С. В. Кисляков, Количественный аспект теорем об исправлении. II, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1994, том 217, 83–91

С. В. Кисляков

КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АСПЕКТ ТЕОРЕМ ОБ ИСПРАВЛЕНИИ. II

1. Как и в написанной довольно давно первой статье автора на ту же тему (см. [1]), речь здесь пойдет об оценках в классической теореме Меньшова, гласящей, что всякая измеримая функция изменением на множестве произвольно малой меры может быть превращена в функцию с равномерно сходящимся рядом Фурье. Пусть $\mathbb{T}$ – единичная окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, m – нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$. Обозначим через U пространство таких функций f на $\mathbb{T}$, что $\sum_{k\leqslant j\leqslant n} \widehat{f}(j)z^j \to f$ равномерно по z, когда $n \to \infty$, а $k \to -\infty$. В U вводится естественная норма

$$\|f\|_U = \sup\left\{ \Big| \sum_{k\leqslant j\leqslant n} \widehat{f}(j)\zeta^j \Big| : \zeta \in \mathbb{T}, \quad k,n \in \mathbb{Z}, \quad k \leqslant n \right\}.$$

Основной результат из [1] утверждает, что для любой функции F из $C(\mathbb{T})$ и любого ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, найдется такая функция G из U, что $m\{F \neq G\} \leqslant \varepsilon$ и $\|G\|_U \leqslant \mathrm{const}\,(1 + \log \varepsilon^{-1})\|F\|_\infty$. В [1] отмечалось, что множитель $1 + \log \varepsilon^{-1}$ нельзя заменить ни на что, растущее при $\varepsilon \to \infty$ медленнее, поэтому тема казалась исчерпанной. Меня побудил вернуться к ней вопрос Б. С. Кашина: нельзя ли обеспечить еще и оценку $\|G\|_\infty \leqslant \mathrm{const}\,\|F\|_\infty$ с постоянной, не зависящей от ε? Оказалось, что можно не только добиться этого, но и получить другие существенные уточнения.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $\delta > 0$, $F \in C(\mathbb{T})$, $E = \{t \in \mathbb{T} : F(t) \neq 0\}$. *Тогда найдется такая функция* G *из* U, *что* $|G| + |F - G| \leqslant (1+\delta)|F|$, $m\{F \neq G\} \leqslant \varepsilon m E$ *и* $\|G\|_U \leqslant \mathrm{const}(1 + \log \varepsilon^{-1})\|F\|_\infty$. *Постоянная в последнем неравенстве универсальна (не зависит от* $\varepsilon, \delta, F, E$ *и т.п.).*

Замечания. 1. Автору не известно, можно ли взять $\delta = 0$. Однако ввиду теоремы 2 в конце заметки число $\delta > 0$ можно рассматривать здесь как “плату за непрерывность”.

2. Доказательство даст функцию G, для которой отношение $G/|F|$ лежит в $C(\mathbb{T})$ (считаем, что $0/0 = 0$).

3. Если утверждение теоремы 1 справедливо хотя бы при одном $\varepsilon < 1$, то итерациями нетрудно восстановить логарифмическую

оценку в полном объеме. Иными словами, уточнения в сравнении с [1] столь велики, что "центр тяжести" сильно сместился в их сторону.

Изложенное ниже доказательство теоремы 1 в общем плане повторяет схему рассуждений из [1]. В основе всего, как и в [1], лежит теорема Карлесона о сходимости п.в. рядов Фурье функций из L^2. Доказательство существования функции G неконструктивно – как и в [1], используется линейная двойственность. Технические детали, однако, несколько более тяжелы, чем в [1] – как раз в той степени, что автор посчитал оправданным написание заметки. Был и еще один побудительный мотив: насколько может судить автор, ни одно из прочих известных сейчас доказательств теоремы Меньшова не ведет к оценке $\|G\|_\infty \leqslant \text{const}\,\|F\|_\infty$ (после исправления равномерная норма оказывается примерно того же порядка, что и оценка сверху для U-нормы).

