ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 2 2012

УДК 519.21 : 519.635.2 : 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ[1]

В. С. Парфененкова

Работа посвящена конструкции приближений броуновского движения в моделях, приводящих к стохастическим дифференциальным уравнениям. Для базовых задач математической физики — задач малых колебаний струны и теплопроводности стержня — показано, как можно определить и формализовать случайные возмущения. Для каждой из этих задач построена последовательность случайных величин, сходящаяся по распределению к броуновскому движению, описывающему случайные возмущения. Построенные приближения позволяют использовать их для нахождения приближенных решений стохастических задач.

Ключевые слова: задача Коши, броуновское движение, приближенные решения, непрерывные модели, биномиальные модели, центральная предельная теорема.

V. S. Parfenenkova. Investigation of stochastic problems of mathematical physics.

The paper is devoted to constructing approximations of the Brownian motion in models leading to stochastic differential equations. For fundamental problems of mathematical physics, namely, for the problem of small vibrations of a string and the problem of heat conduction in a rod, approaches to defining and formalizing random perturbations are shown. For each of these problems, a sequence of random variables is constructed that converges in distribution to the Brownian motion describing random perturbations. The constructed approximations can be used for finding approximate solutions of stochastic problems.

Keywords: Cauchy problem, Brownian motion, approximate solutions, continuous models, binomial models, central limit theorem.

1. Введение

Многочисленные модели в различных областях науки, техники и экономики приводят к дифференциальным уравнениям, коэффициенты и неоднородности которых могут содержать случайные составляющие, называемые шумом. Получаемые таким образом стохастические дифференциальные уравнения зачастую представляют собой более реалистичные математические модели по сравнению с детерминированными и являются важными для исследования.

Для задач такого рода “шум” естественно формализовать некоторым процессом $\mathbb{W}(t), t \geq 0$, с независимыми $\mathbb{W}(t_i)$ в разные моменты времени. Однако это приводит к значительным трудностям, поскольку не удается получить даже непрерывности такого процесса по t. Подход Ито к решению стохастических уравнений состоит в формализации слагаемых вида “шум” Δt через приращения некоторого процесса $W(t)$ и по сути сводит дифференциальное уравнение с шумом к интегральному уравнению с интегралом по $dW(t)$. Оказывается, что единственным примером $W(t)$, удовлетворяющим интуитивно понятным условиям непрерывности траекторий, независимости приращений по времени и условию нулевого математического ожидания, является броуновское движение. Среди первых монографий, описывающих подход Ито, следует выделить [2;3], однако наиболее удобным в контексте данной работы является изложение подхода Ито в [15]. Броуновское движение дифференциируемо лишь в обобщенном смысле, его обобщенная производная как раз и будет “шумом”; его называют белым шумом. При этом

[1]Работа выполнена при поддержке программы Рособразования (проект 2.1.1/14118) и РФФИ (проект 10-0196003р.)

стохастическое уравнение в пространстве обобщенных функций можно записать в дифференциальной форме (см., например, [1; 13; 14]), но в данной работе мы будем оперировать только понятием броуновского движения и записывать задачи в приращениях.

В настоящей работе рассмотрены модели из математической физики с учетом случайных возмущений, приводящие к стохастическим задачам Коши с броуновским движением. В каждом конкретном случае показана структура броуновского движения, построены последовательности приближений к броуновскому движению и приближенных (по распределению) решений исходной задачи. В работе исследованы задача малых колебаний струны с учетом случайных возмущений и задачи распределения тепла в стержне со случайными возмущениями на границе и на боковой поверхности стержня.

В работе также приведена задача для цены акций в непрерывном времени и доказана теорема о сходимости решений, полученных в биномиальных моделях с учетом ненулевой процентной ставки, к геометрическому броуновскому движению, определяемому формулой Блэка — Шоулса. Несмотря на то что результаты о сходимости биномиальных моделей являются хорошо известными в финансовой математике (например, в [10] данный результат называется мультипликативным вариантом центральной предельной теоремы), важным представляется тот факт, что доказательство сходимости и приближения к броуновскому движению построено в работе таким же образом, как в задачах математической физики. Учитывая, что сам результат о сходимости к геометрическому броуновскому движению является известным, задача для моделирования цены акций рассмотрена в краткой форме. Более подробное изложение, но в случае нулевой процентной ставки, можно найти в [17].

Полученные в работе конкретные приближения к броуновскому движению позволяют использовать их в конструкции приближенных решений задачи Коши для стохастических дифференциальных уравнений наряду с другими численными методами типа модификации методов Эйлера и Монте-Карло для стохастических уравнений [17]. Настоящая работа не нацелена на исследование порядка точности получаемых приближенных решений, отметим лишь, что, как показано в монографии [4], большинство численных методов детерминированных дифференциальных уравнений, адаптированных к стохастическим, в том числе и только что упомянутые, имеют точность порядка $1/2$ (т. е. ошибка пропорциональна $\sqrt{h}$, корню из шага метода). В данной монографии показано, что для стохастических задач можно построить численные методы, имеющие точность h^γ вплоть до четвертого порядка. Подробное изложение теории численного решения стохастических задач можно найти в [12].

