



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

F. Götze, M. I. Gordin, A. Levina, Limit correlation functions at zero for fixed trace random matrix ensembles, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2007, Volume 341, 68–80

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.170

January 13, 2025, 23:35:17



Ф. Гётце¹, М. И. Гордин^{1,2}, А. Левина³

**ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ В НУЛЕ
КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ
МАТРИЦ С ФИКСИРОВАННЫМ СЛЕДОМ**

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть \mathcal{H}_N – множество всех (комплексных) эрмитовых матриц размера $N \times N$. \mathcal{H}_N – вещественное гильбертово пространство размерности N^2 относительно скалярного произведения $(A, B) \mapsto \operatorname{tr} AB$. Здесь $\operatorname{tr} A$ обозначает след квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$, так что $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^N a_{ii}$. Структура гильбертова пространства определяет нормализованную меру Лебега l_N на \mathcal{H}_N , удовлетворяющую соотношению $l_N(Q) = 1$ для произвольного куба $Q \subset \mathcal{H}_N$ с ребрами длины 1. По определению, стандартная гауссовская вероятностная мера μ_N на \mathcal{H}_N задается своей плотностью

$$g_N(A) = \frac{1}{(2\pi)^{N^2/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{tr} A^2\right) \quad (1.1)$$

относительно меры l_N . Множество \mathcal{H}_N , снабженное мерой μ_N , известно как гауссовский унитарный ансамбль (GUE).

Пусть X – эрмитова случайная матрица размера $N \times N$ (т.е. случайная величина, принимающая значения в \mathcal{H}_N). Мы рассматриваем собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ случайной матрицы X как перестановочные случайные величины, совместное распределение P_N^X которых является вероятностной мерой на \mathbb{R}^N , инвариантной относительно всех перестановок координатных осей. Для

¹Работа частично поддерживалась SFB 701 Spektrale Strukturen und Topologische Methoden in der Mathematik (Билефельдский университет).

²Работа частично поддерживалась грантами РФФИ 04-01-04000, РФФИ-ННАО 05-01-00911 и НШ 4222.2006.1.

³Работа поддерживалась докторантской программой Identification in Mathematical Models (Институт динамики и самоорганизации им. Макса Планка, Гёттинген).

любого $n, 1 \leq n \leq N$, обозначим через $P_{n,N}^X$ проекцию меры P_N^X в \mathbb{R}^n , индуцированную ортогональной проекцией пространства \mathbb{R}^N на его подпространство, натянутое на какие-то n координатных осей \mathbb{R}^N . Вероятностная мера $P_{n,N}^X$ на \mathbb{R}^n также инвариантна относительно перестановок координатных осей и представляет собой совместное распределение n собственных чисел, произвольным образом выбранных из всех N собственных чисел матрицы X . В частности, мера $P_{1,N}^X$ описывает распределение отдельного собственного значения. По определению, n -точечная корреляционная мера $\rho_{n,N}^X$ случайной матрицы X – это ненормированная конечная мера, определенная соотношением

$$\rho_{n,N}^X = \frac{N!}{(N-n)!} P_{n,N}^X. \quad (1.2)$$

Если мера $\rho_{n,N}^X$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на \mathbb{R}^n , то ее производная Радона–Никодима $R_{n,N}^X$ называется n -точечной корреляционной функцией случайной матрицы X . В частности, мера $\rho_{1,N}^X$ имеет общую массу N . Для произвольного измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^1$ величина $\rho_{1,N}^X(E)$ равна ожидаемому числу собственных чисел, принадлежащих E . Соответствующая плотность $R_{n,N}^X$, (если она существует) относительно меры Лебега в \mathbb{R}^1 называется *плотностью собственных чисел* или *плотностью состояний* (иногда эти названия применяются к *нормированной* плотности собственных чисел, интеграл которой по всей прямой равен 1).