Настоящую заметку можно читать независимо от [1].

2. Основной этап доказательства теоремы 1 — это следующая лемма. В ней об η нужно думать как о "большом" числе, а о ρ – как о "малом".

Лемма 1. *Пусть $f \in C(\mathbb{T})$, $\|f\| \leqslant 1$, $B = \{f \neq 0\}$, $\eta > 0$, $\rho > 0$. Тогда функцию f можно представить в виде $f = g + h$, где $g \in U$, $\|g\|_U \leqslant \eta$, $|g| + |h| \leqslant (1+\rho)|f|$, и справедлива оценка*

$$\left(\int |h|^2|f|^{-2}\,dm\right)^{1/2} \leqslant C_1(mB)^{1/2}\exp(-\eta/C_2) \tag{1}$$

(C_1 *и* C_2 — *универсальные постоянные*).

Отложив ненадолго доказательство этой леммы, выведем из нее теорему 1 (ср. с § 2 в [1]). О функции F из этой теоремы мы предположим, что $\|F\|_\infty \leqslant 1$ (это не ограничивает общности). Лемма 1 будет применяться многократно, но всякий раз к функции f, удовлетворяющей неравенству $|f| \leqslant |F|$. В таком случае функция ω,

$$\omega(\eta) = C_1(mE)^{1/2}\exp(-\eta/C_2),$$

мажорирует правую часть в (1) (напомним, что $E = \{F \neq 0\}$).

Для начала мы зафиксируем две последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 0}$ и $\{\eta_n\}_{n\geqslant 0}$, $\varepsilon_0 = 1$, и построим три последовательности непрерывных функций $\{G_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{H_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{I_n\}_{n\geqslant 0}$ и последовательность открытых множеств $\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, обладающие следующими свойствами:

(а) $G_0 = I_0 = 0$;

(б) $F = G_n + H_n + I_n$, $|G_n| + |H_n| + |I_n| \leqslant (1 + (1 - 2^{-n-1}\delta))|F|$;

(в) $|H_n| \leqslant \varepsilon_n |F|$, $\quad \operatorname{supp} I_n \subset A_n \subset E$;

(г) $\|G_{n+1} - G_n\|_U \leqslant \eta_n$;

(д) $m(A_{n+1} \setminus A_n) \leqslant \left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\omega\left(\frac{\eta_n}{\varepsilon_n}\right)\right)^2$.

Построение. Положим $H_0 = F$, тогда при $n = 0$ утверждение (б) выполняется в силу (а), а утверждение (в) — поскольку $\varepsilon_0 = 1$. О (г) и (д) на нулевом шаге нет речи, поскольку в этих утверждениях участвуют функция G_1 и множество A_1, которых пока еще нет.

Пусть теперь для некоторого k построены функции $G_0, \dots, G_k$, $H_0, \dots, H_k$, $I_0, \dots, I_k$ и множества $A_0, \dots, A_k$, причем утверждения (б) и (в) выполняются при $n \leqslant k$, а (г) и (д) — при $n \leqslant k - 1$. Применив лемму 1 к функции $\varepsilon^{-1} H_k$ в качестве "f" и числу $\varepsilon^{-1}\eta_k$ в качестве "η", мы получим

$$H_k = g + h, \quad \text{где} \quad g \in U, \ \|g\|_U \leqslant \eta_k, \ |g| + |h| \leqslant (1+\rho)|H_k|,$$
$$\left(\int |h|^2 |F|^{-2} dm\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon_k \omega(\eta_k \varepsilon_k^{-1})$$