2. Стохастические задачи для процессов математической физики с учетом случайных возмущений

Перед тем как начать исследование указанных во введении задач, необходимо сформулировать основную теорему, на которой будет базироваться доказательство сходимостей, — центральную предельную теорему для серий независимых случайных величин (см., напр., [5]):

Центральная предельная теорема для серий. *Пусть* $\{\xi_{in},\, n = 0, \ldots, n_i;\, i = 0, \ldots, \infty\}$ *есть последовательность независимых в каждой серии случайных величин. Пусть* F_{in} *— функция распределения случайной величины* ξ_{in}*. Если для любого фиксированного* $\varepsilon > 0$ *и некоторого* $\tau > 0$ *выполняются условия*:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{n_i} P(|\xi_{in}| \geq \varepsilon) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{n_i} \left(\int\limits_{|x|<\tau} x^2 dF_{in}(x) - \left(\int\limits_{|x|<\tau} x dF_{in}(x) \right)^2 \right) \xrightarrow[i\to\infty]{} b^2,$

3) $\sum\limits_{n=0}^{n_i} \int\limits_{|x|<\tau} x dF_{in}(x) \xrightarrow[i\to\infty]{} a,$

то функции распределения сумм $F_i = \sum_n \xi_{in}$ *слабо сходятся*[2] *к функции распределения нормальной случайной величины* $N(a, b)$.

Перейдем непосредственно к задачам. Постановка задач этого раздела похожа на постановку в работе [7], однако там стохастические уравнения фактически выводятся через уравнение Колмогорова, тогда как в настоящей работе стохастические уравнения получаются с помощью центральной предельной теоремы для серий: этот же подход использован для вывода уравнений финансовой математики и для всех этих моделей решение уравнений с построенным приближенным броуновским движением можно использовать как приближение к решению уравнений в непрерывном времени.

Задача о малых колебаниях струны с учетом возмущений. Рассмотрим задачу о положении струны, попавшей в перпендикулярный струне поток частиц, передающих при ударе импульс γ или $-\gamma$. Обозначим через T модуль силы натяжения, $u(x,t)$ — смещение струны от положения равновесия. Так как струна туго натянута, то речь идет о малых поперечных колебаниях. Тогда на $[x, x+\Delta x]$ имеем $T\sin(\theta_1) \approx T\operatorname{tg}(\theta_1) = -Tu_x(x,t)$, $T\sin(\theta_2) \approx T\operatorname{tg}(\theta_2) = Tu_x(x+\Delta x, t)$.

По второму закону Ньютона сила $F = ma$. При этом $ma(t) = d\,[mV(t)]/dt \approx (mV(t+\Delta t) - mV(t))/\Delta t$. В детерминированном случае (без учета случайностей) изменение импульса сил ΔI в некотором сечении за время Δt определяется равенством $\Delta I = mV(t+\Delta t) - mV(t) = F\Delta t$.

В случае, когда стержень не подвергается случайным возмущениям, уравнение для положения струны является общеизвестным и представляет собой гиперболическое уравнение в частных производных. Рассмотрим задачу с учетом случайных возмущений. Пусть изменение импульса сил ΔI на участке струны $[x, x+\Delta x]$ за время Δt происходит в соответствии с табл. 1. Здесь λ — константа, отражающая вероятность удара за единицу времени.

Т а б л и ц а 1

Величина изменения импульса	Вероятность изменения
$(Tu_x(x+\Delta x,t) - Tu_x(x,t))\Delta t + \gamma\sqrt{\Delta x}$	$\lambda\Delta t$
$(Tu_x(x+\Delta x,t) - Tu_x(x,t))\Delta t - \gamma\sqrt{\Delta x}$	$\lambda\Delta t$
$(Tu_x(x+\Delta x,t) - Tu_x(x,t))\Delta t$	$1 - 2\lambda\Delta t$

Покажем, что в этом случае в уравнение в частных производных для положения струны добавится стохастическое слагаемое — броуновский лист.

Изменение импульса сил ΔI можно разбить на две составляющие: ΔI_1, равная $(Tu_x(x+\Delta x,t) - Tu_x(x,t))\Delta t$ с вероятностью единица, и ΔI_2, равная значению $+\gamma\sqrt{\Delta x}$ с вероятностью $\lambda\Delta t$, значению $-\gamma\sqrt{\Delta x}$ с вероятностью $\lambda\Delta t$ и нулю с вероятностью $(1 - 2\lambda\Delta t)$.

Первая составляющая $\Delta I_1 = \Delta_{[x,x+\Delta x],[t,t+\Delta t]} I_1$ на каждом $([x, x+\Delta x], [t, t+\Delta t])$ является постоянной величиной: $E[\Delta I_1] = (Tu_x(x+\Delta x,t) - Tu_x(x,t))\Delta t$, $Var[\Delta I_1] = 0$. Исследуем вторую — случайную составляющую ΔI_2:

$$E[\Delta I_2] = +\gamma\sqrt{\Delta x}\lambda\Delta t - \gamma\sqrt{\Delta x}\lambda\Delta t + 0\cdot(1 - 2\lambda\Delta t) = 0,$$

$$Var[\Delta I_2] = E[\Delta I - E\Delta I]^2 = E[\Delta I^2] - (E[\Delta I])^2$$
$$= \gamma^2\Delta x\lambda\Delta t + \gamma^2\Delta x\lambda\Delta t + 0\cdot(1 - 2\lambda\Delta t) - 0^2 = 2\gamma^2\lambda\Delta t\Delta x.$$

[2] Под слабой сходимостью F_i к F ($F_i \xrightarrow[i\to\infty]{} F$) мы понимаем сходимость $F_i(x)$ к $F(x)$ во всех точках x непрерывности функции $F(x)$.