Пусть теперь X_N – случайная $N \times N$ матрица с распределением из GUE. Классический результат для GUE (справедливый также для многих других ансамблей) гласит, что для $Y_N = \frac{1}{\sqrt{N}} X_N$ верно соотношение

$$P_{1,N}^{Y_N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} W, \quad (1.3)$$

где сходимость мер слабая, а W – стандартная мера Вигнера на $[-2, 2]$, определяемая плотностью

$$w(x) = (2\pi)^{-1} \sqrt{(4-x^2)_+}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

В терминах корреляционных мер можно написать эквивалентное соотношение

$$\frac{1}{N} \rho_{1,N}^{Y_N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} W. \quad (1.5)$$

Для n -точечных корреляционных мер имеет место аналогичное соотношение

$$\frac{1}{N^n} \rho_{n,N}^{Y_N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} W \times_n \dots \times W, \quad (1.6)$$

означающее, что собственные числа становятся независимыми в пределе. Однако исследование при $n \geq 2$ более тонкой асимптотики около произвольной точки диагонали куба $(-2, 2)^n$ показывает, что здесь зависимость принимает в пределе своеобразную форму, известную как *детерминантный точечный процесс* [8]. Заметим, что для корреляционной функции случайной матрицы с GUE-распределением известна точная формула детерминантного типа, справедливая при любом $n \leq N$. Эта формула вместе с классическими результатами об асимптотических свойствах функций Эрмита дает возможность определить предельное поведение n -точечной корреляционной функции в соответствующим образом сжимающейся окрестности точки вида $(u, \dots, u) \in (-2, 2)^n$. Имеет место следующий результат о поведении $R_{n,N}^{Y_N}$ ([5, 4]): для всех $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^1$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(Nw(u))^n} R_{n,N}^{Y_N} \left(u + \frac{t_1}{Nw(u)}, \dots, u + \frac{t_n}{Nw(u)} \right) \\ = \det \left(\frac{\sin \pi(t_i - t_j)}{\pi(t_i - t_j)} \right)_{i,j=1}^n. \end{aligned}$$

Отметим, что правая часть последнего равенства представляет собой пример корреляционной функции детерминантного (или фермионного) точечного процесса [8], определенного в данном специальном случае синус-ядром $(t_1, t_2) \mapsto (\sin \pi(t_1 - t_2)) / (\pi(t_1 - t_2))$. В настоящей работе мы исследуем один недетерминантный ансамбль случайных эрмитовых матриц. Пусть

$$S_N^r = \{A \in \mathcal{H}_N : \text{tr } A^2 = r^2\} \quad (1.8)$$

– сфера радиуса $r > 0$ с центром в 0 в \mathcal{H}_N . На сфере S_N^r существует единственная вероятностная мера ν_N^r , инвариантная относительно всех ортогональных линейных преобразований пространства \mathcal{H}_N . Будем называть эту меру ансамблем с фиксированной нормой Гильберта–Шмидта (она также известна как ансамбль с фиксированным следом). Согласно хорошо известному результату [7, 5], для случайной матрицы $(Z_N)_{(N \geq 1)}$, распределенной в

соответствии с $\nu_N^{\sqrt{N}}$, справедливо соотношение

$$\frac{1}{N} \rho_{1,N}^{Z_N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} W. \quad (1.9)$$

Мы покажем, что при $u = 0$ корреляционные функции $R_{n,N}^{Z_N}$ имеют тот же детерминантный предел, порождаемый ядром $(t_i, t_j) \mapsto \sin \pi(t_i - t_j) / \pi(t_i - t_j)$, что и корреляционные функции GUE. Этот результат можно рассматривать как пример феномена концентрации меры (близкие явления известны физикам [5] как эквивалентность различных типов канонических ансамблей Гиббса). Однако, чтобы вывести (1.7) для произвольной точки $u \in (-2, 2)$ из соображений концентрации, нужно их существенно уточнить, придав им локальную форму и доказав результат типа тауберовой теоремы. При этом приходится использовать сведения об асимптотическом поведении воспроизводящих ядер, связанных с функциями Эрмита, в различных областях комплексной плоскости. Такое доказательство является предметом работы [3] двух первых авторов настоящей заметки (см. также [2], где близкая схема применена для доказательства, осуществленного на физическом уровне строгости). Довольно любопытно, что метод, использованный в [3], применим ко всем $u \in (-2, 2)$, кроме нуля, в то время как при $u = 0$ применим гораздо более элементарный метод (дающий более слабое заключение, обсуждаемое ниже). Именно этот элементарный случай и является предметом данной работы.