(функция F появилась в интеграле в последнем неравенстве в силу (в) для $n = k$). Пусть $e = \{|h| > \varepsilon_{k+1}|F|\}$ (так что $e \subset E$). Положим $A_{k+1} = A_k \cup e$, $H_{k+1} = h|h|^{-1}\min(|h|, \varepsilon_{k+1}|F|)$, $I_{k+1} = I_k + (h - H_{k+1})$, $G_{k+1} = G_k + g$. Тогда (г) и (д) выполняются для $n = k$: (г) потому, что $\|g\|_U \leqslant \eta_k$, а (д) потому, что $me \leqslant \varepsilon_{k+1}^{-2} \int\limits_e |h|^2 |F|^{-2} \leqslant (\varepsilon_k \varepsilon_{k+1}^{-1} \omega(\eta_k \varepsilon_k^{-1}))^2$. Поскольку функция $h - H_{k+1}$ сосредоточена на множестве e, мы получаем, что $\operatorname{supp} I_{k+1} \subset A_{k+1}$, а неравенство $|H_{k+1}| \leqslant \varepsilon_{k+1}|F|$ справедливо по построению. Таким образом, проверено утверждение (в) для $n = k + 1$. В утверждении (б) для $n = k + 1$ сомнение может вызвать лишь неравенство. Но легко видеть, что $|h - H_{k+1}| = |h| - |H_{k+1}|$, поэтому

$$|G_{k+1}| + |H_{k+1}| + |I_{k+1}| \leqslant |G_k| + |I_k| + |g| + |h - H_{k+1}| + |H_{k+1}| \leqslant$$
$$\leqslant |G_k| + (1+\rho)|H_k| + |I_k| \leqslant (1 + (1 - 2^{-k-1})\delta)|F| + \rho|H_k|.$$

Поскольку $|H_k| \leqslant \varepsilon_k |F|$, нужной оценки можно добиться, выбрав с самого начала ρ достаточно малым. Наконец, заметим, что $H_{k+1} \in C(\mathbb{T})$. Шаг индукции завершен.

Теперь конкретизируем последовательности $\{\varepsilon_n\}$ и $\{\eta_n\}$: выберем $\eta_n = K2^{-n}$ (число K, $K > 0$, может быть любым), $\varepsilon_n = 4^{-n}$. Из (г) следует, что последовательность $\{G_n\}$ сходится в U, и для ее предела G справедлива оценка $\|G\|_U \leqslant 2K$. Из(б) получается, что $|G_n| + |F - G_n| \leqslant (1+\delta)|F|$, что в пределе дает неравенство $|G| + |F - G| \leqslant (1+\delta)|F|$. Поскольку $H_n \to 0$ равномерно, а все функции I_n сосредоточены на множестве $A = \cup_{n\geqslant 0} A_n$, из равенства $F = G_n + H_n + I_n$ следует, что $G = F$ на $\mathbb{T}\setminus A$. Наконец, в силу (д)

$$mA \leqslant mE\bigl[4C_1^2 \sum_{n\geqslant 0} \exp(-C_2^{-1}K2^n)\bigr].$$

При $K \geqslant 1$ выражение в квадратных скобках мажорируется величиной $C\exp(C_2^{-1}K)$ с некоторой универсальной постоянной C (ибо члены ряда убывают быстрее геометрической прогрессии). Вместе с уже полученной оценкой $\|G\|_U \leqslant 2K$ это дает все, что нужно. •

3. Осталось доказать лемму 1. Для этого понадобятся некоторые сведения о функционалах на пространстве U. Пусть $P_r(z)$ ($z \in \mathbb{T}$, $0 \leqslant r < 1$) — ядро Пуассона, $\Phi \in U^*$. При каждом фиксированном ζ, $\zeta \in \mathbb{T}$, функция $z \mapsto P_r(\zeta - z)$ лежит в U, поэтому определена свертка $(P_r * \Phi)(\zeta) = \Phi(P_r(\zeta - z))$. Из основного результата статьи [2] вытекает, что почти всюду на окружности существует предел

$$\lim_{r\to 1-0} (P_r * \Phi)(\zeta) \overset{\text{def}}{=} \Phi_*(\zeta).$$

Сходимость имеет место также и в L^p, $0 < p < 1$. Кроме того, равномерно по $r < 1$

$$m\{|P_r * \Phi| > \lambda\} \leqslant c\lambda^{-1}\|\Phi\|_{U^*}, \quad \lambda > 0,$$

где c – универсальная константа. В частности,

$$m\{|\Phi_*| > \lambda\} \leqslant c\lambda^{-1}\|\Phi\|_{U^*} \tag{2}$$

и

$$\left(\int |\Phi_*|^p\, dm\right)^{1/p} \leqslant c_p\|\Phi\|_{U^*}, \quad 0 < p < 1. \tag{3}$$

(Заметим, что именно в перечисленных результатах скрывается использование теоремы Карлесона).