Покажем, что ΔI_2 распределена по нормальному закону $N(0, \sqrt{2\gamma^2\lambda\Delta t\Delta x})$. Применим центральную предельную теорему для серий, рассматривая разбиение участка струны $[x, x+\Delta x)$ на i равновеликих полуинтервала. В качестве независимых в каждой серии случайных величин ξ_{in} рассмотрим импульс, приобретенный струной в результате ударов, попавших на n-й полуинтервал за время $[t, t+\Delta t]$:

$$\xi_{in} = \Delta_{[x+\frac{n}{i}\Delta x, x+\frac{n+1}{i}\Delta x), [t,t+\Delta t]} I_2. \tag{1}$$

Для выбранных $\{\xi_{in},\, n = 0, \ldots, n_i;\, i = 0, \ldots, \infty\}$ все условия центральной предельной теоремы для серий выполнены, поэтому функция распределения от ΔI_2 сходится поточечно к нормальному распределению. Заметим, что $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_{in} = \Delta_{[x,x+\Delta x),[t,t+\Delta t]} I_2 = \Delta_{[x,x+\Delta x],[t,t+\Delta t]} I_2$, значит, функция распределения от $\Delta_{[x,x+\Delta x],[t,t+\Delta t]} I_2$ имеет распределение $N(0, \sqrt{2\gamma^2\lambda\Delta t\Delta x})$.

Учитывая, что ΔI_1 и ΔI_2 независимы, получим, что функция распределения от $\Delta I = \Delta I_1 + \Delta I_2$ на промежутке $[x, x+\Delta x]$ за время $[t, t+\Delta t]$ совпадает с функцией распределения от $[(Tu_x(x+\Delta x, t) - Tu_x(x,t))\Delta t] + \sqrt{2\gamma^2\lambda}\,\eta\sqrt{\Delta t\Delta x}$, где распределение η является стандартным нормальным, т. е. $N(0,1)$.

Покажем, что при Δt и Δx, сходящихся к нулю, случайные величины $\eta\sqrt{\Delta t\Delta x}$ сходятся к приращению броуновского листа (brownian sheet) $W(x,t)$, определение которого для удобства приведем ниже (см., например, [11]).

О п р е д е л е н и е. Пусть μ — случайная мера на $\mathbb{R}^2_+$ обладает следующими свойствами:

1) Для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^2_+$ случайная величина $\mu(A)$ нормально распределена с нулевым математическим ожиданием и вариацией, равной площади множества A, т. е. μ является гауссовой случайной мерой на $\mathbb{R}^2_+$.

2) Для непересекающихся множеств A_1 и A_2 случайные величины $\mu(A_1)$ и $\mu(A_2)$ независимы и $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Тогда случайная величина $W(x,t) = \mu([0,x] \times [0,t])$ называется *броуновским листом.*

Известно, что броуновский лист непрерывен по x и по t, однако не дифференцируем ни в одной точке. Заметим, что аналогично можно определить броуновский лист на $\mathbb{R}^2$ и на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Броуновский лист можно представлять себе как броуновское движение для двумерной случайной величины.

Покажем, что $\eta\sqrt{\Delta t\Delta x}$ стремится к приращению броуновского листа $W(x,t)$. Для этого положим $\tilde{W}(x,t) = \eta\sqrt{t \cdot x}$, тогда можно найти случайную меру $\tilde{\mu}$ со свойствами 1)–2), такую что $\tilde{W}(x,t) = \tilde{\mu}([0,x] \times [0,t])$. Таким образом, по определению $\tilde{W}(x,t)$ является броуновским листом. Имеет место двойное равенство

$$\eta\sqrt{\Delta t\Delta x} = \tilde{W}(\Delta x, \Delta t) = \tilde{\mu}([0, \Delta x] \times [0, \Delta t]).$$

Зафиксируем точки t и x и осуществим сдвиг центра координат из точки $[0,0]$ в точку $[x,t]$. При этом свойства меры 1)–2) сохраняются. Меру в сдвинутой системе координат обозначим через μ. Имеет место связь между мерами

$$\tilde{\mu}([0,\Delta x] \times [0, \Delta t]) = \mu([x, x+\Delta x] \times [t, t+\Delta t]).$$

Воспользуемся свойством 2) меры, имеем

$$\mu([x, x+\Delta x] \times [t, t+\Delta t]) = \mu([0, x+\Delta x] \times [0, t+\Delta t]) - \mu([0,x] \times [0,t])$$

$$- \mu([0,x] \times [t, t+\Delta t]) - \mu([x, x+\Delta x] \times [0,t]).$$

Теперь определим случайную величину $W(x,t) = \mu[0,\Delta x] \times [0, \Delta t]$. По определению $W(x,t)$ является броуновским листом. Первые два слагаемых в правой части уравнения превратятся в приращение $W(x,t)$. Покажем, что оставшиеся два слагаемых пойдут к нулю при $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$. Проделав аналогичные процедуры сдвига начала координат, получим $W_1[x, \Delta t] :=$

$\mu_1([0,x]\times[0,\Delta t]) = \mu([0,x]\times[t,t+\Delta t])$ (сдвиг центра координат из точки $[0,0]$ в точку $[0,t]$), $W_2[\Delta x,t] := \mu_2([0,\Delta x]\times[0,t]) = \mu([x,x+\Delta x]\times[0,t])$ (сдвиг центра координат из точки $[0,0]$ в точку $[x,0]$).

