А. В. Шкляев, Большие уклонения ветвящегося процесса с частицами двух полов в случайной среде, *Дискрет. матем.*, 2023, том 35, выпуск 3, 125–142

DOI: 10.4213/dm1778

Дискретная математика

том 35 выпуск 3 * 2023

УДК 519.218.27+519.214.8 DOI https://doi.org/10.4213/dm1778

Большие уклонения ветвящегося процесса с частицами двух полов в случайной среде

© 2023 г. А. В. Шкляев*

В работе рассматриваются вероятности больших уклонений ветвящегося процесса N_n с частицами двух полов в случайной среде, представляющей собой независимые одинаково распределенные величины. Для такого процесса при определенных условиях на функцию паросочетаний (возможно, зависящую от среды) вводится сопровождающее случайное блуждание S_n. При выполнении условия Крамера для шагов блуждания и моментных ограничениях на число потомков одной пары найдена точная асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(\ln N_n \in [x, x+\Delta_n))$ при значениях x/n, изменяющихся в некотором диапазоне, и всех достаточно медленно стремящихся к нулю при $n\to\infty$ последовательностей Δ_n. Аналогичная теорема доказывается для ветвящегося процесса с частицами двух полов в случайной среде с иммиграцией.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №19-11-00111-П, https://rscf.ru/project/19-11-00111/, в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Ключевые слова: ветвящиеся процессы с частицами двух полов, случайные среды, большие уклонения, условие Крамера

1. Введение

Пусть $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots)$ — последовательность независимых одинаково распределенных (н. о. р.) невырожденных случайных величин (сл. в.) и $\{f_y(s,t),\ y\in\mathbb{R}\}$ — семейство вероятностных производящих функций (п. ф.) от двух аргументов, $L\colon \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0\times\mathbb{R}\to\mathbb{N}_0$ — некоторая функция, мы будем называть ее функцией паросочетаний. Здесь $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Ветвящийся процесс с частицами двух полов в случайной среде (для краткости будем называть его двуполым ветвящимся процессом в случайной среде или ДВПСС) $\mathcal{N}=(N_n,\ n\geqslant 0)$ определяется как однородная марковская цепь с условными относительно среды $\boldsymbol{\eta}$ переходными вероятностями, заданными соотношением

$$\mathbf{P}(N_{n+1}=j \mid N_n=i,\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{P}(L(U,V,\eta_{n+1})=j),$$

где вектор (U,V) имеет п. ф. $f_{\eta_{n+1}}(s,t)^i$, $s,t\in[0,1]$.

*Место работы: Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, ashklyaev@gmail.com

Дадим более явное представление процесса N_n. Пусть последовательность $(U_{i,j}, V_{i,j}, i, j > 0)$ состоит из случайных векторов с целочисленными неотрицательными компонентами, причем при каждом натуральном i при фиксации среды последовательность $((U_{i,j}, V_{i,j}), j > 0)$ состоит из условно независимых и одинаково распределенных случайных векторов с п. ф. f_{η_i}. При разных i последовательности $((U_{i,j}, V_{i,j}), j > 0)$ предполагаются независимыми. Двуполым ветвящимся процессом в случайной среде назовем случайную последовательность

$$N_0 = 1, \quad N_{n+1} = L(U_{n+1,1} + \cdots + U_{n+1,N_n}, V_{n+1,1} + \cdots + V_{n+1,N_n}, \eta_{n+1}).$$

Таким образом, можно дать следующую интерпретацию: частицы в рассматриваемом процессе бывают двух полов U и V, если в поколении n имеется k частиц первого и l второго пола, то они образуют $L(k, l, \eta_{n+1})$ пар, а затем разыгрывается среда η_{n+2} и каждая из пар при фиксированной среде дает случайное число потомков в соответствии с п. ф. $f_{\eta_{n+2}}$ независимо от остальных частиц и предыстории процесса.

Наиболее естественная функция паросочетания $L(x, y) = \min(x, y)$ соответствует случаю, когда частицы разбиваются на непересекающиеся пары. Также можно рассмотреть случай, когда частицы одного из полов могут входить в несколько $(d > 1)$ пар, что соответствует $L(x, y) = \min(x, dy)$ или более общей модели $L(x, y) = \min(d_1 x, d_2 y)$, где $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$. Наконец, $L(x, y) = x I_{y>0}$ соответствует случаю, когда представители второго пола могут входить в неограниченное число пар с представителями первого пола, а $L(x, y) = d_1 x I_{y>0}$, $d_1 \in \mathbb{N}$, обобщает эту модель. Выделим два важных частных случая функций паросочетаний:

$$L(x, y) = \min(d_1 x, d_2 y), \quad L(x, y) = d_1 x I_{y>0}, \qquad d_1, d_2 \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Модель двуполого ветвящегося процесса была введена D. Daley в [1], где исследовалось вырождение процесса с вероятностью единица для указанных выше функций паросочетаний. В [2, 3] рассматривались условия невырождения для более общего случая супераддитивных функций L. В [4] была исследована сходимость нормированного процесса для $L(x, y) = \min(x, y)$, в [5] эти результаты были обобщены на супераддитивные функции. В [6] были введены двуполые ветвящиеся процессы с иммиграцией, исследованные более подробно в [7]. В [8] рассматривался случай, когда иммиграция неоднородна и зависит от числа частиц. При этом в названных выше работах рассматривались два вида иммиграции: иммиграция частиц и иммиграция пар. Различие между этими формами миграции не слишком существенно, в настоящей работе предполагается первый вид иммиграции.

Двуполые ветвящиеся процессы в случайной среде были введены в [9], для них исследовались условия невырождения и сходимость для нормированного процесса в случае невырождения. В [10] предыдущие результаты были обобщены на случай, когда функция паросочетания зависит от среды.

Будем считать, что функция $L(x, y, z)$ при всех $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $z \in \mathbb{R}$, удовлетворяет соотношению

$$|L(x, y, z) - g(x, y, z)| \leqslant c_1 (|x| + |y|)^{1-\delta}, \tag{2}$$

где c_1, δ — некоторые положительные константы, не зависящие от z, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая функция, являющаяся липшицевой по первым двум переменным, удовлетворяющая соотношению $g(cx, cy, z) = cg(x, y, z)$ при всех $c, x, y \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{R}$. В частности, нас устраивают такие функции $L(x, y, z)$, что при всех натуральных c, x, y и некотором $C < \infty$

$$L(cx, cy, z) = cL(x, y, z), \quad |L(x, y, z) - L(u, v, z)| \leqslant C(|x - u| + |y - v|).$$

Тогда можно положить $g(x, y, z) = L(x, y, z)$ при $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и доопределить ее кусочно линейно при нецелых x, y. Отметим, что типовые функции паросочетаний (1) попадают в последний случай. Кроме того, нам подойдут любые функции, получающиеся из функций (1) изменениями на ограниченных областях.

Положим

$$\chi_i = \ln \mathbf{E}_{\eta_i} U_{i,1}, \quad \zeta_i = \ln \mathbf{E}_{\eta_i} V_{i,1}.$$

Шагом сопровождающего блуждания назовем величину $\xi_i = g(\chi_i, \zeta_i, \eta_i)$. Будем использовать общее обозначение ξ для величин с тем же распределением. ДВПСС назовем надкритическим, если $\mu := \mathbf{E}\xi > 0$, критическим, если $\mu = 0$, докритическим, если $\mu < 0$.

В [9–11] в качестве аналога шага сопровождающего блуждания по существу рассматриваются величины

$$\ln \inf_{k>0} \frac{1}{k} \mathbf{E}(N_{n+1} \mid N_n = k, \boldsymbol{\eta}).$$

Можно показать, что в наших условиях данная величина совпадает с ξ_{n+1}. Отметим, что во всех трех указанных работах авторы накладывают довольно сильные условия на параметры процесса. Можно переформулировать приведенные ниже результаты, не предполагая выполнения условия (2), что и будет сделано в замечании 7. Однако условие (2) кажется значительно более естественным, легко проверяется, выполнено для наиболее популярных частных случаев и накладывает ограничение на размножение процесса только при достаточно больших количествах частиц. В частности, мы не требуем супераддитивности функции паросочетаний.