Каждая конечная мера μ задает естественным образом линейный непрерывный функционал Φ_μ на $\mathbb{T}$:

$$\Phi_\mu(f) = \int_{\mathbb{T}} f\, d\mu, \quad f \in U.$$

Ясно, что $(\Phi_\mu)_*$ совпадает с плотностью абсолютно непрерывной части меры μ. Пусть U_a^* — это замыкание множества всех функционалов вида $\Phi_{\alpha m}$, $\alpha \in L^1(m)$, по норме пространства U^*. Известно (см., например, обзорную статью [4]), что каждый функционал Φ из U^* однозначно раскладывается в сумму $\Phi = \Phi^a + \Phi^s$, где $\Phi^a \in U_a^*$, а $\Phi^s = \Phi_\mu$ для некоторой сингулярной меры μ; при этом $\|\Phi\| = \|\Phi^a\| + \|\Phi^s\|$. Очевидно, что $\Phi_* = \Phi_*^a$.

Пусть β – функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье. Умножение на β есть непрерывный оператор из U в U; обозначим его через T_β.

Лемма 2. *Для любого функционала Φ из U^* имеем $(T_\beta^*\Phi)_* = \beta\Phi_*$.*

Доказательство. Запишем как выше $\Phi = \Phi^a + \Phi^s$. Так как $(\Phi^s)_* = (T_\beta^*\Phi^s)_* = 0$, лемму достаточно доказать для Φ из U_{a^*}. Более того, так как в силу (3) отображение $\Phi \mapsto \Phi_*$ задает непрерывный оператор из U^* в L^p, $0 < p < 1$, достаточно проверить утверждение леммы на каком-нибудь плотном в U_a множестве. Но оно очевидно для функционалов вида $\Phi_{\alpha m}$, где $\alpha \in L^1$. •

Теперь приступим непосредственно к доказательству леммы 1. Существуют сколь угодно малые положительные α, для которых $m\{|f| = \alpha\} = 0$ (но последнее равенство может нарушаться лишь для не более чем счетного множества значений α). Зафиксировав α с $m\{|f| = \alpha\} = 0$, положим $V = \{|f| > \alpha\}$. *Замыкание открытого множества V содержится в E и $m\partial V = 0$.*

Мы проверим, что существуют такие функции g, $g \in U$, и ψ, $\psi \in C(\bar V)$, что $g|(\mathbb{T} \setminus V) = 0$, $f|\bar V = g|\bar V + \psi$, $|g| + |\psi| \leqslant (1+\rho)|f|$ на множестве $\bar V$ и справедливы оценки

$$\|g\|_U \leqslant \eta, \qquad \left(\int_{\bar V} |\psi|^2|f|^2\,dm\right)^{1/2} \leqslant C_1(m\bar V)^{1/2}\exp(-\eta/C_2)$$

(C_1 и C_2 не зависят от f, η и α). Пусть это сделано. На границе ∂V функция ψ совпадает с f, поэтому функция h, равная f на $\mathbb{T}\setminus V$ и ψ на $\bar V$, непрерывна. Ясно, что $|g| + |h| \leqslant (1+\rho)|f|$ всюду (ибо g вне V обращается в ноль). Если α достаточно мало, то мера множества $E \setminus V$ мала. Поэтому разность интегралов

$$\int_E |h|^2|f|^{-2}\,dm \quad \text{и} \quad \int_V |\psi|^2|f|^{-2}\,dm$$

можно сделать сколь угодно малой, и мы приходим к оценкам из формулировки леммы 1.