В итоге получаем

$$\eta\sqrt{\Delta t\Delta x} = W(x+\Delta x,t+\Delta t) - W(x,t) - W_1(x,\Delta t) - W_2(\Delta x,t),$$

где $W_1(x,\Delta t) \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} 0$, $W_2(\Delta x,t) \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 0$.

Теперь, учитывая, что импульс равен произведению массы на скорость, получим, что изменение импульса может быть представлено в виде $\Delta I = \rho\Delta x(u_t(x,t+\Delta t) - u_t(x,t))$. Приравнивая полученные представления ΔI, имеем

$$\rho\Delta x(u_t(x,t+\Delta t) - u_t(x,t)) = [(Tu_x(x+\Delta x,t) - Tu_x(x,t))\Delta t]$$
$$+ \sqrt{2\gamma^2\lambda}[W(x+\Delta x,t+\Delta t) - W(x,t)] + d(\Delta x,\Delta t),$$

где $W(x,t)$ — броуновский лист по двумерной переменной (x,t), а случайная величина $d(\Delta x,\Delta t)$ стремится к нулю при $\Delta x\to 0$ и $\Delta t\to 0$. Отсюда, в предположении существования вторых производных u_{tt} и u_{xx}, получаем следующий результат.

Теорема 1. *Задача Коши для уравнения малых колебаний струны с учетом случайных возмущений, определенных в табл.* 1, *может быть записана в приращениях следующим образом*:

$$\rho u_{tt}(x,t)dtdx = Tu_{xx}(x,t)dtdx + \sqrt{2\gamma^2\lambda}dW(x,t),\ t\ge t_0,\quad u(x,t_0) = u_1(x),\ u_t(x,t_0) = u_2(x),$$

где $W(x,t)$ *— броуновский лист.*

Данное уравнение является интегральным уравнением (по t и по x), коротко записанным в форме Ито (в форме приращений). Приращение броуновского листа в уравнении отражает приращение импульса, связанного со случайными силами, вызывающими случайные колебания.

С учетом результатов [8; 18] о представлении броуновского листа $W(x,t)$ в виде произведения броуновских движений по пространственной и временной переменной полученный процесс $W(x,t)$ можно рассматривать как гильбертово-значный винеровский процесс (бесконечномерное броуновское движение) по переменной t (см., например, [1; 16]), т. е. винеровский процесс по переменной t со значениями в пространстве функций, зависящих от x, в данном случае пространств типа соболевских.

З а м е ч а н и е 1. В данной задаче, рассматривая изменение импульса в табл. 1, вывели итоговое уравнение, содержащее броуновский лист. Оно является интегральным по обеим переменным — и по t, и по x. Покажем, что, варьируя значения величины изменения импульса и вероятности, можно получить уравнения с броуновским движением как по переменной t, так и по переменной x и даже просто детерминированные.

Если изменение импульса ΔI распределено как указано в табл. 2, то при помощи аналогичных рассуждений доказываем, что случайная величина $\Delta_{[x,x+\Delta x],[t,t+\Delta t]}I_2 = \Delta I_2$ имеет

Т а б л и ц а 2

Величина изменения импульса	Вероятность изменения
$(Tu_x(x+\Delta x,t) - Tu_x(x,t))\Delta t + \gamma\Delta x$	$\lambda\Delta t$
$(Tu_x(x+\Delta x,t) - Tu_x(x,t))\Delta t - \gamma\Delta x$	$\lambda\Delta t$
$(Tu_x(x+\Delta x,t) - Tu_x(x,t))\Delta t$	$1-2\lambda\Delta t$

Т а б л и ц а 3

Величина изменения импульса	Вероятность изменения
$(Tu_x(x+\Delta x,t)-Tu_x(x,t))\Delta t+\gamma(\Delta x)^2$	$\lambda\Delta t$
$(Tu_x(x+\Delta x,t)-Tu_x(x,t))\Delta t-\gamma(\Delta x)^2$	$\lambda\Delta t$
$(Tu_x(x+\Delta x,t)-Tu_x(x,t))\Delta t$	$1-2\lambda\Delta t$

Т а б л и ц а 4

Величина изменения импульса	Вероятность изменения
$(Tu_x(x+\Delta x,t)-Tu_x(x,t))\Delta t+\gamma\sqrt{\Delta x}$	$\lambda\Delta t^2$
$(Tu_x(x+\Delta x,t)-Tu_x(x,t))\Delta t-\gamma\sqrt{\Delta x}$	$\lambda\Delta t^2$
$(Tu_x(x+\Delta x,t)-Tu_x(x,t))\Delta t$	$1-2\lambda\Delta t^2$

распределение $N(0,\sqrt{2\gamma^2\lambda\Delta t\Delta x^2})$ и представима в виде $\Delta I_2=\sqrt{2\gamma^2\lambda}(\eta\sqrt{\Delta t})\Delta x \xrightarrow[\Delta t\to 0,\Delta x\to 0]{} dW(t)dx$. В итоге приходим к стохастическому уравнению в приращениях

$$\rho u_{tt}(x,t)dt=Tu_{xx}(x,t)dt+\sqrt{2\gamma^2\lambda}dW(t),$$

где $W(t)$ — броуновское движение. Уравнение является интегральным по переменной t.