Основной целью настоящей работы является исследование вероятностей больших уклонений ДВПСС. Изучение больших уклонений для ветвящихся процессов Z_n в случайной среде началось в [12, 13], где в случае геометрических п. ф. $\{f_y\}$ была получена точная асимптотика вероятностей больших уклонений $\mathbf{P}(\ln Z_n \geqslant \theta n)$ при $\theta > \max(0, \mu)$. В [14] был получен принцип больших уклонений для надкритических процессов в более общих предположениях. В [15, 16] принцип больших уклонений был получен для всех типов процессов в предположении, что хвосты распределения числа непосредственных потомков убывают экспоненциально. В [17, 18] исследовалась точная асимптотика вероятностей больших уклонений для ветвящихся процессов с иммиграцией в случайной среде в случае геометрического распределения числа непосредственных потомков одной частицы. Наиболее общие результаты о точной асимптотике вероятностей больших уклонений ветвящихся процессов в случайной среде были получены в [19, 20]. В последней работе рассматривался также случай, включающий иммиграцию. Теория больших уклонений для ДВПСС на данный момент не развита.

В нашей работе найдена точная асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(\ln N_n \in [x, x+\Delta_n))$ при достаточно медленно стремящихся к нулю последовательностях Δ_n и значениях x/n, лежащих в некотором диапазоне, форма которого зависит от типа рассматриваемого процесса. Показано, что асимптотика такого рода вероятностей с точностью до мультипликативной константы совпадает с асимптотикой вероятностей $\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n))$, где $\{S_n, n \geqslant 0\}$ — сопровождающее блуждание для ДВПСС $\mathcal{N}$. На основе такого рода результатов получена асимптотика вероятностей больших уклонений $\mathbf{P}(\ln N_n \geqslant \theta n)$, $\theta > m^*$, m^* определено ниже. Аналогичные результаты получены и для двуполых ветвящихся процессов с иммиграцией в случайной среде (ДВПИСС)

Основным методом является представление ДВПСС в виде рекуррентной последовательности $N_{n+1} = A_n N_n + B_n$, где $A_i = e^{\xi_{i+1}}$. Для такого рода процессов хорошо изучен случай, когда (A_i, B_i) — н. о. р. сл. в. (см., например, [21]). Нам потребуются результаты для более общего случая, полученные в [22]. Данный подход позволяет доказать теорему 4 о больших уклонениях для ДВПСС и теорему 5 для ДВПИСС.

Работа устроена следующим образом. В разделе 2 введены обозначения и приведены вспомогательные результаты. В разделе 3 сформулированы результаты работы [22] о больших уклонениях рекуррентно заданных последовательностей, а также приведено полезное дополнение для случая марковских рекуррентных последовательностей. В разделе 4 сформулированы основные результаты работы, в разделе 5 приведены их доказательства.

2. Вспомогательные результаты

Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \xi_1, \dots, \xi_i, \dots)$ — последовательность н. о. р. невырожденных случайных величин на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, удовлетворяющих условиям $\mu := \mathbf{E}\xi < \infty$ и $R(h) := \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$, $h \in [0, h^+)$, где h^+ — некоторая положительная константа. При $h \in (0, h^+)$ положим

$$m(h) = (\ln R(h))', \quad \sigma^2(h) = m'(h) > 0, \quad m^+ = \lim_{h \to h^+} m(h).$$

Функция $m(h)$ непрерывна и монотонно возрастает при $h \in [0, h^+)$ и $m(0) = \mu$. Поэтому для любого $\theta \in [\mu, m^+)$ существует такое $h_\theta \in [0, h^+)$, что $m(h_\theta) = \theta$. Отметим, что $\sigma^2(h)$ также непрерывна на $(0, h^+)$ и $\sigma^2(0) = \mathbf{D}\xi$, если $\mathbf{D}\xi < \infty$. Пусть $\Lambda(\theta) = \theta h_\theta - \ln R(h_\theta)$ — функция уклонений.

Введем случайное блуждание $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \geqslant 1$, $S_0 = 0$. Фиксируем $h \in [0, h^+)$. Сопряженным блужданием к $\{S_n\}$ назовем блуждание $\{S_n^{(h)}\}$, где $S_n^{(h)} = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(h)}$, $n \geqslant 1$, $S_0^{(h)} = 0$, а $\xi_i^{(h)}$ — последовательность н. о. р. сл. в. с функцией распределения

$$F^{(h)}(x) = R(h)^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{hy}\, dF(y).$$

При этом $\mathbf{E}\xi^{(h)} = m(h)$, $\mathbf{D}\xi^{(h)} = \sigma^2(h)$. Рассмотрим сигма-алгебру подмножеств Ω, порожденную последовательностью $\boldsymbol{\xi}$, зададим на ней меру $\mathbf{P}^{(h)}$ соотношением

$$\mathbf{P}^{(h)}(A) = \mathbf{P}\big(\boldsymbol{\xi}^{(h)} \in B\big), \quad A = \boldsymbol{\xi}^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty),$$

где $\boldsymbol{\xi}^{(h)} \stackrel{d}{=} (\xi_1^{(h)}, \xi_2^{(h)}, \dots)$. Доопределим меру $\mathbf{P}^{(h)}$ на $\mathcal{F}$ формулой

$$\mathbf{P}^{(h)}(A) = \mathbf{E}^{(h)}(\mathbf{P}(A \mid \boldsymbol{\xi})), \quad A \in \mathcal{F},$$

здесь и далее $\mathbf{E}^{(h)}$ обозначает математическое ожидание по мере $\mathbf{P}^{(h)}$. Меру $\mathbf{P}^{(h)}$ будем называть мерой, сопряженной к $\mathbf{P}$.

Будем говорить, что некоторое соотношение выполнено для всех числовых последовательностей Δ_n, достаточно медленно стремящихся к нулю при $n \to \infty$, подразумевая под этим следующее: существует такая положительная последовательность $\widetilde{\Delta}_n \to 0$, $n \to \infty$, что для любой последовательности $\Delta_n \to 0$, $n \to \infty$, удовлетворяющей неравенствам $\Delta_k > \widetilde{\Delta}_k$ при всех натуральных k, выполнено это соотношение.

Для удобства в дальнейшем будем использовать общее обозначение $r_n(u)$ для последовательностей, стремящихся к нулю при $n \to \infty$ равномерно по рассматриваемым u. При этом в разных формулах $r_n(u)$ обозначают, вообще говоря, разные последовательности.