Асимптотическое поведение в стягивающихся окрестностях нуля, определяемое синус-ядром, мы устанавливаем в настоящей заметке, комбинируя идею концентрации в форме хорошо известных оценок для вероятностей больших отклонений с применением масштабных преобразований. Заметим, что мы имеем здесь дело с последовательностью конечных мер, общая масса которых стремится к бесконечности. Эти меры сходятся к локально конечной мере на \mathbb{R}^n . В работе [3] для всех $u \in (-2, 2)$, $u \neq 0$, доказывается равномерная сходимость плотностей таких мер на компактных подмножествах \mathbb{R}^n . В настоящей работе мы имеем дело со значительно более слабой топологией, базис которой определяется интегралами от непрерывных функций с компактными носителями. Мы предполагаем, что и в окрестности нуля имеет место равномерная сходимость плотностей, а затруднения в

установлении этого факта связаны с применяемыми методами. В то же время в литературе имеются результаты, указывающие на то, что именно около нуля спектр более доступен для изучения. Отсюда ясно, что проблема требует дальнейшего исследования.

Итак, мы доказываем в настоящей работе следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}$ – n -точечная корреляционная мера собственных чисел случайной матрицы, равномерно распределенной на сфере $S_N^{\sqrt{N}}$. Тогда для произвольной определенной на \mathbb{R}^n непрерывной функции f с компактным носителем мы имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi) \rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, \dots, t_n) \det \left(\frac{\sin \pi(t_i - t_j)}{\pi(t_i - t_j)} \right)_{i,j=1}^n dt_1 \cdots dt_n. \end{aligned}$$

Замечание 1. Соотношение (1.10) является специализацией для случая $u = 0$ более общего соотношения

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(Nw(u)(t_1 - u), \dots, Nw(u)(t_n - u)) \rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, \dots, t_n) \det \left(\frac{\sin \pi(t_i - t_j)}{\pi(t_i - t_j)} \right)_{i,j=1}^n dt_1 \cdots dt_n, \end{aligned}$$

которое имеет место для всех $u \in (-2, 2)$. Это последнее заключение следует из результатов, содержащихся в настоящей работе и в [3]. Для совершенно иного класса недетерминантных матричных ансамблей подобный результат установлен в [4].

Замечание 2. Отметим, что корреляционная мера $\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, если $n < N$ (это следует из явной формулы для $\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}$: см., например, [1]). Обозначим через $R_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}$ соответствующую корреляционную функцию. Соотношение (1.10) может быть переписано в терминах $R_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}$

и после замены переменных интегрирования принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} & (\pi/N)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, \dots, t_n) R_{n,N}^{\nu, \sqrt{N}}(\pi t_1/N, \dots, \pi t_n/N) dt_1, \dots, dt_n \\ & \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, \dots, t_n) \det \left(\frac{\sin \pi(t_i - t_j)}{\pi(t_i - t_j)} \right)_{i,j=1}^n dt_1 \cdots dt_n. \end{aligned}$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Пусть X_N обозначает, как и выше, случайную матрицу со стандартным гауссовским вероятностным распределением μ_N (GUE) на \mathcal{H}_N . Положим $T_N = \text{tr} X_N^2$ и обозначим через $\alpha_N(\cdot)$ плотность распределения величины T_N . Стандартная гауссовская мера μ_N на \mathcal{H}_N допускает интегральное представление

$$\mu_N = \int_0^\infty \nu_N^{\sqrt{s}} \alpha_N(s) ds, \quad (2.1)$$

где для любого $r > 0$ ν_N^r это (единственная) ортогонально инвариантная вероятностная мера на сфере S_N^r , а $\alpha_N(\cdot)$ – плотность, определенная выше. Случайная величина T_N может быть представлена как сумма N^2 независимых стандартных гауссовских случайных величин. Таким образом, T_N имеет известное χ_k^2 -распределение с $k = N^2$. Заметим, что

$$ET_N = N^2, \quad DT_N^2 = E(T_N - ET_N)^2 = 3N^2.$$

Лемма 1. Пусть ξ – стандартная гауссовская случайная величина, $q \in [0, 1)$ – вещественное число. Тогда для любого вещественного $t \in [-q/2, q/2]$

$$E \exp(t(\xi^2 - 1)) \leq \exp\left(\frac{1}{2} \frac{2}{1-q} t^2\right). \quad (2.2)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что для любого вещественного $t < 1/2$

$$E \exp(t\xi^2) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}. \quad (2.3)$$

