(x) = \sum_{e=0}^{x} f_e(x)$$

доминирует каждую функцию, степень которой принадлежит I. Определим для каждого n

$$Y_n = \bigoplus_{e\leqslant n} f_e,$$

где каждая из функций f_e отождествляется со свёрткой своего графика. Нетрудно видеть, что эффективная T-цепь $\{Y_n\}_{n\in\omega}$ удовлетворяет условиям (2.i) и (2.ii). Покажем, что она также удовлетворяет условию (2.iii). Пусть

$$\mathrm{Tot}^{Y_n} = \{k : \Phi_k^{Y_n} \text{ всюду определена}\}.$$

Для всех n и k справедливы эквивалентности

$$\forall x \exists s\, [\Phi_{k,s}^{Y_n}(x)\downarrow] \Leftrightarrow k \in \mathrm{Tot}^{Y_n} \Leftrightarrow \exists y \exists s \forall z < y \forall x \geqslant y\, [\Phi_{k,s}^{Y_n}(z)\downarrow \& \, \Phi_{k,h(x)}^{Y_n}(x)\downarrow].$$

Отсюда, $Y_n'' \equiv_T \mathrm{Tot}^{Y_n} \in \Delta_2^0(A)$ равномерно по n. Следовательно,

$$\bigoplus_n Y_n'' \leqslant_T A'.$$

(2)$\Rightarrow$(3) Импликация очевидна.

(3)$\Rightarrow$(1) Пусть направленная последовательность $\{Y_n\}_{n\in\omega}$ удовлетворяет условиям (2.i)–(2.iii). Используя условие (2.ii), выберем вычислимую функцию g, такую что

$$\Phi_e^{Y_n} = \Phi_{g(n,e)}^A$$

для всех n, e. Поскольку последовательность $\{Y_n\}_{n\in\omega}$ направлена и удовлетворяет условию (i), для каждой функции f, такой что $\deg_T(f) \in \mathrm{I}$, найдутся n и e, для которых $f = \Phi_e^{Y_n}$. Пусть

$$B = \{c(n,k) : k \in \mathrm{Tot}^{Y_n}\}.$$

В силу условия (2.iii) имеем $B \leqslant_T A'$. Таким образом, существует такая двухместная функция $b \leqslant_T A$, что

$$\chi_B(x) = \lim_s b(x,s)$$

для всех x. Для каждой тройки n, e, s определим функцию $f_{c(n,e,s)}$. Пусть x выбрано произвольно. Найдём первое $t \geqslant s$, удовлетворяющее одному из условий:

(a) $\Phi_{g(n,e),t}^A(x)\downarrow$ и $b(g(n,e),t) = 1$;

(b) $b(g(n,e),t) = 0$.

Положим $f_{c(n,e,s)}(x) = \Phi_{g(n,e),t}^A(x)$ при выполнении для указанного t условия (a), и $f_{c(n,e,s)}(x) = x$ при выполнении для t условия (b). Если

$b(g(n,e),t) = 0$ для некоторого $t \geqslant s$, то функция $f_{c(n,e,s)}$ тождественна, начиная с некоторого аргумента. В противном случае

$$f_{c(n,e,s)} = \Phi^{A}_{g(n,e)} = \Phi^{Y_n}_{e}.$$

Следовательно, применив условие (2.i), получим равенство

$$\mathcal{F}_{\mathrm{I}} = \{f_e : e \in \omega\}. \ \square$$

§ 2. Скачки семейств перестановок

Напомним [9], что *скачком* $\mathfrak{A}'$ алгебраической системы $\mathfrak{A}$ называется её наследственно конечная надстройка $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$, обогащённая универсальным Σ-предикатом, в [10–12] можно найти эквивалентные определения скачка алгебраической системы. Покажем, что каждая степень, вычисляющая $\mathcal{P}'_{\mathrm{I}}$, вычисляет и группу $\mathfrak{G}_{\mathrm{I}}$. Более того, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Группа $\mathfrak{G}_{\mathrm{I}}$ Σ-определима как в $\mathcal{P}'_{\mathrm{I}}$, так и в $(\mathcal{P}_{\mathrm{I}} \cup \{\omega\})'$ для любого $\mathrm{I} \in \mathcal{J}(\mathrm{L}_T)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathrm{I} \in \mathcal{J}(\mathrm{L}_T)$. Рассмотрим случай семейства $\mathcal{P}_{\mathrm{I}} \cup \{\omega\}$, оставшийся случай проще. Достаточно определить коды семейства $\mathcal{P}_{\mathrm{I}}$, а также отношения равенства на множествах семейства и графика бинарной групповой операции с помощью Π_1-формул в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{P}_{\mathrm{I}} \cup \{\omega\}})$. Как и прежде, атрибуты не будут зависеть от выбора идеала I. Везде существенно используется, что все рассматриваемые функции в семействе всюду определены, функция ν кодирует выбранное семейство.