Нам понадобится ряд неравенств. При $h \geqslant 1$ справедливы неравенства Минковского

$$\left(\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^h\right)^{1/h} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{E}X_i^h\right)^{1/h}$$

и неравенство для средних

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^h \leqslant n^{h-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_i^h, \tag{3}$$

при $h \in [0,1]$ — неравенство

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^h \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_i^h. \tag{4}$$

Здесь X_i — неотрицательные случайные величины, имеющие конечные моменты порядка h. Кроме того, воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 1 ([23, 24])**.** *Пусть T_n — мартингал, $T_0 = 0$. Тогда при некоторой абсолютной константе c справедливы неравенства*

$$\mathbf{E}|T_n|^h \leqslant c \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}|T_i - T_{i-1}|^h, \quad h \in [1,2],$$

$$\mathbf{E}|T_n|^h \leqslant c n^{h/2-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}|T_i - T_{i-1}|^h, \quad h \in [2,\infty).$$

Сформулируем следующее простое следствие теоремы 1. Пусть X_i — независимые и одинаково распределенные при условии сигма-алгебры $\mathcal{A}$ сл. в., $\mathbf{E}(X_1 \mid \mathcal{A}) = 0$, а T — измеримая относительно $\mathcal{A}$ сл. в. с целыми неотрицательными значениями, не зависящая от $\mathbf{E}(X_1 \mid \mathcal{A})$. Тогда

$$\mathbf{E}\left|\sum_{i=1}^{T} X_i\right|^h = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{T} X_i\right|^h \,\middle|\, \mathcal{A}\right)\right) \leqslant \begin{cases} c\mathbf{E}T\ \mathbf{E}|X_1|^h, & h \in [1,2), \\ c\mathbf{E}T^{h/2}\ \mathbf{E}|X_1|^h, & h \geqslant 2. \end{cases} \tag{5}$$

3. Рекуррентные последовательности

Для удобства читателя приведем ряд результатов, полученных в [22]. Пусть

$$Y_{k+1} = A_k Y_k + B_k, \quad k \geqslant 0, \tag{6}$$

где A_k — н. о. р. положительные сл. в. Положим $\xi_{k+1} = \ln A_k$, $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \geqslant 1$, и $\mu = \mathbf{E}\xi$, $m^* = \max(0, \mu)$.

Пусть $\theta_1, \theta_2 \geqslant m^*$, $\theta_1 < \theta_2$. Введем ряд условий:

A1) при любом $k \geqslant 0$ вектор $(Y_0, A_0, \dots, A_k, B_0, \dots, B_k)$ не зависит от последовательности $(A_{k+1}, A_{k+2}, \dots)$;

A2) величины $\xi_{k+1} = \ln A_k$ невырождены, нерешетчаты, имеют конечное математическое ожидание $\mathbf{E}\xi = \mu$ и удовлетворяют правостороннему условию Крамера

$$R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty, \quad h \in [0, h^+),$$

при некотором h^+, для которого $m^+ = \lim_{h \to h^+} m(h) > \theta_2$;

A3) величина Y_0 такова, что $\mathbf{E}|Y_0|^h < \infty$, $h \in [0, h_{\theta_2}]$;

A4) при любом $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\limsup_{n \to \infty} \mathbf{P}^{(h)}(Y_n \geqslant \delta \exp(S_n)) > 0;$$

A5) при некоторых c, $\delta > 0$, всех $k > 0$ и всех $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$ выполнено неравенство

$$\mathbf{E}|B_k|^h < c e^{-\delta h k} R(h)^{k+1}.$$

Теорема 2 ([22]). *Пусть $m^* < \theta_1 < \theta_2$. Предположим, что выполнены условия* A1–A5. *Тогда при $x/n \in [\theta_1, \theta_2]$ соотношение*

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \in [x, x + \Delta_n)) = \left(1 + r_n\left(\frac{x}{n}\right)\right) \frac{I_Y\left(\frac{x}{n}\right)\Delta_n \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right)}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma(h_{x/n})}, \quad n \to \infty, \tag{7}$$

справедливо при всех достаточно медленно стремящихся к нулю последовательностях Δ_n, где

$$I_Y(\theta) = \lim_{k \to \infty} \frac{\mathbf{E}\left(Y_k^+\right)^{h_\theta}}{R(h_\theta)^k}, \tag{8}$$

$Y_k^+ = \max(Y_k, 0)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. *При этом предел в правой части* (8) *определен и положителен, причем сходимость к нему равномерна по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.*

Напомним, что $r_n(x/n)$ в (7) обозначает последовательность, стремящуюся к нулю при $n \to \infty$ равномерно по рассматриваемым x/n.

Замечание 1 ([22]). Функция $I_Y(\cdot)$ непрерывна на $[\theta_1, \theta_2]$ и допускает представление

$$I_Y(\theta) = \mathbf{E}(Y_{h_\theta}^*)^{h_\theta},$$

где Y_h^*, $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$, — предел по распределению относительно меры $\mathbf{P}^{(h)}$ последовательности $Y_n^+ e^{-S_n}$.

Отметим, что проверка условия A4 упрощается, если Y_n — однородная марковская цепь.

Лемма 1. *Пусть Y_n — однородная марковская цепь, заданная соотношением* (6), $m^* \leqslant \theta_1 < \theta_2$. *Если выполнены условия* A1–A3 *и*

A4*) *для любого x найдется такое k, что* $\mathbf{P}(Y_k \geqslant x) > 0$;

A5*) *при некоторых $\delta_1, \delta_2 \in (0,1)$, $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$ и всех натуральных n справедливо соотношение*

$$\mathbf{E}(|B_n|^h \mid Y_0 = x) \leqslant x^{h(1-\delta_1)} R(h)^n e^{-\delta_2 h n};$$

то выполнены условия A1–A5.

Доказательство. Условие A5 вытекает из A5* и A3, поэтому достаточно проверить выполнение условия A4. Положим для краткости $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$. Фиксируем $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$ и рассмотрим такое положительное x, что

$$2^h x^{-\delta_1 h} < \frac{\min\bigl(1 - e^{-\delta_2 h}, (1 - e^{-\delta_2})^h\bigr)}{2},$$

где параметры δ_1, δ_2 таковы, что выполнено условие A5*.

Заметим, что при любом y и $h \in (0,1]$

$$\mathbf{E}\bigl(\bigl|Y_n - y e^{S_n}\bigr|^h \mid Y_0 = y\bigr) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{E}\bigl(|B_i|^h \mid Y_0 = y\bigr) R(h)^{n-i} \leqslant \frac{y^{h(1-\delta_1)} R(h)^n}{1 - e^{-\delta_2 h}}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством (4) и независимостью B_i и $\exp(S_n - S_i)$ при каждом $i \leqslant n$. При $h \geqslant 1$ оценка

$$\mathbf{E}\bigl(\bigl|Y_n - y e^{S_n}\bigr|^h \mid Y_0 = y\bigr) \leqslant \frac{y^{h(1-\delta_1)} R(h)^n}{(1 - e^{-\delta_2})^h}$$

вытекает из неравенства Минковского аналогичным образом.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{(h)}\left(\bigl|Y_n - y e^{S_n}\bigr| > \frac{y e^{S_n}}{2} \;\middle|\; Y_0 = y\right) &\leqslant \mathbf{E}^{(h)}\left(\frac{\mathbf{E}\bigl(\bigl|Y_n - y e^{S_n}\bigr|^h \mid Y_0 = y, \boldsymbol{\xi}\bigr)}{y^h e^{h S_n} 2^{-h}}\right) \\ &\leqslant \frac{2^h}{y^h} R(h)^{-n} \mathbf{E}\bigl(\bigl|Y_n - y e^{S_n}\bigr|^h \mid Y_0 = y\bigr) \leqslant \frac{2^h y^{-\delta_1 h}}{\min\bigl((1 - e^{-\delta_2})^h, 1 - e^{-\delta_2 h}\bigr)}.\end{aligned}$$

Выберем k, соответствующее x по условию A4*. При условии, что $y > \max(x, 2\delta e^s)$, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{(h)}\left(\frac{Y_n}{e^{S_n}} < \delta \;\middle|\; Y_k = y, S_k = s\right) &\leqslant \mathbf{P}^{(h)}\left(\left|\frac{Y_{n-k}}{e^{S_{n-k}}} - y\right| > (y - \delta e^s) \;\middle|\; Y_0 = y\right) \\ &\leqslant \frac{2^h y^{-\delta_1 h}}{\min\bigl((1 - e^{-\delta_2})^h, 1 - e^{-\delta_2 h}\bigr)} < \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Выберем положительный параметр δ достаточно малым так, что

$$\mathbf{P}^{(h)}\bigl(Y_k > x, Y_k > 2\delta e^{S_k}\bigr) > 0.$$

Тогда

$$\mathbf{P}^{(h)}\left(\frac{Y_n}{e^{S_n}} \geqslant \delta\right) \geqslant \mathbf{E}^{(h)}\left(\mathbf{P}^{(h)}\left(\frac{Y_n}{e^{S_n}} \geqslant \delta \;\middle|\; Y_k, S_k\right); Y_k > \max\bigl(2\delta e^{S_k}, x\bigr)\right)$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\mathbf{P}^{(h)}\bigl(Y_k > \max\bigl(2\delta e^{S_k}, x\bigr)\bigr).$$