Имеем

$$\log E \exp(t(\xi^2 - 1)) = -t - \frac{1}{2} \log(1 - 2t). \quad (2.4)$$

Предполагая, что $t \in [0, q/2]$, получаем

$$\frac{d}{dt} \left(-t - \frac{1}{2} \log(1 - 2t) \right) = -1 - \frac{-2}{2(1 - 2t)} = \frac{2t}{1 - 2t} \leq \frac{2t}{1 - q},$$

откуда при $t \in [0, q/2]$ вытекает оценка

$$-t - \frac{1}{2} \log(1 - 2t) \leq \frac{t^2}{1 - q}.$$

Комбинируя это неравенство с (2.4), мы заключаем, что

$$E \exp(t(\xi^2 - 1)) \leq \exp\left(\frac{1}{2} \frac{2}{1 - q} t^2\right) \quad (2.5)$$

для $t \in [0, q/2]$.

Аналогично, рассматривая $t = -u$ для $u \in [-q/2, 0]$, получаем

$$\begin{aligned} \log E \exp(u(\xi^2 - 1)) &= \log E \exp(t(1 - \xi^2)) \\ &= t - \frac{1}{2} \log(1 + 2t) \leq t^2 < \frac{t^2}{1 - q}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство. \square

В дальнейшем нам потребуется один результат В. В. Петрова (часть Теоремы 15 главы 5 в [6]), усиливающий неравенство С. Н. Бернштейна.

Лемма 2. Пусть для независимых случайных величин η_1, \dots, η_m существуют такие положительные константы g_1, \dots, g_m, T , что

$$E \exp t(\eta_k) \leq \exp\left(\frac{1}{2} g_k t^2\right) \quad (k = 1, \dots, m)$$

для $0 \leq t \leq T$. Положим $S = \sum_{k=1}^m \eta_k$ и $G = \sum_{k=1}^m g_k$. Тогда

$$P(S \geq x) \leq \exp(-x^2/(2G))$$

при $0 \leq x \leq GT$.

Лемма 3. Для любого $y > 0$ верно неравенство

$$P(|T_N^{1/2}/N - 1| > y) \leq 2 \exp\left(-\frac{N^2 y^2}{4(1+y)}\right). \quad (2.6)$$

Доказательство. Пусть $q \in [0, 1)$ – число, значение которого будет определено позже. Применим Лемму 2 к набору случайных величин $(\eta_k = \xi_k^2 - 1)_{k=1, \dots, N^2}$, где $(\xi_k)_{k=1, \dots, N^2}$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины. Для этого положим $m = N^2$, $S = T_N$ и $T = q/2$. Пусть $y \in [0, q/(1-q)]$ – вещественное число. По Лемме 1 мы можем положить $g_k = 2/(1-q)$ при $k = 1, \dots, N^2$. Тогда $G = 2N^2/(1-q)$. Наконец, положим $x = N^2 y$ и заметим, что

$$x \leq N^2 q/(1-q) = (2N^2/(1-q))(q/2) = GT.$$

Теперь по Лемме 2 получим

$$P(T_N - N^2 > N^2 y) \leq \exp(-N^2 y^2 (1-q)/4)$$

и

$$P(T_N - N^2 < -N^2 y) \leq \exp(-N^2 y^2 (1-q)/4).$$

Таким образом, мы установили следующее неравенство

$$P\left(\left|\frac{T_N}{N^2} - 1\right| > y\right) \leq 2 \exp(-N^2 y^2 (1-q)/4). \quad (2.7)$$

