В. В. Некруткин, Н. Э. Пригаро, О скорости сходимости к границе некоторых вариантов сферического процесса, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1986, том 26, номер 4, 626–631

3. *Smith F. J., Munn K. J.* Automatic calculation of the transport collision integrals with tables for the Morse potential. – J. Chem. Phys., 1964, v. 41, № 11, p. 3560–3568.
4. *O'Hara H., Smith F. J.* Transport collision integrals for a dilute gas. – Comput. Phys. Communs, 1971, v. 2, № 1, p. 47–54.
5. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматгиз, 1959.
6. *Sidi A.* Numerical quadrature rules for some infinite range integrals. – Math. Comput., 1982, v. 38, № 157, p. 127–142.
7. *Longmann I. M.* A method for the numerical evaluation of finite integrals of oscillatory functions. – Math. Comput., 1960, v. 14, № 69, p. 53–59.
8. *Clenshaw C. W., Curtiss A. R.* A method for numerical integration on a automatic computer. – Numer. Math., 1960, v. 2, № 2, p. 197–204.
9. *Chawla M. M., Jain M. K.* Asymptotic error estimates for the Gauss quadrature formulas. – Math. Comput., 1968, v. 22, № 1, p. 91–97.
10. *Chawla M. M., Jain M. K.* Error estimates of Gauss quadrature formulas for analytic functions. – Math. Comput., 1968, v. 22, № 1, p. 86–90.
11. *Charles Chen T. H.* Asymptotic error estimates for Gaussian quadrature formulas. – Math. Comput., 1982, v. 38, № 157, p. 143–151.
12. *Riess R., Johnson L. W.* Error estimates for Clenshaw-Curtiss quadrature. – Numer. Math., 1972, v. 12, № 3, p. 345–353.

Поступила в редакцию 17.IX.1984
Переработанный вариант 15.VIII.1985

УДК 519.676

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ К ГРАНИЦЕ НЕКОТОРЫХ ВАРИАНТОВ СФЕРИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

НЕКРУТКИН В. В., ПРИГАРО Н. Э.

(Ленинград)

Исследуется трудоемкость некоторых модификаций известных алгоритмов метода Монте-Карло для решения краевых задач математической физики.

§ 1. Введение

При решении методом Монте-Карло краевых задач математической физики в области $G\subset R^d$ часто используются различные марковские цепи, сходящиеся к границе Γ области G (например, [1], [2]). При этом одной из естественных характеристик трудоемкости метода оказывается величина

$$f(\varepsilon)=\sup_{x\in G}\mathbf{E}_x\nu_\varepsilon,\qquad \text{где}\qquad \nu_\varepsilon=\min\{n:\xi_n\in\Gamma_\varepsilon\},$$

$\xi_1=x$, $\xi_2,\ldots$ – рассматриваемая марковская цепь и $\Gamma_\varepsilon=\{x\in G:\rho(x,\Gamma)<\varepsilon\}$. Наиболее распространенным и исследованным является так называемый сферический процесс (процесс блуждания по сферам), возникающий при решении внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа и ряда других задач. Переходная функция этого процесса определяется равенством $\mathbf{P}\{\xi_n\in dy\,|\,\xi_{n-1}=z\}=\mu_z(dy)$, где μ_z – равномерное распределение на границе шара максимального радиуса с центром в точке z, целиком лежащего в $\bar{G}$, $\xi_1=x\in G$. Известно, что для сферического процесса и широкого класса областей имеет место логарифмическая оценка величины $f(\varepsilon)$, а именно: $f(\varepsilon)$ удовлетворяет при некоторых положительных константах B_1 и B_2, зависящих только от области G, неравенству

$$f(\varepsilon)\leqslant B_1|\ln\varepsilon|+B_2. \tag{1.1}$$

Впервые оценка (1.1) была получена для выпуклых областей в [3]. Затем с использованием теории восстановления она была доказана для весьма широкого класса областей в R^2 и для областей, в некотором смысле близких к выпуклым или цилиндрическим, в R^3 (например, в [1]). Для ограниченных областей в R^3 с границей класса

$C^{2,\lambda}$ оценка (1.1) была получена в [4], а в более общем случае, когда G имеет границу класса $C^{1,\lambda}$, – в [5] (см. также [2]).

В то же время при решении ряда краевых задач могут возникнуть сходящиеся к границе процессы, отличные от сферического. Остановимся на двух из них.

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для оператора Лапласа в ограниченной области $G\subset R^3$ с положительными граничными условиями

$$(1.2)\qquad \Delta u=0,\quad u|_\Gamma=\varphi,\quad \varphi>0.$$

Пусть S_x – сфера с центром в точке $x\in G$ и радиусом $d(x)=\rho(x,\Gamma)$, μ_x – равномерное распределение на S_x. Применение метода существенной выборки для решения уравнения (1.2) может быть осуществлено путем моделирования марковской цепи с переходной плотностью

$$(1.3)\qquad q(x,y)=v(y)\left[\int\limits_{S_x} v(z)\mu_x(dz)\right]^{-1}$$

относительно меры μ_x, если v достаточно близка к u (см. [2]). Ниже будет показано, что для марковской цепи (1.3) сохраняется логарифмическая оценка.