Правая часть полученного выражения не зависит от n и положительна, откуда и вытекает выполнение условия A4. □

Теорема 3 ([22])**.** *Пусть* $m^* < \theta_1 < \theta_2$ *и выполнены условия* A1–A5. *Тогда при* $x/n \in [\theta_1, \theta_2]$

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \geqslant x) = \frac{(1 + r_n(x/n))}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma(h_{x/n})h_{x/n}}\, I_Y\left(\frac{x}{n}\right)\exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right).$$

4. Большие уклонения двуполых ветвящихся процессов в случайной среде

Положим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Пусть $\mathcal{N} = \{N_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ — ДВПСС, удовлетворяющий следующим условиям:

- BBP1) функция паросочетаний $L(x, y, z)$ удовлетворяет соотношению $L(x, y, z) \leqslant xy$ и неравенству
$$|L(x, y, z) - g(x, y, z)| \leqslant c_1(|x| + |y|)^{1-\delta},$$
где c_1, δ — некоторые положительные константы, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ является липшицевой функцией по первым двум переменным, константа Липшица которой не зависит от z, причем $g(cx, cy, z) = cg(x, y, z)$, $c, x, y \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{R}$;
- BBP2) $\mu = \mathbf{E}\xi < \infty$, $R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ при $h \in [0, h^+)$ для некоторого $h^+ > 1$, причем $\sup_{h\in[0,h^+)} R(h) > 1$;
- BBP3) $\mathbf{E}U^h < \infty$, $\mathbf{E}V^h < \infty$ при $h \in [0, h^+)$, где U, V — общее обозначение для $U_{i,j}, V_{i,j}$;
- BBP4) величина ξ нерешетчата;
- BBP5) для любого k существует такое n, что $\mathbf{P}(N_n \geqslant k) > 0$.

Отметим, что условие BBP5 не вытекает, вообще говоря, из предыдущих, однако выполнено в ряде частных случаев, например, для процессов, у которых носитель распределения количества потомков одной частицы неограничен.

Назовем последовательность, заданную соотношениями $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \geqslant 1$, $S_0 = 0$, случайным блужданием, сопровождающим ДВПСС $\mathcal{N}$.

В докритическом случае в силу условия BBP2 существует $\varkappa^* > 0\colon R(\varkappa^*) = 1$. Положим $\gamma^* = m(\varkappa^*)$ и $\widehat{m}^* = \mu$ для надкритических процессов, $\widehat{m}^* = 0$ для критических процессов, $\widehat{m}^* = \gamma^*$ для докритических процессов. Отметим, что при $h > h_{\widehat{m}^*}$ выполнено неравенство $R(h) > 1$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть ДВПСС* $\mathcal{N}$ *удовлетворяет условиям* ВВР1–ВВР5, $[\theta_1, \theta_2] \subset (\widehat{m}^*, m^+)$. *Тогда при* $x/n \in [\theta_1, \theta_2]$ *соотношение*

$$\mathbf{P}(\ln N_n \in [x, x + \Delta_n)) = \left(1 + r_n\left(\frac{x}{n}\right)\right) \frac{I_N(\frac{x}{n})\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma(h_{x/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right) \tag{9}$$

справедливо для всех достаточно медленно стремящихся к нулю последовательностей Δ_n, *где*

$$I_N(\theta) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{E}N_k^{h_\theta}}{R(h_\theta)^k}, \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]. \tag{10}$$

При этом сходимость в (10) *равномерна по* $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Замечание 2. Для доказательства теоремы 4 будет проверено выполнение условий A1–A5. При этом, как следует из замечания 1, последовательность $N_k/\exp(S_k)$ сходится по распределению относительно меры $\mathbf{P}^{(h)}$ к некоторой величине W_h при всех рассматриваемых h, функция I_N является непрерывной на отрезке $[\theta_1, \theta_2]$ и допускает представление

$$I_N(\theta) = \mathbf{E}W_{h_\theta}^{h_\theta}, \quad \theta \in (\widehat{m}^*, m^+).$$

Из теоремы 3 вытекает следующее соотношение.

Замечание 3. Пусть $\mathcal{N}$ — ДВПСС, удовлетворяющий условиям ВВР1–ВВР5, $[\theta_1, \theta_2] \subset (\widehat{m}^*, m^+)$. Тогда при $x/n \in [\theta_1, \theta_2]$ выполнено соотношение

$$\mathbf{P}(\ln N_n \geqslant x) = \frac{(1 + r_n(x/n))}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma(h_{x/n})h_{x/n}} I_N\left(\frac{x}{n}\right) \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right).$$

Замечание 4. В условии ВВР1 предполагается, что константа c_1 в формуле (2) и константа Липшица c_g функции g не зависят от среды. Можно ослабить данные условия, допустив зависимость от переменной z обеих указанных величин:

$$|L(x, y, z) - g(x, y, z)| \leqslant c_1(z)(|x| + |y|)^{1-\delta}, \quad x, y \in \mathbb{N},$$
$$|g(x_1, y_1, z) - g(x_2, y_2, z)| \leqslant c_g(z)(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Тогда теорема 4 останется верна, если потребовать вместо ВВР3 выполнение при $h \in [0, h^+)$ условий

$$\max\bigl(\mathbf{E}(c_1(\eta_1)U_1)^h,\ \mathbf{E}(c_g(\eta_1)U_1)^h,\ \mathbf{E}(c_1(\eta_1)V_1)^h,\ \mathbf{E}(c_g(\eta_1)V_1)^h\bigr) < +\infty. \tag{11}$$

В частности, достаточным условием для (11) в силу неравенства Гельдера является выполнение условия ВВР3 вместе с конечностью моментов любого положительного порядка у обеих величин $c_1(\eta_1)$, $c_g(\eta_1)$. Доказательство при этом по существу не меняется за исключением того, что $c_1(\eta)$, $c_g(\eta)$ не будут выноситься из-под знаков математических ожиданий, что и требует наложения условий (11).

Замечание 5. Для удобства записи мы доказываем теорему 4 в случае $N_0 = 1$. Впрочем, доказательство по существу не опирается на это условие, и при $N_0 = n_1 > 1$ справедливо аналогичное утверждение: при выполнении ВВР1–ВВР4 при $x/n \in [\theta_1, \theta_2]$

$$\mathbf{P}(\ln N_n \in [x, x+\Delta_n) \mid Z_0 = n_1) = \left(1 + r_n\left(\frac{x}{n}\right)\right) \frac{I_{N,n_1}(\frac{x}{n})\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma(h_{x/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right) \quad (12)$$

для всех достаточно медленно стремящихся к нулю последовательностей Δ_n, где

$$I_{N,n_1}(\theta) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{E}\big(N_k^{h_\theta} \mid N_0 = n_1\big)}{R(h_\theta)^k}.$$

Замечание 6. Отметим, что теорема легко переносится на случай $k > 2$ полов. В этом случае вместо пары будем рассматривать «семьи», содержащие по одному представителю каждого пола, предполагая, что каждая семья производит случайное число потомков всех k полов. Количество семей, образующихся из x_i, $i \leqslant k$, представителей каждого пола при фиксированной среде z, будет определяться функцией сочетаний $L(x_1, \dots, x_k, z)$. В этом случае вместо условия ВВР1 понадобится следующее условие:

ВВР1*) функция паросочетаний $L(x_1, \dots, x_k, z)$ при некотором положительном δ удовлетворяет соотношению

$$|L(x_1, \dots, x_k, z) - g(x_1, \dots, x_k, z)| \leqslant c \sum_{i=1}^{k} |x_i|^{1-\delta},$$

где $g(x_1, \dots, x_k, z)$ является липшицевой функцией по первым k переменным, константа Липшица которой не зависит от z. Пусть, кроме того, при всех положительных c выполнено соотношение $g(cx_1, \dots, cx_k, z) = cg(x_1, x_2, \dots, x_k, z)$.