Далее, выбирая в (2.7) $q = y/(1+y)$, мы видим, что

$$P(|T_N/N^2 - 1| > y) \leq 2 \exp\left(-\frac{N^2 y^2}{4(1+y)}\right)$$

или

$$\begin{aligned} P(\{T_N^{1/2}/N < \sqrt{(1-y)_+}\} \cup \{T_N^{1/2}/N > \sqrt{1+y}\}) \\ \leq 2 \exp\left(-\frac{N^2 y^2}{4(1+y)}\right). \end{aligned}$$

Утверждение Леммы вытекает теперь из соотношений

$$\begin{aligned} & P(|T_N^{1/2}/N - 1| > y) \\ &= P(\{T_N^{1/2}/N < (1-y)_+\} \cup \{T_N^{1/2}/N > 1+y\}) \end{aligned}$$

$$\leq P(\{T_N^{1/2}/N < \sqrt{(1-y)_+}\} \cup \{T_N^{1/2}/N > \sqrt{1+y}\}). \quad \square$$

Доказательство теоремы. Докажем утверждение (1.10). Напомним, что μ_N – это распределение случайной $N \times N$ -матрицы X_N из GUE. Далее, пусть $X_N^\sigma = \sigma X_N$ – кратное X_N и пусть μ_N^σ – соответствующее распределение (так что $X_N = X_N^1$ и $\mu_N = \mu_N^1$). Обозначим через $\rho_{n,N}^{\mu,\sigma}$ и $\rho_{n,N}^{\nu,r}$ корреляционные меры распределений собственных чисел, соответствующих мерам μ_N^σ и ν_N^r на \mathcal{H}_N . Случайная матрица $X_N^{1/\sqrt{N}}$ распределена в соответствии с мерой $\mu_N^{1/\sqrt{N}}$, которая дезинтегрируется в виде

$$\mu_N^{1/\sqrt{N}} = E \nu_N^{\sqrt{T_N/N}}. \quad (2.8)$$

Соотношение (2.8) влечет аналогичное соотношение для корреляционных мер

$$\rho_{n,N}^{\mu,1/\sqrt{N}} = E \rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{T_N/N}}. \quad (2.9)$$

Пусть f – непрерывная вещественная функция на \mathbb{R}^n с компактным носителем, содержащимся в шаре B_R радиуса R с центром в 0, и пусть $M = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$. Зафиксируем $\epsilon > 0$. Поскольку

функция f равномерно непрерывна, найдется такое $\delta' > 0$, что $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ при $|x - y| < \delta'$ (здесь $|\cdot|$ обозначает евклидову норму). Положим $\delta = \min(\delta'/(3R), 1/2)$ и пусть $\chi_{\delta,N}^{(1)}$ и $\chi_{\delta,N}^{(2)}$ – индикаторы событий $\{|\sqrt{T_N}/N - 1| > \delta\}$ и $\{|\sqrt{T_N}/N - 1| \leq \delta\}$, соответственно. Учитывая, что

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi) \rho_{n,N}^{\mu,1/\sqrt{N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n) \\ &= E \int_{\mathbb{R}^n} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi) \rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{T_N/N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n), \end{aligned}$$

мы можем написать

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi) \rho_{n,N}^{\mu,1/\sqrt{N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n) \\ &= I_{1,N}^f(\delta) + I_{2,N}^f(\delta), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$I_{1,N}^f(\delta) = E \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\delta,N}^{(1)} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi) \rho_{n,N}^{\nu, \sqrt{T_N/N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n) \quad (2.11)$$

и

$$I_{2,N}^f(\delta) = E \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\delta,N}^{(2)} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi) \rho_{n,N}^{\nu, \sqrt{T_N/N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n). \quad (2.12)$$

С учетом Леммы 3 для интеграла $I_{1,N}^f(\delta)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} I_{1,N}^f(\delta) &\leq M \frac{N!}{(N-n)!} P\{|\sqrt{T_N}/N - 1| > \delta\} \\ &\leq 2M \frac{N!}{(N-n)!} \exp\left(-\frac{N^2 \delta^2}{4(1+\delta)}\right), \end{aligned}$$