Кроме того, следуя [2], можно ввести еще одну модификацию сферического процесса, при которой дисперсия оценки оказывается той же, что при использовании стандартного процесса блуждания по сферам, а скорость сходимости к границе меняется.

Под сферой со сдвинутым в $k\geqslant1$ раз относительно точки x центром будем понимать сферу $S_{x'}$, где x' – точка, полученная сдвигом точки x по направлению внутренней нормали к Γ в точке, ближайшей к x, при этом $|x'-x|=(k-1)d(x)$. Число k назовем в этом случае коэффициентом сдвига. Определим в G функцию сдвига $k(z)$ такую, что $k(z)\geqslant1$ и сфера $S_{z'}$ со сдвинутым в $k(z)$ раз относительно z центром z' вместе с ограниченным ею шаром целиком лежит в $\bar G$. Кроме того, определим в G марковскую цепь с плотностью

$$(1.4)\qquad q_1(x,y)=k(x)[2k(x)-1]d^3(x)r^{-3}(x),\qquad r(x)=|x-y|,$$

относительно распределения μ_x. В [2] показано, что марковскую цепь с переходной плотностью (1.4) (в несколько других обозначениях) также можно использовать для решения задачи (1.2).

§ 2. Скорость сходимости к границе процесса со сдвинутыми центрами

Пусть G – некоторая ограниченная выпуклая область в R^3, Γ – ее граница. Заметим, что если поверхность Γ достаточно гладкая, то для любого $k\geqslant1$ найдется число $\delta=\delta(k)>0$ такое, что, какова бы ни была точка $z\in\Gamma_\delta$, сфера со сдвинутым в k раз относительно z центром вместе с ограниченным ею шаром будет целиком лежать в $\bar G$. Поэтому для любого $k\geqslant1$ функция

$$(2.1)\qquad k(z)=\begin{cases}1, & z\in G\setminus\Gamma_\delta,\\ k, & z\in\Gamma_\delta,\end{cases}$$

является функцией сдвига. Рассмотрим процесс $\xi_1, \xi_2,\ldots$ с функцией сдвига, определенной в (2.1). Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть*

$$f(\varepsilon)=\sup_{x\in G}\mathrm{E}_x\nu_\varepsilon,\qquad \nu_\varepsilon=\min\{n:\xi_n\in\Gamma_\varepsilon\}$$

и $p(k)=k\ln k/(k-1)-\ln 2$. *Тогда для любого* $\gamma>0$ *существует такое* $\varepsilon_0>0$, *что* $f(\varepsilon)\leqslant\leqslant(1+\gamma)|\ln\varepsilon|/p(k)$ *при* $0<\varepsilon<\varepsilon_0$.

Доказательство этой теоремы будет проходить в соответствии с общей схемой применения теории восстановления к сферическому процессу [1], однако, в отличие от стандартной ситуации (см., например, [6]), мы будем иметь дело не только с неодинаково распределенными, но и с зависимыми случайными величинами. Поэтому для доказательства теоремы 1 понадобится

Лемма 1. *Пусть случайные величины* $\eta_1, \eta_2,\ldots$ *обладают конечными вторыми моментами,* $\mathscr{F}_i$ – *поток* σ-*алгебр такой, что* $\mathscr{F}_i\supset\sigma(\eta_1,\ldots,\eta_i)$. *Пусть, кроме того, существуют такие положительные константы* c_1 *и* c_2, *что почти всюду* $\mathrm{E}\{\eta_i|\mathscr{F}_{i-1}\}\geqslant c_1$

и $\mathbf{E}\{\eta_i^2|\mathcal{F}_{i-1}\}\leqslant c_2$. *Тогда если положить* $\mu(t)=\min\{n:\eta_1+\ldots+\eta_n>t\}$, $t>0$, *то*

$$(2.2)\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\{\mu(t)\geqslant i,\ \mathbf{E}\{\eta_i|\mathcal{F}_{i-1}\}\}=1.$$

Доказательство леммы аналогично соответствующим рассуждениям в [7], поэтому приведем лишь его набросок. Прежде всего, легко показать, что если случайные величины $\eta_1, \eta_2, \ldots$ обладают конечными математическими ожиданиями, $\mathcal{F}_i$ – поток σ-алгебр, ν – целочисленная случайная величина такая, что $\{\nu\geqslant i\}\in\in\mathcal{F}_{i-1}$ и ряд $\Sigma_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\{|\eta_i|,\nu\geqslant i\}$ сходится, то, положив $S_n=\eta_1+\ldots+\eta_n$, получим, что

$$(2.3)\qquad \mathbf{E}S_\nu=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\{\nu\geqslant i,\mathbf{E}\{\eta_i|\mathcal{F}_{i-1}\}\}.$$