При этом шаг сопровождающего блуждания будет определяться соотношением

$$\xi_i = g(\mathbf{E}_{\eta_i} U_{i,1,1}, \dots, \mathbf{E}_{\eta_i} U_{i,1,k}),$$

где $U_{i,j,l}$ — число потомков l-го пола у j-й семьи в i-м поколении. Тогда при выполнении ВВР1*, ВВР2–ВВР5 основное утверждение (9) сохраняет силу. Доказательство при этом полностью аналогично.

Замечание 7. Отметим, что можно отказаться от ВВР1 и наложить следующее условие ВВР*.

ВВР*) Если $\xi(y) = \ln\inf_{k>0} \frac{1}{k}\mathbf{E}(N_1 \mid N_0 = k, \eta_1 = y)$, то $\xi(\eta_1)$ удовлетворяет ВВР2, ВВР4, а также при всех $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$, некотором положительном c и некотором $\delta \in (0,1)$ выполнено неравенство

$$\mathbf{E}\big(\big|N_1 - ke^{\xi(\eta_1)}\big|^h \mid N_0 = k\big) \leqslant ck^{h(1-\delta)}, \quad k \geqslant 1. \quad (13)$$

Тогда при выполнении ВВР* и ВВР5 справедливо соотношение (9). Доказательство вытекает из доказательства теоремы 4.

Аналогичные результаты можно получить для ДВПСС с иммиграцией (ДВПИСС). Предположим, что $\widetilde{N}$ — двуполый ветвящийся процесс в случайной среде с иммиграцией μ_i, ν_i индивидуумов каждого из полов в поколении i, $i \geqslant 0$. Более конкретно, пусть

$$\widetilde{N}_{n+1} = L(U_{n+1,1} + \cdots + U_{n+1,\widetilde{N}_n} + \mu_{n+1}, V_{n+1,1} + \cdots + V_{n+1,\widetilde{N}_n} + \nu_{n+1}, \eta_{n+1}),$$

где (μ_i, ν_i) — целочисленные неотрицательные независимые случайные векторы. Будем считать, что $\widetilde{N}_0 = 0$, а начальное число иммигрантов в процессе μ_1, ν_1 может быть случайным. При этом случайные векторы (μ_i, ν_i), $i \geqslant 1$, могут иметь разные распределения и могут зависеть от среды и предыстории процесса (более конкретно эта зависимость описывается в условии ВВР6).

Можно дать следующую интерпретацию рассматриваемому процессу: в каждом поколении n в процессе присутствует $\widetilde{N}_n$ пар-аборигенов и μ_{n+1}, ν_{n+1} прибывших в этом поколении иммигрантов каждого из полов. На следующем шаге все указанные частицы образуют пары, эти пары независимо (при условии среды $\boldsymbol{\eta}$) согласно одному и тому же вероятностному закону дают потомков, которые становятся аборигенами следующего поколения. Кроме того, в процесс прибывает новая партия иммигрантов.

Наложим следующие условия на иммиграцию:

ВВР6) случайный вектор $(U_{i,l}, V_{i,l}, \mu_i, \nu_i, i \leqslant j, l \geqslant 0)$ не зависит от последовательности $(U_{i,l}, V_{i,l}, i \geqslant j+1, l \geqslant 0)$ при всех натуральных j;

ВВР7) при некоторых положительных c, δ и $\widehat{h} > 1$, всех натуральных n и всех $h \in [h_{\theta_1}, \max(\widehat{h}, h_{\theta_2})]$ справедливы неравенства

$$\mathbf{E}\mu_{n+1}^h \leqslant ce^{-\delta hn} R(h)^n, \quad \mathbf{E}\nu_{n+1}^h \leqslant ce^{-\delta hn} R(h)^n.$$

Теорема 5. *Пусть ДВПИСС* $\widetilde{N}$ *удовлетворяет условиям* ВВР1–ВВР7 *при некоторых* $\theta_1, \theta_2 \in (\widehat{m}^*, m^+)$. *Тогда при* $x/n \in [\theta_1, \theta_2]$ *соотношение*

$$\mathbf{P}(\ln \widetilde{N}_n \in [x, x+\Delta_n)) = \left(1 + r_n\left(\frac{x}{n}\right)\right) \frac{\widetilde{I}_N(\frac{x}{n})\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma(h_{x/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right), \; n \to \infty, \quad (14)$$

справедливо для всех достаточно медленно стремящихся к нулю последовательностей Δ_n, *где*

$$\widetilde{I}_N(\theta) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{E}(\widetilde{N}_k)^{h_\theta}}{R(h_\theta)^k}. \quad (15)$$

При этом сходимость в (15) *равномерна по* $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, *функция* $\widetilde{I}_N(\theta)$ *непрерывна на* $[\theta_1, \theta_2]$ *и положительна.*

Замечание 8. Отметим, что замечания 4 и 6 остаются в силе и в этом случае.

5. Доказательство теорем 4 и 5

Доказательство теоремы 4. На протяжении доказательства мы будем использовать обозначение c с индексами и без для постоянных величин, не подразумевая, что в различных формулах оно обозначает одну и ту же величину.

Для доказательства представим ДВПСС в виде рекуррентной последовательности:

$$N_{n+1} = A_n N_n + B_n = \sum_{i=-1}^{n} B_i e^{S_{n+1}-S_{i+1}}, \tag{16}$$
$$B_n := N_{n+1} - A_n N_n, \quad A_n := e^{\xi_{n+1}}, \qquad n \geqslant 0,$$

где для удобства мы полагаем $B_{-1} = N_0 = 1$. Проверим, что для последовательности (A_n, B_n) выполнены условия теоремы 2.

При любом неотрицательном целом k вектор $(B_0, \ldots, B_k, A_0, \ldots, A_k)$ измерим относительно сигма-алгебры, порожденной последовательностью $(\eta_i, U_{i,l}, V_{i,l}, i \leqslant k+1, l > 0)$, а значит, не зависит от последовательности $(A_i, i > k)$. Следовательно, выполнено условие A1. Условие A2 вытекает из BBP2 и BBP4. Условие A3 выполнено в силу того, что $N_0 = 1$. Условие A4* вытекает из BBP5.