откуда

$$I_{1,N}^f(\delta) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (2.13)$$

Из соотношений (2.10), (2.13) и известного результата для GUE (содержащегося, например, в [4]) следует, что

$$I_{2,N}^f(\delta) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, \dots, t_n) \det\left(\frac{\sin \pi(t_i - t_j)}{\pi(t_i - t_j)}\right)_{i,j=1}^n dt_1 \cdots dt_n. \quad (2.14)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} I_{2,N}^f(\delta) &= E \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\delta,N}^{(2)} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi) \rho_{n,N}^{\nu, \sqrt{T_N/N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n) \\ &= P\{|\sqrt{T_N}/N - 1| \leq \delta\} \int_{\mathbb{R}^n} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi) \rho_{n,N}^{\nu, \sqrt{N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n) \\ &\quad + E \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\delta,N}^{(2)} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi) \rho_{n,N}^{\nu, \sqrt{T_N/N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n) \right. \\ &\quad \left. - \chi_{\delta,N}^{(2)} \int_{\mathbb{R}^n} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi) \rho_{n,N}^{\nu, \sqrt{N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n) \right), \end{aligned}$$

где $P(|\sqrt{T_N}/N - 1| \leq \delta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ по Лемме 3. Сравнивая полученные выражения с (2.14), мы видим, что заключение Теоремы справедливо, если имеет место соотношение

$$\limlimsup_{\delta \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \left| E \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\delta, N}^{(2)} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi) \rho_{n, N}^{\nu, \sqrt{T_N/N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n) - \chi_{\delta, N}^{(2)} \int_{\mathbb{R}^n} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi) \rho_{n, N}^{\nu, \sqrt{N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n) \right) \right| = 0.$$

Для проверки этого соотношения (и, следовательно, для завершения доказательства Теоремы) нам понадобится еще одна лемма. Напомним, что B_R – это шар в \mathbb{R}^n радиуса R с центром в нуле.

Лемма 4. *Для любого $R > 0$ последовательность*

$$(\rho_{n, N}^{\nu, \sqrt{N}}(B_{R/N}))_{N=1, 2, \dots}$$

ограничена.

Доказательство. Пусть $\delta \in (0, 1)$ – вещественное число и пусть γ – гладкая убывающая функция на $[0, \infty)$, такая что $\gamma(v) = 1$ при $v \in [0, R)$ и $\gamma(v) = 0$ при $v \geq (1 + \delta)R$. Положим $\varphi(x) = \gamma(|x|)$ для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Из (2.14) и определения $I_{2, N}^f(\delta)$ следует, что для любых $\delta \in (0, 1)$ и $k > 0$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} E \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\delta, N}^{(2)} \varphi(kNt_1, \dots, kNt_n) \rho_{n, N}^{\nu, \sqrt{T_N/N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n) < \infty \quad (2.16)$$

Теперь, используя тот факт, что функция $\alpha \mapsto \varphi(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ убывает для любого $\alpha > 0$, мы получаем, что

$$\begin{aligned} \rho_{n, N}^{\nu, \sqrt{N}}(B_{R/N}) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(Nt_1, \dots, Nt_n) \rho_{n, N}^{\nu, \sqrt{N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n) \\ &\leq \frac{E \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\delta, N}^{(2)} \varphi\left(\frac{\sqrt{T_N}}{N(1+\delta)} Nt_1, \dots, \frac{\sqrt{T_N}}{N(1+\delta)} Nt_n\right) \rho_{n, N}^{\nu, \sqrt{N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n)}{P(\{|\frac{\sqrt{T_N}}{N} - 1| \leq \delta\})} \end{aligned}$$

$$= \frac{E \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\delta, N}^{(2)} \varphi(Nt_1/(1+\delta), \dots, Nt_n/(1+\delta)) \rho_{n, N}^{\nu, \sqrt{T_N/N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n)}{P(\{|\sqrt{T_N}/N - 1| \leq \delta\})}.$$

Числитель последней дроби ограничен по (2.16), тогда как по Лемме 3 знаменатель стремится к 1. \square