Если изменение импульса ΔI распределено в соответствии с данными табл. 3, то при помощи аналогичных рассуждений доказываем, что случайная величина ΔI_2 имеет распределение $N(0,\sqrt{2\gamma^2\lambda\Delta t\Delta x^4})$ и представима в виде $\Delta I_2=\sqrt{2\gamma^2\lambda}(\eta\sqrt{\Delta t})(\Delta x)^2 \xrightarrow[\Delta t\to 0,\Delta x\to 0]{} dW(t)(dx)^2$. В итоге приходим к стохастическому уравнению в приращениях

$$\rho u_{tt}(x,t)dt=Tu_{xx}(x,t)dt+\sqrt{2\gamma^2\lambda}dW(t)dx,$$

которое является детерминированным дифференциальным уравнением (достаточно сначала зафиксировать Δt и устремить $\Delta x\to 0$)

$$\rho u_{tt}(x,t)=Tu_{xx}(x,t).$$

Также отметим, что если менять степень по временной переменной, то можно получить уравнение с броуновским движением по пространственной переменной. Например, в соответствии с табл. 4 получим стохастическое уравнение в приращениях

$$\rho u_{tt}(x,t)dx=Tu_{xx}(x,t)dx+\sqrt{2\gamma^2\lambda}dW(x),$$

где $W(x)$ — броуновское движение. Уравнение является интегральным по переменной x.

Задача о теплопроводности стержня с учетом случайных возмущений на боковой поверхности. Рассмотрим задачу о переносе тепла внутри стержня. Каждое сечение стержня считаем изотермическим. Пусть $u(x,t)$ — температура стержня в сечении x в момент времени t. Стержень, подвергаясь случайному тепловому воздействию (аналогично случайным ударам для струны), получает количество тепла γ или $-\gamma$. Здесь можно провести аналогичные предыдущей задаче рассуждения. Проделаем это кратко. По закону изменения количества тепла в стержне за время Δt в сечении x имеем $\Delta Q=cm\Delta u$, где c — удельная теплоемкость, m — масса стержня. Пусть q — количество тепла, переносимого за единицу времени через единичную площадку в положительном направлении. Если направление противоположно, то соответствующее слагаемое берем со знаком минус. По закону Фурье $q=-\mu u_x$. Пусть изменение количества тепла в стержне распределено в соответствии с данными табл. 5, здесь λ — константа, отражающая вероятность теплового воздействия за единицу времени.

Т а б л и ц а 5

Изменение количества тепла	Вероятность изменения
$(\mu u_x(x+\Delta x,t)-\mu u_x(x,t))S\Delta t+\gamma\sqrt{\Delta x}$	$\lambda\Delta t$
$(\mu u_x(x+\Delta x,t)-\mu u_x(x,t))S\Delta t-\gamma\sqrt{\Delta x}$	$\lambda\Delta t$
$(\mu u_x(x+\Delta x,t)-\mu u_x(x,t))S\Delta t$	$1-2\lambda\Delta t\Delta x$

Т а б л и ц а 6

Изменение температуры	Вероятность изменения
$\Delta b=-\gamma\sqrt{\Delta t}$	λ
$\Delta b=\gamma\sqrt{\Delta t}$	λ
$\Delta b=0$	$1-2\lambda$

Изменение количества тепла ΔQ может быть записано следующим образом:

$$\Delta Q=c\rho(u(\xi,t+\Delta t)-u(\xi,t))S\Delta x.$$

Далее, почти дословно повторяя рассуждения предыдущей задачи, получаем

$$c\rho S(u(\xi,t+\Delta t)-u(\xi,t))\Delta x=\mu S(u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t))\Delta t+\gamma\sqrt{2\lambda}\,\eta\sqrt{\Delta t\Delta x},$$

здесь η — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение. Аналогично предыдущей задаче доказывается, что $\eta\Delta t\Delta x$ стремится к приращению броуновского листа $W(x,t)$ по двумерной переменной $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$. В предположении существования u_t и u_{xx}, справедлива

Теорема 2. *Задача Коши для распределения тепла в стержне с учетом случайных возмущений, определенных в табл.* 5*, может быть записана в приращениях следующим образом*:

$$c\rho S u_t(x,t)dtdx=\mu S u_{xx}(x,t)dtdx+\gamma\sqrt{2\lambda}dW(x,t),\ t\geq t_0,\quad u(x,t_0)=u_1(x),\ u_t(x,t_0)=u_2(x),$$

где $W(x,t)$ *— броуновский лист.*

Заметим, что аналогично задаче о колебаниях струны, варьируя величину изменения количества тепла и вероятности, можно получить уравнения с одномерным броуновским движением по любой из переменных и даже просто детерминированные.