Проверим выполнение условия A5*. Для этого убедимся, что при $N_0 = a_0 \geqslant 1$ и некоторых положительных δ_1, δ_2, c, всех достаточно больших n и $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$ выполнено неравенство

$$\mathbf{E}|B_n|^h < ce^{-\delta_2 hn} R(h)^{n+1} a_0^{h(1-\delta_1)}. \tag{17}$$

Для доказательства нам понадобится следующая оценка:

$$\begin{aligned}
|B_n| &= \left| L\left(\sum_{i=1}^{N_n} U_{n+1,i}, \sum_{i=1}^{N_n} V_{n+1,i}, \eta_{n+1}\right) - g\bigl(N_n e^{\chi_{n+1}}, N_n e^{\zeta_{n+1}}\bigr) \right| \\
&\leqslant \left| L\left(\sum_{i=1}^{N_n} U_{n+1,i}, \sum_{i=1}^{N_n} V_{n+1,i}, \eta_{n+1}\right) - g\left(\sum_{i=1}^{N_n} U_{n+1,i}, \sum_{i=1}^{N_n} V_{n+1,i}, \eta_{n+1}\right) \right| \\
&\qquad + \left| g\left(\sum_{i=1}^{N_n} U_{n+1,i}, \sum_{i=1}^{N_n} V_{n+1,i}, \eta_{n+1}\right) - g\bigl(N_n e^{\chi_{n+1}}, N_n e^{\zeta_{n+1}}\bigr) \right|.
\end{aligned}$$

Применяя условие BBP1 и используя липшицевость функции g, приходим к неравенству

$$B_n \leqslant c_1 \left(\left| \sum_{i=1}^{N_n} U_{n+1,i} \right| + \left| \sum_{i=1}^{N_n} V_{n+1,i} \right| \right)^{1-\delta} + c_g \left(\left| \sum_{i=1}^{N_n} \bigl(U_{n+1,i} - e^{\chi_{n+1}}\bigr) \right| + \left| \sum_{i=1}^{N_n} \bigl(V_{n+1,i} - e^{\zeta_{n+1}}\bigr) \right| \right), \tag{18}$$

где c_1, δ — параметры из условия BBP1, c_g — константа Липшица функции g. Следовательно, при $h \geqslant 1$ в силу неравенства (3) справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|B_n|^h &\leqslant 4^{h-1} c_1^h \left(\mathbf{E}\left| \sum_{i=1}^{N_n} U_{n+1,i} \right|^{h(1-\delta)} + \mathbf{E}\left| \sum_{i=1}^{N_n} V_{n+1,i} \right|^{h(1-\delta)} \right) \\
&\qquad + 4^{h-1} c_g^h \left(\mathbf{E}\left| \sum_{i=1}^{N_n} \bigl(U_{n+1,i} - e^{\chi_{n+1}}\bigr) \right|^h + \mathbf{E}\left| \sum_{i=1}^{N_n} \bigl(V_{n+1,i} - e^{\zeta_{n+1}}\bigr) \right|^h \right).
\end{aligned} \tag{19}$$

Из неравенства Минковского при $h(1-\delta) \geqslant 1$ вытекает соотношение

$$\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{N_n} U_{n+1,i}\right|^{h(1-\delta)} \;\Big|\; N_n\right)^{1/(h(1-\delta))} \leqslant N_n\Big(\mathbf{E}U_{n+1,i}^{h(1-\delta)}\Big)^{1/(h(1-\delta))}, \tag{20}$$

поэтому первое слагаемое правой части (19) оценивается сверху величиной

$$c_2\mathbf{E}N_n^{h(1-\delta)}\big(\mathbf{E}|U_{n+1,1}|^h + \mathbf{E}|V_{n+1,1}|^h\big),$$

а второе в силу неравенства (5) оценивается сверху величиной

$$c_3\mathbf{E}N_n^{\max(h/2,1)}\Big(\big(\mathbf{E}|U_{1,1}-e^{\chi_1}|^h\big)^{1/h} + \big(\mathbf{E}|V_{1,1}-e^{\zeta_1}|^h\big)^{1/h}\Big).$$

Таким образом, при всех $h(1-\delta) \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E}|B_n|^h \leqslant c\max\big(\mathbf{E}N_n^{h(1-\delta)}, 1\big), \tag{21}$$

где c можно выбрать одним для всех рассматриваемых h.

Заметим, что отсюда при любой последовательности $\{t_n\}$, большей единицы, при тех же h вытекает соотношение

$$\mathbf{E}|B_n|^h \leqslant ct_n^h + c\mathbf{E}\big(N_n^{h(1-\delta)}; N_n \geqslant t_n\big) \leqslant ct_n^h + ct_n^{-\delta h}\mathbf{E}N_n^h. \tag{22}$$

Приступим к доказательству (17). Как было замечено выше, $R(h) > 1$ при $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$. Кроме того, в силу монотонности функции m при $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$ выполнено неравенство $m(h) \geqslant m(h_{\theta_1}) > 0$. Выберем $\widehat{h} \in [1, \min(2, h^+))$ так, что $m(h_{\theta_1}/\widehat{h}) > 0$. Будем полагать при этом, что $\widehat{h}(1-\delta) = 1$, где δ предполагается взятым из условия ВВР1. Здесь мы пользуемся тем, что и параметр $\widehat{h}-1$, и δ могут быть взятыми сколь угодно малыми.

Разобьем рассуждение на две части. В п. 1.1) рассмотрим случай $h \leqslant \widehat{h}$, в п. 1.2) — случай $h > \widehat{h}$.

1.1) Пусть $h \leqslant \widehat{h}$. Отметим, что данный случай возникает только для процессов, у которых $m(1) > 0$. Тогда в силу неравенства Ляпунова

$$\mathbf{E}(|B_n|^h \mid \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(|B_n|^h \mid \boldsymbol{\eta}, N_n) \mid \boldsymbol{\eta}) \leqslant \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\big(|B_n|^{\widehat{h}} \mid N_n, \boldsymbol{\eta}\big)^{h/\widehat{h}} \mid \boldsymbol{\eta}\Big). \tag{23}$$

Из неравенств (3), (5) и (18), а также соотношения $\widehat{h}(1-\delta) = 1$ следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big(|B_n|^{\widehat{h}} \mid N_n, \boldsymbol{\eta}\big) &\leqslant 4^{\widehat{h}-1}c_1^{\widehat{h}}N_n\mathbf{E}\big(|U_{n+1,1}|^{\widehat{h}} + |V_{n+1,1}|^{\widehat{h}} \mid \eta_{n+1}\big)\\ &+ 4^{\widehat{h}-1}c_g^{\widehat{h}}c_2N_n\mathbf{E}\big(|U_{n+1,1}-e^{\chi_1}|^{\widehat{h}} + |V_{n+1,1}-e^{\zeta_1}|^{\widehat{h}} \mid \eta_{n+1}\big) = cN_nD(\eta_{n+1})^{\widehat{h}},\end{aligned} \tag{24}$$

где $D(\cdot)$ — некоторая функция. Отметим, что величина $\mathbf{E}D(\eta_1)^{\widehat{h}}$ конечна в силу неравенства Минковского.

Следовательно, для любой последовательности $t_n \geqslant 1$ выполнено соотношение

$$\mathbf{E}|B_n|^h \leqslant c\mathbf{E}N_n^{h(1-\delta)} \leqslant c\mathbf{E}(N_n^{h(1-\delta)}; N_n \leqslant t_n) + c\mathbf{E}(N_n^{h(1-\delta)}; N_n > t_n) \leqslant ct_n^{h(1-\delta)} + ct_n^{-\delta h}\mathbf{E}N_n^h.$$

При $h \in (0,1)$ получаем

$$\mathbf{E}N_n^h \leqslant \mathbf{E}A_n^h \mathbf{E}N_{n-1}^h + \mathbf{E}|B_{n-1}|^h \leqslant R(h)\mathbf{E}N_{n-1}^h + ct_n^{-\delta h}\mathbf{E}N_{n-1}^h + ct_n^{h(1-\delta)},$$

при $h \in (1,\widehat{h})$ получаем

$$\mathbf{E}N_n^h \leqslant \left(\left(R(h)\mathbf{E}N_{n-1}^h\right)^{1/h} + c^{1/h}\left(t_n^{-\delta h}\mathbf{E}N_{n-1}^h + t_n^{(1-\delta)h}\right)^{1/h}\right)^h.$$

Если при этом $\mathbf{E}N_{n-1}^h \leqslant d_{n-1}a_0^h R(h)^{n-1}$, $d_{n-1} \geqslant 1$, а $t_n = \exp(\ln^2 n)$, то

$$\mathbf{E}N_n^h \leqslant d_{n-1}a_0^h R(h)^n \left(1 + c\exp\left(-\delta h \ln^2 n\right) + \frac{c\exp\left((1-\delta)h\ln^2 n\right)}{R(h_{\theta_1})^n}\right), \quad h \in (0,1),$$

$$\mathbf{E}N_n^h \leqslant d_{n-1}a_0^h R(h)^n \left(1 + \left(ce^{-\delta h \ln^2 n} + \frac{c\exp\left((1-\delta)h\ln^2 n\right)}{R(h_{\theta_1})^n}\right)^{1/h}\right)^h, \quad h \in [1, 1+\delta).$$