Таким образом, лемма 1 следует из приведенного выше утверждения, и осталось доказать его. Это будет сделано с использованием линейной двойственности. Пусть $U_0 = \{g \in U : g|(\mathbb{T} \setminus V) = 0\}$. Это – замкнутое подпространство в U. В прямой сумме $X_1 = U_0 \oplus L^2(\bar{V})$ введем норму, единичный шар B_1 которой совпадает с множеством $\{(g, \psi) : \|g\|_U \leqslant \eta, \ (\int\limits_{\bar{V}} |\psi|^2 |f|^{-2}\, dm)^{1/2} \leqslant t\}$. Рассмотрим еще пространство X_2, равное как множество прямой сумме $C(\bar{V}) \oplus C(\bar{V})$, но с нормой, единичный шар B_2 которой есть $\{(g, \psi) : |g| + |\psi| \leqslant |f|\}$. Поскольку на $\bar{V}$ функция $|f|$ отделена от нуля, X_1 и X_2 – банаховы пространства. Пусть $X = X_1 \cap X_2$ (шар пространства X есть $B_1 \cap B_2$). Пространство $C(\bar{V})$ с нормой $\|x\| = \sup\{|x(t)|/|f(t)| : t \in \bar{V}\}$ обозначим через Y. Тогда норма оператора $T : X \to Y$, $T(g, \psi) = g + \psi$, не превосходит единицы.

Лемма 1′. *Если в определении шара B_1 положить*

$$t = C_1 (mV)^{1/2} \exp(-\eta / C_2)$$

с подходящими универсальными постоянными C_1 и C_2, то оператор T^* будет изометрическим вложением.

Из леммы 1′ следует нужное нам утверждение, ибо если T^* – изометрическое вложение, то для любого $\rho > 0$ множество $T((1 + \rho)B)$ содержит единичный шар пространства Y, а, значит, и функцию $f|\bar{V}$.

Доказательство Леммы 1′. Каждый функционал F на пространстве Y задается некоторой борелевской мерой ν на $\bar{V}$ по формуле $x \mapsto \int x|f|^{-1}\, d\nu$, при этом $\|F\| = \|\nu\|$. Нам надо проверить, что $\|F\| \leqslant \|T^* F\|$ (обратное неравенство очевидно). Без ограничения общности считаем, что $\|T^* F\| = 1$. Рассмотрев естественное изометрическое вложение $X \to X_1 \oplus X_2$, $x \mapsto (x, x)$ (за норму в $X_1 \oplus X_2$ берется функция $\max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$) и дважды применив теорему Хана-Банаха, мы найдем, что

$$< (g, \psi), T^* F > = \frac{1}{\eta} \Phi(g) + \frac{1}{t} \int\limits_{\bar{V}} \psi u\, dm + < (g, \psi), \Gamma >,$$

где $\Phi \in U^*$, $\Gamma \in X_2^*$, а u –функция, при этом

$$1 = \|T^* F\| = \|\Phi\|_{U^*} + \left(\int\limits_{\bar{V}} |u|^2 |f|^2 \right)^{1/2} + \|\Gamma\|_{X_2^*}. \qquad (4)$$

Функционал Γ задается парой мер (λ_1, λ_2) на $\bar{V}$:

$$< (g, \psi), \Gamma > = \int\limits_{\bar{V}} g|f|^{-1}\, d\lambda_1 + \int\limits_{\bar{V}} \psi|f|^{-1}\, d\lambda_2,$$

при этом

$$\|\Gamma\|_{X_2^*} = \operatorname{var}(|\lambda_1| \vee |\lambda_2|) \tag{5}$$

($\vee$ – операция взятия верхней грани в решетке мер).

Окончательно, для меры ν, порождающей функционал F, получаем формулу

$$\int\limits_{\bar{V}} (g + \psi)|f|^{-1}\, d\nu = \frac{1}{\eta}\Phi(g) + \frac{1}{t}\int\limits_{\bar{V}} \psi u\, dm + \int\limits_{\bar{V}} g|f|^{-1}\, d\lambda_1 + \int\limits_{\bar{V}} \psi|f|^{-1}\, d\lambda_2,$$

верную для (g, ψ) из X.