Задача о теплопроводности стержня с учетом случайных возмущений на границе. При исследовании предыдущих двух задач мы не подчеркивали специфику поведения на границе, т. е. считали, что струна или стержень бесконечны. Теперь мы исследуем задачу о распределении тепла в стержне в другой постановке, полагая, что стенки стержня изолированы, и учитывая в качестве внешних воздействия на концах стержня. Без ограничения общности рассматриваем задачу на отрезке $[0,1]$. Температуру левого конца стержня варьируем, на правом конце поддерживаем нулевую температуру. Покажем, что случайность, в отличие от предыдущей задачи, появится не в самом уравнении, а в граничном условии на левом конце. Воспользовавшись законом изменения количества тепла и законом Фурье, выводим равенство $c\rho S\Delta x(u(\zeta,t+\Delta t)-u(\zeta,t))=S\Delta t(\mu u_x(x+\Delta x,t)-\mu u_x(x,t))$, где ζ — некоторая промежуточная точка. Перейдем к пределу при Δt и Δx, стремящихся к нулю, получим следующую задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$c\rho u_t(x,t)dtdx=\mu u_{xx}(x,t)dtdx,\quad u(x,0)=\alpha(x),\quad u(0,t)=b(t),\quad u(1,t)=0,$$

где $b(t)$ — некоторая заданная случайная функция. Первоначальное распределение температуры $\alpha(x)$ в стержне считаем известным. Предположим, что случайная величина $\Delta b=b(t)-b(t-\Delta t)$ имеет распределение, представленное в табл. 6. Тогда $E[\Delta b]=0,\quad Var[\Delta b]=2\lambda\gamma^2\Delta t$.

Рассмотрим некоторый промежуток времени $[t, t+\Delta t]$. Пусть $\xi_{in} = \Delta_{[t+\frac{n}{i}\Delta t, t+\frac{n+1}{i}\Delta t]}b$. Применим центральную предельную теорему для серий. Проведя аналогичные предыдущим задачам рассуждения, получаем, что стохастическое дифференциальное уравнение для функции изменения температуры на левом конце стержня имеет вид $db(t) = \gamma\sqrt{2\lambda}dW(t)$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Распределение тепла в стержне с учетом случайного внешнего воздействия на границу, определенного в табл.* 6*, может быть записано в виде следующей стохастической системы*:

$$\begin{cases} u_t(x,t)dtdx = \dfrac{\mu}{c\rho}u_{xx}(x,t)dtdx, \\ u(x,0) = \alpha(x), \\ u(0,t) = b(t)\colon db(t) = \gamma\sqrt{2\lambda}dW(t), \quad b(0) = b_0 = \alpha(0), \\ u(1,t) = 0, \end{cases}$$

где $W(t)$ *— броуновское движение.*

В данном случае получено броуновское движение от одномерной переменной $t \in \mathbb{R}_+$, так как рассматриваемая случайность имела зависимость только от временной координаты. Отметим, что в общем случае случайность может входить как в итоговое уравнение, так и в оба граничных условия.

Замечание 2 (о существовании и единственности рассмотренных задач). Единственность решений всех рассмотренных в этом разделе задач вытекает из стандартных рассуждений от противного.

Существование решений для уравнения теплопроводности с броуновским движением по t следует из [6, теорема 1.1]. Существование решений для уравнения колебаний струны с броуновским движением по t получается аналогично через сведение к системе двух уравнений, каждое с производной первого порядка по переменной t. Другой способ доказательства существования дает рассмотрение изучаемых уравнений как абстрактных уравнений первого порядка с оператором A в гильбертовом пространстве H в форме Ито (см., например, [1; 16]) — для уравнения теплопроводности с оператором A, равным оператору дифференцирования d^2/dx^2 в пространстве $H = L_2(\mathbb{R})$, для уравнения колебаний с соответствующим матричным оператором в пространстве $H = L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R})$. Существование решения в случае броуновского листа можно получить, рассматривая вместо пространства L_2 пространства Иванова [1], которые в случае дифференциального оператора совпадают с соболевскими пространствами.

3. Стохастическая задача Коши для цен акций

Рассмотрим биномиальную модель цены акций (пакета акций) с учетом ненулевой процентной ставки r. Развивая идеи [17], введем понятие риск-нейтрального случайного блуждания, при этом риск-нейтральные вероятности берутся с учетом процентной ставки. Построим приближения к решению задачи Коши для уравнения цены акций в модели непрерывного времени

$$dS(t) = rS(t) + \sigma S(t)dW(t), \quad t \geq 0, \quad S(0) = S_0, \tag{2}$$

по серии биномиальных моделей.

Рассмотрим биномиальную it-периодную модель цены акций на временном промежутке $[0, t]$ с повышающим множителем $u_i = \exp(\sigma/\sqrt{i})$ и понижающим множителем $d_i = - \exp(\sigma/\sqrt{i})$, где σ — положительная константа, которая определяет волатильность[3] предельной цены акции. То есть $u_i = \dfrac{S_1(up)}{S_0} = \dfrac{S_2(up)}{S_1} = \ldots$, $\quad d_i = \dfrac{S_1(down)}{S_0} = \dfrac{S_2(down)}{S_1} = \ldots$, где событие up означает повышение цены акции на текущем шаге биномиальной модели, $down$ — понижение.

[3]Статистический показатель, характеризующий тенденцию изменчивости цены, мера риска использования финансового инструмента (акции) за заданный период времени. Чаще всего вычисляется среднегодовая волатильность.