$$\begin{aligned}
[\nu(x) \in \mathcal{P}_{\mathrm{I}}] &\Leftrightarrow [\neg(0 \in \nu(x)) \vee \neg(1 \in \nu(x))],\\
[\nu(x) = \nu(y)] &\Leftrightarrow \forall n \forall k [c(n,k) \in \nu(x) \leftrightarrow c(n,k) \in \nu(y)]\\
&\Leftrightarrow \forall n \forall k [c(n,k) \in \nu(x) \rightarrow \forall l ((l \neq k) \rightarrow \neg(c(n,l) \in \nu(y)))]\\
&\quad \wedge \forall n \forall k [c(n,k) \in \nu(y) \rightarrow \forall l ((l \neq k) \rightarrow \neg(c(n,l) \in \nu(x)))],\\
[\nu(x) \circ \nu(y) = \nu(z)] &\Leftrightarrow \forall n \forall k [c(n,k) \in \nu(x) \circ \nu(y) \leftrightarrow c(n,k) \in \nu(z)]\\
&\Leftrightarrow \forall n \forall k [\exists l (c(n,l) \in \nu(y) \wedge c(l,k) \in \nu(x))\\
&\quad \rightarrow \forall l ((l \neq k) \rightarrow \neg(c(n,l) \in \nu(z)))]
\end{aligned}$$

$$\wedge \forall n \forall k[c(n,k) \in \nu(x) \to \forall l((l \neq k)$$
$$\to \forall m(\neg(c(n,m) \in \nu(y)) \vee \neg(c(m,l) \in \nu(x))))].$$

В последних двух случаях, разумеется, предполагается, что $\nu(x) \in \mathcal{P}_{\mathrm{I}}$, $\nu(y) \in \mathcal{P}_{\mathrm{I}}$ и $\nu(z) \in \mathcal{P}_{\mathrm{I}}$). Отметим, что выражения „$m \in \nu(x)$“ и „$c(n,k) \in \in \nu(x)$“ определяются Σ-формулами. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для любого счётного тьюрингова идеала* I *выполняется* $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{P}'_{\mathrm{I}}) \subseteq \mathrm{Spec}\,(\mathfrak{G}_{\mathrm{I}})$.

Перейдём к описанию спектров степеней скачков семейств $\mathcal{P}_{\mathrm{I}}$. Из [13, предл. 4] и теоремы 1 настоящей работы следует, что $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{P}'_{\mathrm{I}})$ состоит в точности из скачков степеней множеств, удовлетворяющих условиям (2.i)—(2.iii) формулировки этой теоремы. В теореме 2, см. ниже, устанавливается, что спектры скачков семейств $\mathcal{P}_{\mathrm{I}}$ имеют более простое описание. Нам понадобится следующая

ЛЕММА 1. *Пусть* $\{X_n\}_{n\in\omega}$ *— эффективная* T*-цепь и* $\bigoplus_n X''_n \leqslant_T \leqslant_T Z$. *Тогда существует множество* A *и направленная последовательность* $\{Y_n\}_{n\in\omega}$, *удовлетворяющие условиям*:

(1) $\big\langle\, \deg_T(X_n) : n \in \omega \big\rangle = \big\langle\, \deg_T(Y_n) : n \in \omega \big\rangle$;

(2) $A' \equiv_T Z$;

(3) $\bigoplus_n Y_n \leqslant_T A$;

(4) $\bigoplus_n Y''_n \leqslant_T A'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим по индукции неубывающую по включению последовательность множеств $\{A_s\}_{s\in\omega}$, затем определим $A = = \bigcup\limits_s A_s$ и

$$Y_r = \{c(x,r) \in A : x \in \omega\}$$

для всех r.

