ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 13 Выпуск 2 (2012)

Труды IX Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной 80-летию профессора Мартина Давидовича
Гриндлингера

К РЕШЕНИЮ АДДИТИВНЫХ ЗАДАЧ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

А. М. Касимов (г. Бухара, Узбекистан)

В 1742 г. из переписки Гольдбаха с Эйлером возникли так называемые "проблемы Гольдбаха-Эйлера". Современная формулировка этих проблем выглядит так:

1. Каждое четное число, большее 2, есть сумма двух простых чисел;

2. Каждое нечетное число, большее 5, есть сумма трех простых чисел.

Очевидно, что утверждение 2) содержится в утверждение 1). Эти утверждения соответственно носят название бинарной и тернарной проблемы Гольдбаха-Эйлера. Создание метода тригонометрических сумм по простым числам И. М. Виноградовым [1-3] позволило решить тернарную проблему. Бинарная проблема Гольдбаха-Эйлера рассматривались в работах Н. Г. Чудакова, ван дер Корпута, Т. Эстерманна, которые в 1938 г. показали, что почти все четные числа являются суммами двух простых чисел. Ими доказано, что

если обозначить через $E(X)$ число четных чисел отрезка $[2, x)$ не представимых в виде суммы двух простых чисел, то при любом фиксированном положительном A, имеет место оценка

$$E(X) \ll X(\ln X)^{-A}.$$

В 1972 г., также при помощи метода И. М. Виноградова Vaughan R. C. показал, что

при некоторой положительной постоянной c для достаточно больших X справедливо неравенство

$$E(X) < X\exp(-c\sqrt{\ln x}).$$

В 1975 г. Montgomery H. L. и Vaughan R. C. за счёт дополнения метода тригонометрических сумм по простым числам новыми результатами теории нулей $L-$функций и большого решета усилили предыдущий результат оценки $E(X)$, доказав теорему:

существуют положительные постоянные δ *и* X_0 *такие, что для любого* $X > X_0$ *имеет место неравенство*

$$E(X) < X^{1-\delta}.$$

Вслед за этим в 1980 г. Chen J. и Pan C. указали оценку $\delta, \delta = 0,01$.

Последнее принципиально более значительное продвижение в оценке $E(X)$ было сделано в работах Исраилова М. И., Аллакова И. (см.[4-5]). На основе метода работы Montgomery — Vaughan'а, определив константы в модифицированном неравенстве Gallagher'а и используя работу Лаврика А. Ф. (см. [6]) при реализации идей Бредихина Б. М. они доказали следующие теоремы:

Теорема A. *Пусть* M *— множество четных чисел* $n \leq X$, *не представимых в виде суммы двух простых чисел, и* $E(X)$ *— число элементов этого множества. Тогда при* $X > X_0 \geq \exp(\exp(\exp 9,278))$

$$E(X) < X^{0,999871}$$

и для любого $n \notin M, n \leq X$

$$R(n) = \sum_{n=p_1+p_2} 1 > \left(1,7\frac{n^{\frac{\delta}{8}}}{\ln n} - 1\right)\frac{n^{1-\frac{7}{8}\delta}}{\ln^2 N}, \qquad (\delta = 10,366 \cdot 10^{-5}).$$

Теорема B. *Существует постоянная* X_0 *такая, что для всех* $X > X_0$

$$E(X) < X^{0,9882}$$

и для любого $n \notin M, n \leq X$

$$R(n) > \left(n^{\frac{3\varepsilon}{2}} - 1\right)\frac{n^{1-\frac{3}{4}\delta}}{\ln^2 n}, \qquad \left(\delta = 79,367 \cdot 10^{-4}; 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{10^4}\right).$$

В 1983 г. Chen J. усилил предыдущий результат оценки $E(X)$ показав, что *для достаточно больших* X *справедливо неравенство*

$$E(X) < X^{0,96\ldots}.$$

В 1923 г. Hardy G. H. и Littlewood J. E. указали метод решения тернарной проблемы, близкий по своей схеме методу решения проблемы Варинга. При этом они, применяя некоторые недоказанные теоремы, относящие к теории $L(s,x)$ функций условно вывели асимптотическую формулу для числа $J(N)$ представлений нечетного числа N в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3, \tag{1}$$

где p_1, p_2, p_3- простые числа. Из этой асимптотической формулы справедливость тернарной проблемы для всех достаточно больших нечетных N следует уже тривиально.