Если $r \geq 0$ — процентная ставка, то r/i — процентная ставка за $1/it$-ю промежутка $[0,t]$. Для обеспечения безарбитражности модели считаем, что $0 < d < 1+r < u$, и риск-нейтральные вероятности определяем следующим образом:

$$\tilde{p}_i = \frac{1 + \frac{r}{i} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{i}}}}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{i}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{i}}}}, \quad \tilde{q}_i = \frac{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{i}}} - 1 - \frac{r}{i}}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{i}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{i}}}}.$$

Тогда имеет место равенство $(1+r)S_0 = \tilde{p}_i S_1(up) + \tilde{q}_i S_1(down)$, что и подтверждает безарбитражность.

Пусть $\omega^{(i)} = (\omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}, \dots, \omega_n^{(i)})$ — случайный вектор, где $\omega_l^{(i)}$ принимает значение 1 или -1 с вероятностями $\tilde{p}_i$ и $\tilde{q}_i$, соответственно. Можно проверить, что $E[\omega_l^{(i)}] = \tilde{p}_i - \tilde{q}_i$, $Var[\omega_l^{(i)}] = 4\tilde{p}_i\tilde{q}_i$.

Введем $L_n, n = 0,1,2,\dots$ — риск-нейтральные случайные блуждания: $L_0 := 0$, $L_n := \sum_{l=1}^{n} \omega_l^{(i)}$. Отметим, что приращения L_n по непересекающимся интервалам времени независимы. Воспользовавшись тем, что $E[\omega_l^{(i)} \cdot \omega_j^{(i)}] = (\tilde{p}_i - \tilde{q}_i)$ при $l \neq j$, а $E[(\omega_l^{(i)})^2] = 1$, получаем равенства $E[L_{n_{l+1}} - L_{n_l}] = (\tilde{p}_i - \tilde{q}_i)(n_{l+1} - n_l)$, $\quad Var[L_{n_{l+1}} - L_{n_l}] = 4\tilde{p}_i\tilde{q}_i(n_{l+1} - n_l)$.

Для целых it определим риск-нейтральное масштабированное случайное блуждание $W^{(i)}(t) := L_{it}/\sqrt{i}$: если it не является целым, то значение $W^{(i)}(t)$ определяем как линейную интерполяцию между двумя ближайшими целыми точками is и iu. Приращения $W^{(i)}(t)$ являются независимыми, и имеют место равенства

$$E[W^{(i)}(t) - W^{(i)}(s)] = \sqrt{i}(\tilde{p}_i - \tilde{q}_i)(t-s), \quad Var[W^{(i)}(t) - W^{(i)}(s)] = 4\tilde{p}_i\tilde{q}_i(t-s). \tag{3}$$

Используя введенные случайные процессы и центральную предельную теорему, докажем сходимость решений, полученных в биномиальной модели, к решениям уравнения (2).

Теорема 4. *Цена акций $S_i(t)$, полученная в биномиальной модели с риск-нейтральными мерами $\tilde{p}_i, \tilde{q}_i$, взятыми с учетом процентной ставки, стремится по распределению при $i \to \infty$ к геометрическому броуновскому движению $S(t) = S(0)\exp\left(\sigma W(t) + \left(r - \sigma^2/2\right)t\right)$, которое является ценой акций в модели непрерывного времени, т. е. решением задачи* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим значение цены акций в построенной биномиальной модели при некотором фиксированном значении i. Пусть количество повышений равно U_{it}, а количество понижений равно D_{it}. Тогда $it = U_{it} + D_{it}$, $L_{it} = U_{it} - D_{it}$. Таким образом, $S_i(t) = S(0)u_i^{U_{it}} d_i^{D_{it}} = S(0)e^{\frac{\sigma}{\sqrt{i}}L_{it}}$, где $S(0)$ — начальное значение цены акции. Используя разложение в ряд Тейлора, можно проверить, что $E\Big[\dfrac{\sigma}{\sqrt{i}}L_{it}\Big] \xrightarrow[i\to\infty]{} \Big(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\Big)t$, $\quad Var\Big[\dfrac{\sigma}{\sqrt{i}}L_{it}\Big] \xrightarrow[i\to\infty]{} \sigma^2 t$.

Теперь покажем, что $(\sigma/\sqrt{i})L_{it}$ сходятся по распределению к $\left(\sigma W(t) + \left(r - \sigma^2/2\right)t\right)$, где $W(t)$ — броуновское движение. Для этого воспользуемся центральной предельной теоремой для серий при $\xi_{in} = (\sigma/\sqrt{i})\,\omega_n^{(i)}$, $n = 1,2,\dots,it$. В каждой серии (т. е. ξ_{in}, $n = 1,2,\dots,it$) эти случайные величины независимы, так как определяют поведение в разные промежутки времени. Имеем

$$P\big(\omega_n^{(i)} = -1\big) = \frac{1 + \frac{r}{i} - e^{-\sigma/\sqrt{i}}}{e^{\sigma/\sqrt{i}} - e^{-\sigma/\sqrt{i}}}, \qquad P\big(\omega_n^{(i)} = 1\big) = \frac{e^{\sigma/\sqrt{i}} - 1 - \frac{r}{i}}{e^{\sigma/\sqrt{i}} - e^{-\sigma/\sqrt{i}}}.$$