Пусть $A_0 = \varnothing$. Предположим, что A_s определено, а множество

$$\{k : \exists x\,[c(x,k) \in A_s]\}$$

конечно. Выберем наименьшее $r_0 = r_0(s)$, для которого

$$A_s \subseteq \{c(x,k) : k < r_0, x \in \omega\}.$$

Пусть сначала $s = 2n$ для некоторого n. Если существует конечное множество F, удовлетворяющее условиям

$$F \subseteq \{c(x,k) : r_0 \leqslant k\} \text{ и } \Phi_n^{A_s \cup F}(n)\downarrow, \tag{1}$$

то выберем наибольшее r_1, такое что $c(x,r_1) \in F$ для некоторого x (полагаем $r_1 = -1$, если $F = \varnothing$), и определим

$$r = \max\{r_0, r_1+1, \mathrm{use}\,(A_s \cup F; n, n)\},$$

где $\mathrm{use}\,(A_s \cup F; n, n)$ — значение use-функции вычисления $\Phi_n^{A_s \cup F}(n)$,

$$A_{s+1} = A_s \cup F \cup \{c(x,r) : x \in X_n\}.$$

Если не существует конечного множества, удовлетворяющего условию (1), то полагаем

$$A_{s+1} = A_s \cup \{c(x,r_0) : x \in X_n\}.$$

Если $s = 2n+1$, то полагаем

$$A_{s+1} = A_s \cup \{c(\chi_Z(n), r_0)\}.$$

Таким образом, A_{s+1} удовлетворяет индукционному предположению.

(1) Нетрудно видеть, что для каждого n найдётся такое r, что $X_n = Y_r$, и для каждого r либо $Y_r = X_n$ для подходящего n, либо Y_r конечно.

(2) На шагах вида $2n$ построения, с учётом того, что последовательность $\{X_m\}_{m\in\omega}$ образует эффективную T-цепь, используется оракул X'_n, а на нечётных — оракул Z. Поскольку $\bigoplus_m X'_m \leqslant_T Z$, получаем, что $A' \leqslant_T Z$. Обратно, для каждого n, используя оракул A', можно равномерно вычислить множество A_{2n+1}. Следовательно,

$$\chi_Z(n) = y,$$

где y — такое единственное число, что $c(y, r_0(2n+1)) \in A_{2n+1}$. Стало быть, $Z \leqslant_T A'$.

(3) Справедливость условия очевидна.

(4) Заметим, что для каждого n выполняются равенства

$$Y_n = \{c(x,n) \in A : x \in \omega\} = \{c(x,n) \in A_{2n+2} : x \in \omega\}.$$

Таким образом, используя оракул $A' \equiv_T Z$, можно определить канонический индекс Y_n, если это множество конечно, и такое число k, что

$$Y_n = \{c(x,n) : x \in X_k\},$$

если Y_n бесконечно. В каждом из этих двух случаев получаем равномерную по n сводимость $Y_n'' \leqslant_T A'$. $\square$

Теперь описание спектров степеней скачков семейств перестановок $\mathcal{P}_{\mathrm{I}}$ даёт следующая

ТЕОРЕМА 2. *Для любого счётного тьюрингова идеала* I *скачок* $\mathcal{P}_{\mathrm{I}}'$ *будет* Z*-вычислимым тогда и только тогда, когда существует эффективная* T*-цепь* $\{Y_n\}_{n\in\omega}$*, удовлетворяющая условиям*:

(1) $\mathrm{I} = \left\langle \deg_T(Y_n) : n \in \omega \right\rangle$;

(2) $\bigoplus_n Y_n'' \leqslant_T Z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{P}_{\mathrm{I}}'$ является Z-вычислимым. Тогда существует такое A, что семейство $\mathcal{P}_{\mathrm{I}}$ будет A-вычислимым и $A' \leqslant_T Z$. Применяя теорему 1, получаем существование эффективной T-цепи $\{Y_n\}_{n\in\omega}$, удовлетворяющей условиям (1) и (2).