В 1937 г. И. М. Виноградов [1-3], используя нетривиальные оценки линейной тригонометрической суммы

$$S(\alpha) = \sum_{p \le N} e^{2\pi i \alpha p}$$

для всех значений α из интервала $0 \le \alpha \le 1$, полученным при помощи созданного им метода оценок тригонометрических сумм по простым числом, вывел асимптотическую формулу для $J(N)$ при достаточно больших N_1 без каких либо дополнительных условий. Отсюда следует существование абсолютной постоянной N_1 такой, что любое нечетное число $N \ge N_1$ представимо в виде суммы трех нечетных простых чисел. Эту постоянную N_1 будем называть постоянной Виноградова.

На основе метода И. М. Виноградова тернарная проблема Гольдбаха-Эйлера рассматривались в работах Ю. В. Линника, Н. Г. Чудакова, Б. М. Бредихина. В 1939 г. (в своей неопубликованной диссертации) К. Г. Бороздкин, следуя методу И. М. Виноградова, подсчитал N_1. По расчетам Бороздкина

$$N_1^{(1)} = \exp(\exp(\exp 41,96)).$$

По его сообщению на третьем Всесоюзном математическом съезде

$$N_1^{(2)} = \exp(\exp 16,038). \tag{2}$$

Можно показать для нечетных чисел, непревосходящих

$$N_1^{(3)} = n_1 + n_2 = 4442109925217 + 2 \cdot 10^9 = 4444109925217 = \exp(\exp 3,3716)$$

справедливость утверждения Гольдбаха проверяется экспериментально или с привлечением дополнительных рассуждений. Такое утверждение следует из работ, где показано, что разность между последовательными простыми

$$d_j = p_{j+1} - p_j \le 652$$

для всех $p_j \le n_1$, и в работе [7] коротко сообщается об экспериментальной проверке справедливости бинарной проблемы для всех четных $2k \in [6, n_2]$.

Можно заключить, что тернарная проблема осталась не доказанной для чисел «внетабличного» промежутка $[N_1^{(3)}, N_1]$.

В 1957 г. В. М. Архангельская доказала, что для всякого $x > x_0 = 10^{10^{8,324}}$ можно указать промежуток $[x, x + (\ln x)^{14}]$ содержащий по крайней мере одно нечетное число представимое в виде суммы трех простых чисел.

Заметим, что если сообщение Бороздкина подтверждено им доказательством, то результат Архангельской является довольно слабым в сравнении с результатом $N_1^{(2)}$.

При условии справедливости расширенной гипотезы Римана на основе кругового метода Харди — Литтлвуда — Рамануджана в 1926 г. Люке Б. дал оценку границы $N_1^{(4)} > 3,6 \cdot 10^{32}$, начиная с которой справедлива асимптотическая формула для числа представлений нечетного числа суммою трех простых чисел.

В 1982 г. Тазов В. П. этим же путем получил условный результат.

$$N_1^{(5)} = \exp(\exp 4,313271) = 10^{32,435} = 2,7227 \cdot 10^{32}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что даже при справедливости расширенной гипотезы Римана вопрос о «внетабличном» промежутке в тернарной проблеме Гольдбаха пока остается правомочным.

После решения И. М. Виноградовым тернарной проблемы Гольдбаха была рассмотрена задача о представлении больших нечетных чисел суммой трех простых, удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям.

В частности, в работе А. А. Султановой рассмотрена задача представлении больших нечетных чисел суммой трех простых, удовлетворяющих условиям:

$p_j \leq \gamma_j \cdot N, j = 1, 2, 3,\quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 -$ *заданные положительные числа, такие что* $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3 \leq \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$.

Целью настоящей работы является следующие:

1. Уточнение постоянной Виноградова N_1 без каких-либо условий;

2. Доказательство асимптотических формул для числа решений уравнений $p_1 + p_2 - p_3 = N$ и $p_1 - p_2 - p_3 = N$ в нечетных простых числах p_1, p_2, p_3 удовлетворяющих условия $\alpha_j < p_j \leq \beta_j N, \quad j = 1, 2, 3, \quad \alpha_j, \beta_j -$ заданные положительные числа;

3. Определение наименьшего значения N_2 и N_3 нечетного натурального числа N, начиная с которого соответственно выше указанные уравнения разрешимы относительно простых чисел p_1, p_2, p_3, удовлетворяющих соответствующим условиям при некоторых конкретных значениях α_j и β_j.

Пусть $J_1(N)$ — число решений уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3 = N \tag{4}$$

в нечетных простых числах p_1, p_2, p_3, а $J_2(N)$ и $J_3(N)$ соответственно выражают число решений уравнений

$$p_1 + p_2 - p_3 = N, \tag{5}$$

$$p_1 - p_2 - p_3 = N, \tag{6}$$

в нечетных простых числах p_1, p_2, p_3, удовлетворяющих условиям

$$\alpha_j N < p_j \leq \beta_j N, \quad (j = 1, 2, 3), \tag{7}$$

где α_j, β_j заданные положительные числа.