Положим

$$d_n(h) = \prod_{i=1}^n \left(1 + c\exp\left(-\delta h \ln^2 i\right) + \frac{c\exp\left((1-\delta)h\ln^2 i\right)}{R(h_{\theta_1})^i}\right), \quad d(h) = \lim d_n(h)$$

при $h \in (0,1)$ и

$$d_n(h) = \prod_{i=1}^n \left(1 + ce^{-\delta \ln^2 i}\left(1 + \frac{\exp\left(h\ln^2 i\right)}{R(h_{\theta_1})^i}\right)^{1/h}\right)^h, \quad d(h) = \lim d_n(h)$$

при $h \in [1,\widehat{h}]$, где без ограничения общности можно считать, что $c > 1$. Тогда при всех $h \in [h_{\theta_1},\widehat{h}]$ выполнено соотношение

$$\mathbf{E}N_n^h \leqslant d_n(h)a_0^h R(h)^n \leqslant d(h)a_0^h R(h)^n.$$

Действительно, левое неравенство несложно устанавливается по индукции: база при $n = 0$ вытекает из того, что $N_0 = a_0$, а шаг индукции проделан выше. Второе неравенство вытекает из монотонности и ограниченности последовательности $d_n(h)$ по n.

При этом функция $d(h)$ ограничена величиной d_1, равной максимуму из величин

$$\prod_{i=1}^\infty \left(1 + ce^{-\delta h_{\theta_1} \ln^2 i} + \frac{c\exp\left((1-\delta)\ln^2 i\right)}{R(h_{\theta_1})^i}\right),$$
$$\prod_{i=1}^\infty \left(1 + ce^{-\delta \ln^2 i}\left(1 + \frac{\exp\left(2\ln^2 i\right)}{R(h_{\theta_1})^i}\right)\right)^2.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}N_n^h \leqslant d_1 a_0^h R(h)^n, \quad \mathbf{E}|B_n|^h \leqslant ca_0^{h(1-\delta)}R(h(1-\delta))^n.$$

Остается воспользоваться тем, что при рассматриваемых h в силу выпуклости $\ln R(h)$ и монотонности $m(h)$ выполнено неравенство

$$\ln R(h) \geqslant \ln R(h(1-\delta)) + \delta h m(h_{\theta_1}(1-\delta)).$$

Выбирая δ достаточно малым, так что $m(h_{\theta_1}(1-\delta))>0$, получаем оценку (17).

1.2) При $h\geqslant\widehat{h}$ воспользуемся неравенством Минковского

$$\mathbf{E}N_{n+1}^h\leqslant\Bigl(\bigl(R(h)\mathbf{E}N_n^h\bigr)^{1/h}+\bigl(\mathbf{E}|B_n|^h\bigr)^{1/h}\Bigr)^h$$

и соотношением

$$\mathbf{E}|B_n|^h\leqslant ct_n^h+\frac{c}{t_n^{\delta h}}\mathbf{E}N_n^h.$$

Те же рассуждения, что и прежде, показывают, что

$$\mathbf{E}N_n^h\leqslant d_2a_0^hR(h)^n,$$

где

$$d_2=\prod_{i=1}^\infty\biggl(1+ce^{-\delta\ln^2 i}\biggl(1+\frac{\exp\bigl(h_{\theta_2}\ln^2 i\bigr)}{R(h_{\theta_1})^i}\biggr)\biggr)^{h_{\theta_2}}.$$

В силу неравенства (21) отсюда вытекает оценка

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|B_n|^h\leqslant cd_2a_0^{h(1-\delta)}R(h(1-\delta))^n\leqslant c_1a_0^{h(1-\delta)}\exp((\ln R(h)-m(h)\delta h)n)\\ \leqslant c_1a_0^{h(1-\delta)}R(h)^n\exp(-\delta_2hn)\end{aligned}$$

при $\delta_2=\delta m(h_{\theta_1})$, откуда и вытекает соотношение (17).

Таким образом, выполнены условия леммы 1, откуда следует выполнение условий A1–A5. Применяя теорему 2, получаем требуемое. $\square$

Доказательство теоремы 5. Воспользуемся представлением

$$\widetilde{N}_{n+1}=A_n\widetilde{N}_n+B_n,\qquad A_n=e^{\xi_{n+1}},\quad B_n=\widetilde{N}_{n+1}-A_n\widetilde{N}_n,\qquad n\geqslant 0.$$

Выполнение условий A1, A2 теоремы 4 вытекает из условий BBP6, BBP4 и BBP2, условие A3 выполнено в силу BBP7.

Проверим условие A4. Фиксируем $h\in[h_{\theta_1},h_{\theta_2}]$. Отметим, что из условия BBP5 вытекает справедливость соотношения

$$\mathbf{P}(L(\mu_i,\zeta_i)>0)=\int_{\mathbb{R}^i}\mathbf{P}(L(\mu_i,\zeta_i)>0\mid\vec{\xi}=\vec{y}\,)\,\mathbf{P}(\vec{\xi}\in d\vec{y}\,)>0$$

при некотором i, где $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_i)$. При этом вероятность

$$\mathbf{P}^{(h)}(L(\mu_i,\zeta_i)>0)=R(h)^{-i}\int_{\mathbb{R}^i}e^{h(y_1+\dots+y_i)}\mathbf{P}(L(\mu_i,\zeta_i)>0\mid\vec{\xi}=\vec{y}\,)\,\mathbf{P}(\vec{\xi}\in d\vec{y}\,)$$

также положительна. Заметим, что количество частиц в процессе с иммиграцией не меньше количества частиц в соответствующем процессе без иммиграции с тем же начальным числом частиц, поэтому

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}^{(h)}(\widetilde{N}_n\geqslant\delta\exp(S_n))\geqslant\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}^{(h)}(N_n\geqslant\delta\exp(S_n)\mid N_i\geqslant 1)\mathbf{P}(\widetilde{N}_i\geqslant 1)\\ \geqslant\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}^{(h)}(N_{n-i}\geqslant\delta T_i\exp(S_{n-i})\mid N_0=1)\mathbf{P}^{(h)}(L(\mu_i,\nu_i)\geqslant 1),\end{aligned}$$

где T_i — не зависящая (относительно меры $\mathbf{P}^{(h)}$) от $(N_j, S_j, j \geqslant 1)$ величина с распределением, заданным соотношением

$$\mathbf{P}^{(h)}(T_i \in G) = \mathbf{P}^{(h)}(\exp(S_i) \in G \mid \widetilde{N}_i \geqslant 1), \quad G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Оценим снизу предел в правой части полученного выражения произведением

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}^{(h)}(N_n \geqslant \widetilde{\delta}\delta \exp(S_n) \mid N_0 = 1)\, \mathbf{P}^{(h)}(T_i \leqslant \widetilde{\delta}),$$

где $\widetilde{\delta}$ — некоторый положительный параметр. Выберем $\widetilde{\delta}$ таким образом, чтобы второй множитель был положителен, и δ таким, чтобы положительным был первый множитель. Последнее возможно сделать в силу выполнения условия A4 для последовательности $\{N_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, что было доказано в теореме 4. Следовательно, процесс $\widetilde{N}_n$ также удовлетворяет условию A4.