Взяв в этой формуле $g = 0$, придем к равенству

$$d\nu = \frac{1}{t}u|f|dm + d\lambda_2. \tag{6}$$

Теперь положим $\psi = 0$, а в качестве g подставим функцию βP_r, где P_r – ядро Пуассона, β – функция класса C^∞ с компактным носителем, лежащая в V (βP_r, разумеется, лежит в U_0). Устремив r к 1, получим ввиду Леммы 2

$$|f|^{-1}\beta x = \frac{1}{\eta}\beta\Phi_* + |f|^{-1}y \quad \text{п.в. на} \quad V$$

(x и y – плотности абсолютно непрерывных частей мер ν и λ_2). Варьируя носитель функции β и вспоминая, что $m\partial V = 0$, находим

$$x = \frac{1}{\eta}|f|\Phi_* + y \quad \text{п.в. на} \quad \bar{V}. \tag{7}$$

Пусть $W \subset \bar{V}$ – борелевское множество меры нуль, такое что сингулярная часть меры ν сосредоточена на W. Пусть $\lambda > 0$ (выбор этого числа уточним несколько позже). Положим $e = \{\zeta \in \bar{V} : |\Phi_*(\zeta)| > \lambda\}$. Ввиду оценки (2) имеем $me \leqslant c\lambda^{-1}\|\Phi\|_{U^*}$. Очевидно, $\|\nu\| = \int\limits_{e\cup W} d|\nu| + \int\limits_{\bar{V}\setminus(e\cup W)} |x|\, dm$. Воспользовавшись в первом интеграле формулой (6), а во втором – формулой (7), получим, учитывая, что $|f| \leqslant 1$:

$$\|\nu\| \leqslant \frac{1}{t}\int\limits_{e} |u||f|\, dm + \int\limits_{e\cup W} d|\lambda_2| + \int\limits_{\bar{V}\setminus(e\cup W)} |y|\, dm + \frac{1}{\eta}\int\limits_{\bar{V}\setminus e} |\Phi_*|\, dm.$$

К первому интегралу в правой части применим неравенство Гельдера:

$$\int_e |u||f|\,dm \leqslant (me)^{1/2}\left(\int |u|^2|f|^2\,dm\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{c\|\Phi\|_{U^*}}{\lambda}\right)^{1/2}\left(\int |u|^2|f|^2\,dm\right)^{1/2}.$$

Сумма следующих двух интегралов мажорируется числом $\int_{\bar V} d(|\lambda_1| \vee |\lambda_2|)$ (поскольку они взяты по дизъюнктивным множествам, а y – плотность абсолютно непрерывной части меры λ_1). В силу (5) это число есть $\|\Gamma\|_{X_2^*}$. Чтобы оценить последний интеграл, введем функцию распределения $\alpha(\tau) = m\{\zeta \in \bar V \setminus e : |\Phi_*(\zeta)| > \tau\}$, тогда $\alpha(\tau) \leqslant c\tau^{-1}\|\Phi\|_{U^*}$ в силу (2), $\alpha(\tau) = 0$ при $\tau > \lambda$ и $\alpha(\tau) \leqslant mV$ при всех τ. Имеем:

$$\int_{V\setminus e} |\Phi_*|\,dm = \int_0^\lambda \alpha(\tau)\,d\tau \leqslant \int_0^\varepsilon mV\,d\tau + c\|\Phi\|_{U^*}\int_\varepsilon^\lambda \frac{d\tau}{\tau} =$$
$$= \varepsilon mV + c\|\Phi\|_{U^*}\log(\lambda\varepsilon^{-1}).$$

Минимум последнего выражения достигается при $\varepsilon = c\|\Phi\|_{U^*}/mV$ (таким образом, при выборе числа λ нужно будет следить за тем, чтобы оно было больше $c\|\Phi\|_{U^*}/mV$).