Обратно, пусть эффективная T-цепь $\{Y_n\}_{n\in\omega}$ и множество Z удовлетворяют условиям (1) и (2). Применяя лемму 1 и теорему 1, получаем существование такого множества A, что семейство $\mathcal{P}_{\mathrm{I}}$ является A-вычислимым и $A' \equiv_T Z$. Стало быть, $\mathcal{P}_{\mathrm{I}}'$ будет Z-вычислимым. $\square$

§ 3. Идеалы, порождённые в. п. степенями

Пусть I — идеал, порождённый в. п. степенями, и $S(\mathrm{I}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{e : \deg_T(W_e) \in \mathrm{I}\}$.

ТЕОРЕМА 3. (1) *Если* $S(\mathrm{I}) \in \Sigma_3^0$ *и* $S(\mathrm{I}) \neq \omega$*, то* $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{P}_{\mathrm{I}}) = \{\mathbf{a} : \mathbf{0}'' \leqslant \mathbf{a}'\}$.

(2) *Если* $S(\mathrm{I})$ *является* Σ_{n+4}^0*-полным, то* $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{P}_{\mathrm{I}}) = \{\mathbf{a} : \mathbf{0}^{(n+3)} \leqslant \mathbf{a}'\}$.

(3) *Если* $S(\mathrm{I})$ *является* Π_{n+3}^0*-полным, то* $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{P}_{\mathrm{I}}) = \{\mathbf{a} : \mathbf{0}^{(n+3)} \leqslant \mathbf{a}'\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что при $S(\mathrm{I}) \in \Sigma^0_3$ и $S(\mathrm{I}) \neq \omega$ скачок $\mathcal{P}'_{\mathrm{I}}$ имеет степень $\mathbf{0}''$, и $\mathbf{0}^{(n+3)}$ в случае, если либо $S(\mathrm{I})$ является Σ^0_{n+4}-полным, либо Π^0_{n+3}-полным.

(1) Покажем, что $\mathbf{0}'' \in \mathrm{Spec}\,(\mathcal{P}'_{\mathrm{I}})$. Поскольку $S(\mathrm{I}) \in \Sigma^0_3$, выберем функцию $f \leqslant_T \varnothing''$, для которой $S(\mathrm{I}) = \mathrm{rng}\, f$. Для каждого $n \in \omega$ положим

$$X_n = \bigoplus_{i \leqslant n} W_{f(i)}.$$

Нетрудно видеть, что последовательность $\{X_n\}_{n\in\omega}$ образует эффективную T-цепь и

$$\mathrm{I} = \left\langle \deg_T(X_n) : n \in \omega \right\rangle.$$

Осталось показать, что $\bigoplus_n X''_n \leqslant_T \varnothing''$. Ввиду того, что $S(\mathrm{I}) \in \Sigma^0_3$ и $S(\mathrm{I}) \neq \omega$, по [17, теор. 4.4] существует 2-низкая степень $\mathbf{a} = \deg_T(A)$, ограничивающая I сверху. Отсюда, используя оракул A'', равномерно по каждому n можно найти такое e, что Φ^A_e всюду определена и $X_n = \Phi^A_e$. Следовательно,

$$\bigoplus_{n\in\omega} X''_n \leqslant_T A'' \leqslant_T \varnothing''.$$

(2) Сначала покажем, что $\mathbf{0}^{(n+3)} \in \mathrm{Spec}\,(\mathcal{P}'_{\mathrm{I}})$. Возьмём функцию $f \leqslant_T \varnothing^{(n+3)}$, для которой $S(\mathrm{I}) = \mathrm{rng}\, f$. Определим эффективную T-цепь $\{X_n\}_{n\in\omega}$, положив для каждого $n \in \omega$

$$X_n = \bigoplus_{i \leqslant n} W_{f(i)}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{I} = \left\langle \deg_T(X_n) : n \in \omega \right\rangle \text{ и } \bigoplus_{n\in\omega} X''_n \leqslant_T \varnothing^{(n+3)}.$$

Отсюда $\mathbf{0}^{(n+3)} \in \mathrm{Spec}\,(\mathcal{P}'_{\mathrm{I}})$.