Можно проверить, что условия центральной предельной теоремы выполнены и

$$E\Big[\frac{\sigma}{\sqrt{i}}L_{it}\Big] \xrightarrow[i\to\infty]{} \Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)t, \quad Var\Big[\frac{\sigma}{\sqrt{i}}L_{it}\Big] \xrightarrow[i\to\infty]{} \sigma^2 t.$$

Учитывая равенства

$$\sum_{n=0}^{it} \int\limits_{|x|<\tau} x\,dF_{in}(x) = E\Big[\frac{\sigma}{\sqrt{i}}L_{it}\Big], \quad \sum_{n=0}^{it} \Bigg(\int\limits_{|x|<\tau} x^2 dF_{in}(x) - \Bigg(\int\limits_{|x|<\tau} x\,dF_{in}(x) \Bigg)^2 \Bigg) = Var\Big[\frac{\sigma}{\sqrt{i}}L_{it}\Big],$$

получаем, что при каждом $t \geq 0$ случайные величины $(\sigma/\sqrt{i})\sum_{n=0}^{it}\omega_n^{(i)} = (\sigma/\sqrt{i})L_{it}$ сходятся по распределению к нормально распределенной случайной величине $\sigma W(t)$, сдвинутой на $(r-\sigma^2/2)t$, где $W(t)$ имеет распределение $N(0,\sqrt{t})$. Таким образом, имеет место сходимость $(\sigma/\sqrt{i})L_{it}$ по распределению к $\big(\sigma W(t) + \big(r-\sigma^2/2\big)\,t\big)$. Следовательно, $\log(S_i(t)) = \log(S(0)) + (\sigma/\sqrt{i})L_{it}$ при $i \to \infty$ при каждом $t \geq 0$ сходятся по распределению к $\log(S(t)) = \log(S(0)) + \sigma W(t) + \big(r-\sigma^2/2\big)\,t$, что эквивалентно сходимости по распределению $S_i(t)$ к $S(t) = S(0)\exp\big(\sigma W(t) + \big(r-\sigma^2/2\big)\,t\big)$.

Можно проверить, что полученный процесс $W(t)$, $t \geq 0$ является броуновским движением. Итак, решения биномиальной модели с учетом процентной ставки сходятся по распределению к геометрическому броуновскому движению, которое является решением уравнения (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Альшанский М.А., Мельникова И.В.** Регуляризованные и обобщенные решения бесконечномерных стохастических задач. // Мат. сб. Т. 202, № 11. 2011. С. 3–31.
2. **Гихман И.И., Скороход А.В.** Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965. 654 с.
3. **Ито К., Маккин Г.** Диффузионные процессы и их траектории / ред. Е.Б. Дынкина. Москва: Мир, 1968. 394 с.
4. **Кузнецов Д.Ф.** Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. СПб: Изд-во С.-петерб. гос. ун-та, 2001. 712 с.
5. **Петров В.В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит, 1987. 31 с. (Теория вер. и мат. стат; вып. 39.)
6. **Розовский Б.Л.** О стохастических дифференцальных уравнениях в частных производных // Мат. сб. 1975. Т. 96(138), № 2. С. 314–341.
7. **Allen E.J.** Derivation of stochastical partial differential equations // Stoch. Anal. Appl. 2008. Vol. 26, no. 2. P. 357–378.
8. **Cabana E.M.** The vibrating theorem forced by white noise // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete. 1970. Vol. 15. P. 111–130.
9. **Curtain R.F., Pritchard A.J.** Infinite dimensional linear systems theory. New York: Springer-Verlag, 1978. 297 p. (Lect. Notes in Control and Information Sciences; vol. 8.)
10. **Follmer H., Schied A.** Stochastic finance. An introduction in discrete time. Berlin; New York: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2002. 422 p.
11. **Hamza K., Klebaner F.C.** On solutions of first order stochastic partial differential equations // Far East J. Theor. Statist. 2006. Vol. 1, no. 1. P. 13–25.
12. **Milstein G.N., Tretyakov M.V.** Stochastic numerics for mathematical physics. New York: Springer-Verlag, 2004. 594 p.
13. **Melnikova I.V.** Regularized solutions to Cauchy problems well posed in the extended sense // Integral Transforms Spec. Funct. 2006. Vol. 17, no. 2–3. P. 185–191.
14. **Melnikova I.V., Filinkov A.I., Alshansky M.A.** Abstract stochastic equations II. Solutions in spaces of abstract stochastic distributions. // J. Math. Sci. 2003. Vol. 116, no. 5. P. 3620–3656.
15. **Oksendal B.** Stochastic differential equations: an introduction with applications. 5ed. New York: Springer-Verlag, 2000. 352 p.
16. **Prato G. Da, Zabczyk J.** Stochastic equations in infinite dimensions. New York: Cambridge Univ. Press, 1992. 454 p. (Encycl. Math. Appl.; vol. 45.)
17. **Shreve S.E.** Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models. New York: Springer-Verlag, 2004. 550 p.
18. **Walsh J.B.** An introduction to stochastic partial differential equations // Lect. Notes in Math. Vol. 1180. Berlin: Springer, 1986. P. 265–439.

Парфененкова Валентина Сергеевна
мл. науч. сотрудник
аспирант
Уральский федеральный университет
e-mail: vika8887@e1.ru

Поступила 13.09.2010