Собрав оценки вместе, получим

$$\|\nu\| \leqslant \frac{1}{\eta}c\|\Phi\|_{U^*}\big(1+\log\frac{\lambda mV}{c\|\Phi\|_{U^*}}\big)+$$
$$+\frac{1}{t}\big(\frac{c\|\Phi\|_{U^*}}{\lambda}\big)^{1/2}\big(\int |u|^2|f|^2\,dm\big)^{1/2} + \|\Gamma\|_{X_2^*}.$$

Число λ выберем так, чтобы коэффициент при $\|\Phi\|_{U^*}$ в первом члене справа стал равен 1:

$$\frac{\lambda mV}{c\|\Phi\|_{U^*}} = \exp\big(\frac{\eta}{c}-1\big).$$

(При $\eta > c$, разумеется, будет $\lambda > c\|\Phi\|_{U^*}/mV$, как и требовалось). Тогда

$$\|\nu\| \leqslant \|\Phi\|_{U^*} + \frac{(mV)^{1/2}}{t}\exp\big(\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2c}\big)\big(\int_{\bar V} |u|^2|f|^2\,dm\big)^{1/2} + \|\Gamma\|_{X_2^*},$$

и в силу (4) при $t = (mV)^{1/2}\exp(\frac{1}{2} - \eta/2c)$ получается $\|\nu\| \leqslant 1$, как и требовалось.

В заключении приведем вариант теоремы 1, который может быть доказан близкими рассуждениями (особенно похожи вычисления; сопровождающие их слова отличаются существенней). Пусть U^∞ – пространство таких функций f, для которых частичные суммы ряда Фурье $\sum_{k\leqslant j\leqslant n} \widehat{f}(j)\zeta^j$ равномерно ограничены (оно снабжено естественной нормой).

Теорема 2. *Пусть* $F \in L^\infty(\mathbb{T})$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $E = \{t \in \mathbb{T} : F(t) \neq 0\}$. *Тогда найдется такая функция* G *из* U^∞, *что* $|G| + |F - G| \leqslant |F|$ *п.в.,* $m\{F \neq G\} \leqslant \varepsilon mE$ *и* $\|G\|_U \leqslant \mathrm{const}(1 + \log \varepsilon^{-1})\|F\|_\infty$, *с некоторой универсальной постоянной* const.

Число "δ" из теоремы 1 здесь исчезает, поскольку в новой ситуации оператор, соответствующий оператору T из Леммы 1$'$, сам окажется сопряженным (к изометрическому вложению). Еще одно существенное отличие состоит в том, что, вообще говоря, a priori неясно, есть ли в пространстве U^∞ хотя бы одна функция, обращающаяся в нуль на $\mathbb{T} \setminus E$ (а в доказательстве теоремы 1 такие функции были предъявлены и существенно использованы — это произведения βP_r). Впрочем, способы борьбы с этой трудностью хорошо известны, см., например, лемму п.2 в [3]. Мы опускаем детали.

Литература

1. С. В. Кисляков, *Количественный аспект теорем об исправлении.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **92** (1979), 182–191.
2. С. А. Виноградов, *Усиление теоремы Колмогорова о сопряженной функции и интерполяционные свойства равномерно сходящихся степенных рядов.* — Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **130** (1981), 7–40.
3. S. V. Khrushchev (Hruščev), S. A. Vinogradov, *Free interpolation in the space of uniformly convergent Taylor series.* — Lecture Notes Math. **864** (1981), 171–213.

Kislyakov S. V. Quantitative aspect of correction theorems. II.

Let $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $F \in C(\mathbb{T})$, $E = \{F \neq 0\}$, $\delta > 0$. Then there exists a function G with uniformly convergent Fourier series such that $|G| + |F - G| \leqslant (1+\delta)|F|$, $m\{F \neq G\} \leqslant \varepsilon mE$, and $\sup\{|\sum_{k\leqslant j\leqslant l} \widehat{G}(j)\zeta^j| : \zeta \in \mathbb{T}, k \leqslant l\} \leqslant \mathrm{const}\,\|F\|_\infty(1 + \log \varepsilon^{-1})$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило 20 декабря 1993 г.