Основные результаты работы формулируется в виде следующих теорем

Теорема 1. *Если нечетное $N \geq N_1 = \exp(\exp 13,465)$, то справедливо следующая асимптотическая формула*

$$J_1(N) = \frac{N^2}{2\ln^3 n}\sigma(N) + \theta_1 \cdot C_1 \cdot \frac{N^2}{(\ln N)^{3,9}}, \tag{8}$$

Из Теоремы 1 следует

Следствие 1. *Каждое нечетное число $N \geq N_1 = \exp(\exp 13,465)$ есть сумма трех простых чисел.*

Теорема 2. *Если N — достаточно большое нечетное число, то для функций $J_2(N)$ и $J_3(N)$ справедливы следующие асимптотические формулы*

$$J_2(N) = \frac{N^2}{2\prod\limits_{1\leq j\leq 3}(\ln \beta_j \cdot N)}\sigma(N) f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) + \theta_2 C_2 \frac{N^2(\ln_2 N)\ln_3 N}{\ln^4 N}, \tag{9}$$

$$J_3(N) = \frac{N^2}{2\prod\limits_{1\leq j\leq 3}(\ln \beta_j \cdot N)}\sigma(N) f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) + \theta_3 C_3 \frac{N^2(\ln_2 N)\ln_3 N}{\ln^4 N}, \tag{10}$$

где

$$\ln_2 N = \ln\ln N, \quad \ln_3 N = \ln\ln\ln N, \quad |\theta_j| < 1, \quad j = 1, 2, 3$$

и $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — многочлен от $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Из (9) и (10) соответственно получим

Следствие 2. *Каждое достаточно большое нечетное число N представимо в виде $p_1 + p_2 - p_3 = N$, где p_1, p_2, p_3 простые числа.*

Следствие 3. *Каждое достаточно большое нечетное число N представимо в виде $p_1 - p_2 - p_3 = N$, где p_1, p_2, p_3 простые числа.*

В частности,

при $\alpha_j = 0, \beta_j = 1, \quad j = 1, 2, 3$ получим нижнюю границу $N_2 = \exp(\exp 15)$ нечетных чисел $N \geq N_2 = \exp(\exp 15)$ представимых в виде равенство (5);

при $\alpha_j = 0, \beta_1 = 3, \beta_2 = \beta_3 = 1 \quad j = 1, 2, 3$, получим нижнюю границу $N_3 = \exp(\exp 18)$ нечетных чисел $N \geq N_3 = \exp(\exp 18)$ представимых в виде равенство (6).

Идея доказательств Теорем 1 и 2 подобны, но они во многих технических аспектах отличаются друг от друга.

Вывод оценки нижней границе постоянных N_1, N_2, N_3 являются довольно громоздким в следствии того, что нужны численные оценки большого числа разного рода функций, для которых были известны оценки только типа O — большое и $<<$ — символ Виноградова.

В связи с Теоремами 1 и 2 в работе устанавливается довольно много разных оценок, которые представляют определенный и самостоятельный интерес.

Доказательства Теорем 1 и 2 основана на круговом методе Харди — Литтлвуда — Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова и опирается на ранее известные утверждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Виноградов И. М., Избранные труды. — Москва, Издательство АН СССР, 1952. (1970).

[2] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — Москва, Наука, 1971.

[3] Виноградов И. М., Особые варианты метода тригонометрических сумм. — Москва, Наука, 1976.

[4] Аллаков И., Определение констант в модифицированном плотностном неравенстве Галлахера. // "Вопр. вычисл. и прикл. матем." 62, Ташкент, РИСО АН РУзССР, 1980, с. 42 — 56.

[5] Исроилов М. И., Аллаков И., Определение постоянных входящих в остаточные члены явных формул для $N(T,\chi)$ и $\psi(x,\chi)$. // "Вопр. вычисл. и прикл. матем.", Ташкент, РИСО АН РУзССР, 1980, с. 3 — 22.

[6] Лаврик А.Ф., О приближенном функциональном уравнении для $L-$функции Дирихле. // Труды Московс. матем. общ-ва. Издательство МГУ, Т. 18, 1968, с. 91 — 104.

[7] De Angelis A., Gonella F., Penzo M., Extended verification of the conjectures on prime numbers. // Jst. naz. fis. nucl.Rapp., T.C. 1982, № 2, pp. 1 — 3.

Бухарский государственный университет
Получено 20.04.2012