Пусть теперь $Z \in \mathrm{Spec}\,(\mathcal{P}'_{\mathrm{I}})$. Выберем направленную последовательность $\{X_n\}_{n\in\omega}$, такую что $\mathrm{I} = \left\langle \deg_T(X_n) : n \in \omega \right\rangle$ и $\bigoplus_n X''_n \leqslant_T Z$. Для каждого e имеем

$$e \in S(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \exists n\, [W_e \leqslant_T X_n] \Leftrightarrow \exists n\, \Pi^0_2(X_n) \Leftrightarrow \exists n\, \Delta^0_1(X''_n).$$

Отсюда, $S(\mathrm{I}) \equiv \varnothing^{(n+4)}$ в. п. относительно Z. Следовательно, $\varnothing^{(n+3)} \leqslant_T Z$.

(3) Поскольку $S(\mathrm{I}) \in \Pi^0_{n+3} \subseteq \Sigma^0_{n+4}$, так же, как и при доказательстве п. (2), имеем $\mathbf{0}^{(n+3)} \in \mathrm{Spec}\,(\mathcal{P}'_{\mathrm{I}})$.

Если $Z \in \mathrm{Spec}\,(\mathcal{P}'_{\mathrm{I}})$, то, опять следуя рассуждениям из п. (2), получаем $S(\mathrm{I}) \equiv \overline{\varnothing^{(n+3)}}$ в. п. относительно Z. Определим вычислимую функцию f, положив для всех x, y, s

$$\Phi^{\varnothing^{(n+2)}}_{f(x,s)}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Phi^{\varnothing^{(n+2)}}_{x,s}(x)\uparrow; \\ \text{не определено}, & \text{если } \Phi^{\varnothing^{(n+2)}}_{x,s}(x)\downarrow. \end{cases}$$

Для каждого x имеем

$$x \in \varnothing^{(n+3)} \Leftrightarrow \Phi^{\varnothing^{(n+2)}}_{x}(x)\downarrow \Leftrightarrow \exists s\,[\Phi^{\varnothing^{(n+2)}}_{f(x,s)}(f(x,s))\uparrow] \Leftrightarrow \exists s\,[f(x,s) \notin \varnothing^{(n+3)}].$$

Отсюда, $\varnothing^{(n+3)}$ также в. п. относительно Z. Следовательно, $\varnothing^{(n+3)} \leqslant_T Z$. □

Пусть I_K и I_{SSL} — идеалы K-тривиальных и строго супернизких степеней [18] соответственно. Пусть I_M — идеал, порождённый дополняемыми вниз в. п. степенями [2, гл. XIII § 3].

СЛЕДСТВИЕ 3. *Скачок $\mathcal{P}'_{\mathrm{I}_K}$ имеет степень $\mathbf{0}''$. Скачки $\mathcal{P}'_{\mathrm{I}_{SSL}}$ и $\mathcal{P}'_{\mathrm{I}_M}$ имеют степень $\mathbf{0}^{(4)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идеал I_K порождается K-тривиальными в. п. степенями и $S(I_K) \in \Sigma^0_3$, [18, 19], поэтому $\mathcal{P}'_{\mathrm{I}_K}$ имеет степень $\mathbf{0}''$. Так как $S(\mathrm{I}_{SSL})$ является Π^0_4-полным [20] и идеал I_{SSL} порождается строго супернизкими в. п. степенями [21], получаем, что $\mathcal{P}'_{I_{SSL}}$ имеет степень $\mathbf{0}^{(4)}$. Наконец, поскольку $S(\mathrm{I}_M)$ также Π^0_4-полно [22], $\mathcal{P}'_{\mathrm{I}_M}$ имеет степень $\mathbf{0}^{(4)}$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *C. G. Jockusch, jun.*, Degrees in which the recursive sets are uniformly recursive, Can. J. Math., **24**, No. 6 (1972), 1092—1099.
2. *R. I. Soare*, Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets (Perspect. Math. Log., Omega Series),

Berlin etc., Springer-Verlag, 1987 (имеется русский перевод: *Р. И. Соар*, Вычислимо перечислимые множества и степени. Изучение вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств, Казань, Казанское матем. об-во, 2000).