Продолжим доказательство Теоремы. Учитывая, что f непрерывна и имеет компактный носитель, содержащийся в B_R , получаем, что для любого $\alpha \in [1-\delta, 1+\delta]$ и $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$|f(\alpha Nx) - f(Nx)| \leq \epsilon. \quad (2.17)$$

Действительно, обе функции $f(N\cdot)$, $f(\alpha N\cdot)$ обращаются в нуль вне шара $B_{(1-\delta)^{-1}R/N}$. С другой стороны, если выполнено хотя бы одно из соотношений $f(x) \neq 0$ и $f(\alpha x) \neq 0$, то $|x| \leq (1+\delta)(1-\delta)^{-1}R$. В первом случае $f(\alpha x) = f(x) = 0$, в то время как во втором случае $|\alpha x - x| = |1-\alpha||x| \leq \delta(1+\delta)(1-\delta)^{-1}R \leq 3\delta R < \delta'$. В итоге мы имеем

$$\begin{aligned} & \left| E \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\delta, N}^{(2)} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi) \rho_{n, N}^{\nu, \sqrt{T_N/N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n) \right. \right. \\ & \left. \left. - \chi_{\delta, N}^{(2)} \int_{\mathbb{R}^n} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi) \rho_{n, N}^{\nu, \sqrt{N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n) \right) \right| \quad (2.19) \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} E \chi_{\delta, N}^{(2)} |f((\sqrt{T_N}/N)Nt_1/\pi, \dots, (\sqrt{T_N}/N)Nt_n/\pi) \\ & \quad - f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi)| \rho_{n, N}^{\nu, \sqrt{N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n) \\ & \leq \epsilon \rho_{n, N}^{\nu, \sqrt{N}}(B_{(1-\delta)^{-1}R/N}) \leq \epsilon \rho_{n, N}^{\nu, \sqrt{N}}(B_{2R/N}). \end{aligned}$$

В силу Леммы 4, этим установлено (2.15), что и завершает доказательство. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Akemann, G. M. Cicuta, L. Molinari, and G. Vernizzi, *Compact support probability distributions in random matrix theory*. — Phys. Rev. E (3) **59**, No. 2, part A (1999), 489–1497.
2. G. Akemann and G. Vernizzi, *Macroscopic and microscopic (non-)universality of compact support random matrix theory*. — Nuclear Phys. B **583**, No. 3 (2000), 739–757.

3. F. Götze and M. Gordin, *Limit correlation functions for Hilbert-Schmidt random matrix ensembles*. — University of Bielefeld. SFB 701. Preprint 06-042 (2006).
4. K. Johansson K. *Universality of the local spacing distribution in certain ensembles of Hermitian Wigner matrices*. — Comm. Math. Phys. **215**, No. 3 (2001), 683–705.
5. M. L. Mehta, *Random matrices*. Academic Press Inc., Boston, MA (1991).
6. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин*. Наука, М. (1972).
7. N. Rosenzweig, *Statistical mechanics of equally likely quantum systems*. In: Statistical physics (Brandeis Summer Institute, 1962, Vol. 3), 91–158, W. A. Benjamin, N. Y. (1963).
8. А. Б. Сошников, *Детерминантные точечные случайные поля*. — Успехи мат. наук **55**, No. 5(335) (2000), 107–160.
9. С. А. Tracy and H. Widom, *Correlation functions, cluster functions, and spacing distributions for random matrices*. — J. Statist. Phys. **92** No. 5–6 (1998), 809–835.

Götze F., Gordin M. I., Levina A. Limit correlation functions at zero for fixed trace random matrix ensembles.

The large- N limit of the eigenvalue correlation functions is examined in a neighborhood of zero for the spectra of $N \times N$ -Hermitian matrices chosen at random from the Hilbert-Schmidt sphere of appropriate radius. Dyson's famous $\sin \pi(t_1 - t_2)/\pi(t_1 - t_2)$ -kernel asymptotics is extended to this class of random matrix ensembles.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Germany

Поступило 29 марта 2007 г.

E-mail: goetze@mathematik.uni-bielefeld.de

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: gordin@pdmi.ras.ru

Max Planck Insitut für Dynamik
und Selbstorganisation
Göttingen, Germany

E-mail: anna@chaos.gwdg.de