Остается проверить выполнение условия A5. Для этого заметим, что аналогично соотношению (18) для ДВПИСС выполнено неравенство

$$\begin{aligned}|B_n| \leqslant c_1 \Biggl(\Biggl| \sum_{i=1}^{\widetilde{N}_n} U_{n+1,i} + \mu_{n+1} \Biggr| + \Biggl| \sum_{i=1}^{\widetilde{N}_n} V_{n+1,i} + \nu_{n+1} \Biggr| \Biggr)^{1-\delta} \\ + c_g \Biggl(\Biggl| \sum_{i=1}^{\widetilde{N}_n} \bigl(U_{n+1,i} - e^{\chi_{n+1}}\bigr) + \mu_{n+1} \Biggr| + \Biggl| \sum_{i=1}^{\widetilde{N}_n} \bigl(V_{n+1,i} - e^{\zeta_{n+1}}\bigr) + \nu_{n+1} \Biggr| \Biggr), \quad (25)\end{aligned}$$

где c_1, δ — параметры из условия ВВР1, c_g — константа Липшица функции g. Действуя аналогично доказательству неравенства (24), получаем при $h \in (0, \widehat{h})$ и некоторой величине $\widetilde{D}(\eta_{n+1})$ с конечным моментом порядка h соотношение

$$\mathbf{E}\bigl(|B_n|^{\widehat{h}} \mid \widetilde{N}_n, \boldsymbol{\eta}\bigr) \leqslant c\widetilde{N}_n \widetilde{D}(\eta_{n+1})^{\widehat{h}} + c\mathbf{E}\bigl(\mu_{n+1}^{\widehat{h}} + \nu_{n+1}^{\widehat{h}} \mid \widetilde{N}_n, \boldsymbol{\eta}\bigr).$$

Значит,

$$\mathbf{E}|B_n|^h \leqslant c_1 \mathbf{E}\widetilde{N}_n^{h(1-\delta)} + c_2 R(h)^n \exp(-\delta n h).$$

Те же рассуждения, что в доказательстве теоремы 4, приводят к оценкам

$$\mathbf{E}\widetilde{N}_n^h \leqslant d_1^* R(h)^n, \ h \in [h_{\theta_1}, \widehat{h}),$$

где d_1^* есть максимум из выражений

$$\prod_{i=1}^{\infty} \biggl(1 + c\exp\bigl(-\delta h_{\theta_1} \ln^2 i\bigr) + \frac{c\exp\bigl((1-\delta)\ln^2 i\bigr)}{R(h_{\theta_1})^i} + c_2 \exp(-\delta i h_{\theta_1}) \biggr),$$

$$\prod_{i=1}^{\infty} \biggl(1 + c\exp\bigl(-\delta \ln^2 i\bigr) \biggl(1 + \frac{\exp\bigl(2\ln^2 i\bigr)}{R(h_{\theta_1})^i} \biggr) + c_2 \exp(-\delta i h_{\theta_1}) \biggr)^2,$$

поэтому при некотором c

$$\mathbf{E}|B_n|^h \leqslant cR(h)^n \exp(-\delta n h).$$

Аналогично при $h \in [\widehat{h}, h_{\theta_2}]$
$$\mathbf{E}N_n^h \leqslant d_2^* R(h)^n,$$
где
$$d_2^* = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 + ce^{-\delta \ln^2 i}\left(1 + \frac{\exp\bigl(h_{\theta_2}\ln^2 i\bigr)}{R(h_{\theta_1})^i}\right) + c_2\exp(-\delta i h_{\theta_1})\right)^{h_{\theta_2}},$$
поэтому
$$\mathbf{E}|B_n|^h \leqslant cR(h)^n \exp(-\delta n h).$$
Следовательно, выполнены условия A1–A5, и доказываемое утверждение следует из теоремы 2. □

Автор благодарит анонимного рецензента за значительную работу по улучшению текста настоящей статьи.

Список литературы

1. Daley D. J., "Extinction conditions for certain bisexual Galton – Watson branching processes", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **9**:4 (1968), 315–322.
2. Hull D. M., "A necessary condition for extinction in those bisexual Galton – Watson branching processes governed by superadditive mating functions", *J. Appl. Probab.*, **19**:4 (1982), 847–850.
3. Bruss F. T., "A note on extinction criteria for bisexual Galton – Watson processes", *J. Appl. Probab.*, **21**:4 (1984), 915–919.
4. Bagley J. H., "On the asymptotic properties of a supercritical bisexual branching process", *J. Appl. Probab.*, **23**:3 (1986), 820–826.
5. Gonzalez M., Molina M., "On the limit behaviour of a superadditive bisexual Galton – Watson branching process", *J. Appl. Probab.*, **33**:4 (1996), 960–967.
6. Gonzalez M., Molina M., Mota M., "A note on bisexual branching models with immigration", *J. Inter-American Stat. Inst.*, **49** (1999), 81–107.
7. Gonzalez M., Molina M., Mota M., "On the limit behavior of a supercritical bisexual Galton – Watson branching process with immigration of mating units", *Stoch. Anal. Appl.*, **19**:6 (2001), 933–943.
8. Ma S., Xing Y., "Bisexual branching processes with immigration depending on the number of females and males", Workshop on Branching Processes and Their Applications, Lect. Notes in Statist., **197**, 2010, 269–277.
9. Ma S., "Bisexual Galton – Watson branching processes in random environments", *Acta Math. Appl. Sin, Engl. Ser.*, **22** (2006), 419–428.
10. Ma S., Molina M., "Two-sex branching processes with offspring and mating in a random environment", *J. Appl. Probab.*, **46**:4 (2009), 993–1004.
11. Xiao S., Liu X., Li Y., "A. S. convergence rate and L^p-convergence of bisexual branching processes in a random environment and varying environment", *Acta Math. Appl. Sin, Engl. Ser.*, **39** (2023), 337–353.
12. Козлов М. В., "О больших уклонениях ветвящихся процессов в случайной среде: геометрическое распределение числа потомков", *Дискретная математика*, **18**:2 (2006), 29–47.
13. Козлов М. В., "О больших уклонениях строго докритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков", *Теория вероятностей и ее применения*, **54**:3 (2009), 439–465.

14. Bansaye V., Berestycki J., *Large deviations for branching processes in random environment*, 2008, 28 pp., arXiv: 0810.4991.
15. Böinghoff C., Kersting G., "Upper large deviations of branching processes in a random environment — Offspring distributions with geometrically bounded tails", *Stoch. Proc. Appl.*, **120**:10 (2010), 2064–2077.
16. Bansaye V., Böinghoff C., "Lower large deviations for supercritical branching processes in random environment", Proc. Steklov Inst. Math., **282** (2013), 15–34.
17. Дмитрущенков Д. В., "О больших уклонениях ветвящегося процесса в случайной среде с иммиграцией в моменты вырождения", *Дискретная математика*, **26**:4 (2014), 36–42.
18. Дмитрущенков Д. В., Шкляев А. В., "Большие уклонения ветвящихся процессов с иммиграцией в случайной среде", *Дискретная математика*, **28**:3 (2016), 28–48.
19. Buraczewski D., Dyszewski P., "Precise large deviation estimates for branching process in random environment", *Ann. Inst. H. Poincaré. Probab. Statist.*, **58**:3 (2022), 1669–1700.
20. Шкляев А. В., "Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде. II", *Дискретная математика*, **32**:1 (2020), 135–156.
21. Buraczewski D., Damek E., Mikosch T., *Stochastic Models with Power-Law Tails*: *The Equation* $X = AX + B$, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, 2016, 335 pp.
22. Шкляев А. В., "Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде. I", *Дискретная математика*, **31**:4 (2019), 102–115.
23. Ватутин В. А., Топчий В. А., "Максимум критических процессов Гальтона–Ватсона и непрерывные слева случайные блуждания", *Теория вероятн. и ее примен.*, **42**:1 (1997), 21–34.
24. Dharmadhikari S. W., Fabian V., Jogdeo K., "Bounds on the moments of martingales", *Ann. Math. Statist.*, **39**:5 (1968), 1719–1723.

Статья поступила 05.06.2023.