3. *А. С. Морозов*, Перестановки и неявная определимость, Алгебра и логика, **27**, № 1 (1988), 19—36.
4. *И. Ш. Калимуллин, В. Г. Пузаренко*, О сводимости на семействах, Алгебра и логика, **48**, № 1 (2009), 31—53.
5. *В. А. Руднев*, О существовании неотделимой пары в рекурсивной теории допустимых множеств, Алгебра и логика, **27**, N 1 (1988), 48—56.
6. *А. С. Морозов, В. Г. Пузаренко*, О Σ-подмножествах натуральных чисел, Алгебра и логика, **43**, № 3 (2004), 291—320.
7. *A. Montalbán*, Computable structure theory. Within the arithmetic (Perspect. Log.), Cambridge, Cambridge Univ. Press; Urbana, IL, Assoc. Symb. Log. (ASL), 2021.
8. *L. J. Richter*, Degrees of structures, J. Symb. Log., **46**, No. 4 (1981), 723—731.
9. *В. Г. Пузаренко*, Об одной сводимости на допустимых множествах, Сиб. матем. ж., **50**, № 2 (2009), 415—429.
10. *V. Baleva*, The jump operation for structure degrees, Arch. Math. Logic, **45**, No. 3 (2006), 249—265.
11. *A. Montalbán*, Notes on the jump of a structure, in: K. Ambos-Spies (ed.) et al., Mathematical theory and computational practice. 5th conf. on computability in Europe (CiE 2009, Heidelberg, Germany, July 19–24, 2009), Proc. (Lect. Notes Comput. Sci., **5635**), Berlin, Springer-Verlag, 2009, 372—378.
12. *A. A. Soskova, I. N. Soskov*, A jump inversion theorem for the degree spectra, J. Log. Comput., **19**, No. 1 (2009), 199—215.
13. *В. Г. Пузаренко*, Неподвижные точки оператора скачка, Алгебра и логика, **50**, № 5 (2011), 615—646.
14. *Ю. Л. Ершов*, Определимость и вычислимость (Сибирская школа алгебры и логики), Новосибирск, Науч. кн., М., Экономика, 2-е изд., испр. и доп., 2000.
15. *J. Barwise*, Admissible sets and structures. An approach to definability theory (Perspec. Math. Log.), Reprint of the 1975 original published by Springer,

Cambridge, Cambridge Univ. Press; Urbana, IL, Assoc. Symb. Log. (ASL), 2016.

16. *Yu. L. Ershov, V. G. Puzarenko, A. I. Stukachev*, $\mathbb{HF}$-Computability, in: S. B. Cooper (ed.), Computability in context. Computation and logic in the real world, London, World Scientific, 2011, 173—248.
17. *G. Barmpalias, A. Nies*, Upper bounds on ideals in the computably enumerable Turing degrees, Ann. Pure Appl. Logic, **162**, No. 6 (2011), 465—473.
18. *A. Nies*, Computability and randomness, (Oxf. Logic Guides, **51**), Oxford, Oxford Univ. Press, 2009.
19. *A. Nies*, Lowness properties and randomness, Adv. Math., **197**, No. 1 (2005), 274—305.
20. *K. M. Ng*, On strongly jump traceable reals, Ann. Pure App. Logic, **154**, No. 1 (2008), 51—69.
21. *D. Diamondstone, N. Greenberg, D. Turetsky*, Inherent enumerability of strong jump-traceability, Trans. Am. Math. Soc., **367**, No. 3 (2015), 1771—1796.
22. *S. Schwarz*, Index sets related to prompt simplicity, Ann. Pure App. Logic, **42**, No. 3 (1989), 243—254.

Поступило 19 апреля 2022 г.

Окончательный вариант 13 октября 2023 г.

Адреса авторов:

МОРОЗОВ Андрей Сергеевич,
Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский гос. ун-т,
г. Новосибирск, РОССИЯ. e-mail: morozov@math.nsc.ru

ПУЗАРЕНКО Вадим Григорьевич,
Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский гос. ун-т,
г. Новосибирск, РОССИЯ. e-mail: vagrig@math.nsc.ru

ФАЙЗРАХМАНОВ Марат Хайдарович,
Казанский (Приволжский) федерал. ун-т,
Науч.-обр. матем. центр ПФО,
г. Казань, РОССИЯ. e-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com