Далее, определив $\nu=\min(\mu(t),k)$ и перейдя в правой части (2.3) к пределу при $k\to\infty$, имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\{\mu(t)\geqslant i,\mathbf{E}\{\eta_i|\mathcal{F}_{i-1}\}\}\leqslant\mathbf{E}S_{\mu(t)}.$$

Положив $\eta_i^{(N)}=\min(\eta_i,N)$ и воспользовавшись тем, что $\mathbf{E}(\eta_i^2|\mathcal{F}_i)\leqslant c_2$, получим, что при достаточно большом N для любого i будет выполнено неравенство $\mathbf{E}\{\eta_i^{(N)}|\mathcal{F}_{i-1}\}\geqslant\mathbf{E}\{\eta_i|\mathcal{F}_{i-1}\}-\varepsilon>0$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\{\mu(t)\geqslant i,\ \mathbf{E}\{\eta_i|\mathcal{F}_{i-1}\}-\varepsilon\}\leqslant t+N$$

и

$$(2.4)\qquad \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\{\mu(t)\geqslant i,\mathbf{E}\{\eta_i|\mathcal{F}_{i-1}\}\}\leqslant 1.$$

Так как все предыдущие рассуждения верны для случайных величин $|\eta_i|$, $i=1,2,\ldots$, то для $\nu=\mu(t)$ выполняется (2.3) и, следовательно,

$$(2.5)\qquad \sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\{\mu(t)\geqslant i,\ \mathbf{E}\{\eta_i|\mathcal{F}_{i-1}\}\}=\mathbf{E}S_{\mu(t)}\geqslant t.$$

Объединяя (2.4) и (2.5), получаем требуемое равенство (2.2).

Доказательство теоремы 1. Положим $\mathcal{F}_i=\sigma(\xi_1,\ldots,\xi_i)$, $d_i=\rho(\xi_i,\Gamma)$, $h_i=\rho(\xi_i,K_i)$, где K_i – касательная плоскость к Γ в точке Γ, ближайшей к ξ_i, $\eta_i=-\ln(h_i/d_{i-1})$, $t=-\ln(\varepsilon/d_1)$. Тогда, так как $h_i\leqslant d_i$,

$$\nu_\varepsilon=\min\{n:d_n<\varepsilon\}\leqslant\min\left\{n:\sum_{i=2}^{n}\eta_i>t\right\}=\mu(t).$$

Далее, $\eta_i\leqslant k-1$ и

$$\mathbf{E}\{\eta_i|\mathcal{F}_{i-1}\}=\mathbf{E}\{\eta_i|\xi_{i-1}\}=\begin{cases}1-\ln 2, & \xi_{i-1}\in G\backslash\Gamma_\delta,\\ p(k), & \xi_{i-1}\in\Gamma_\delta.\end{cases}$$

Следовательно, $\mathbf{E}\{\eta_i|\mathcal{F}_{i-1}\}\geqslant 1-\ln 2$, условия леммы 1 выполнены и

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\{\mu(t)\geqslant i,\ \mathbf{E}\{\eta_i|\mathcal{F}_{i-1}\}\}=1.$$

Определив $\theta=\min\{n : \xi_i\in\Gamma_\delta$ при $i\geqslant n\}$, получим, что θ конечно почти всегда (п.в.) и

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{E}\{\mu(t)\geqslant i,\ \mathrm{E}\{\eta_i|\mathscr{F}_{i-1}\}\}=p(k)\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{P}\{\mu(t)\geqslant i\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{E}\{\mu(t)\geqslant i,\ i<\theta,\ \mathrm{E}\{\eta_i|\mathscr{F}_{i-1}\}-p(k)\}.$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{E}\{\mu(t)\geqslant i,\ \mathrm{E}\{\eta_i|\mathscr{F}_{i-1}\}\}-\frac{p(k)}{t}\mathrm{E}\mu(t)\right|\leqslant$$

$$\leqslant[p(k)-1+\ln 2]\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{P}\{\theta>i\}.$$

Поскольку, как нетрудно видеть, $\mathrm{E}\theta<+\infty$, то $\mathrm{E}\{\mu(t)\}/t\to 1/p(k)$, $t\to\infty$. Теорема доказана.

Так как $p(k)>1-\ln 2$ при $k>1$, а трудоемкость моделирования (1.4) может быть сделана лишь ненамного большей, чем распределения μ_x (один из способов моделирования (1.4) предложен в [2]), то при достаточно малых ε процесс со сдвинутыми центрами может быть конкурентоспособен обычному сферическому процессу.

§ 3. Общий случай процесса со сдвинутыми центрами

Пусть G – ограниченная область в R^3 с границей Γ класса $C^{1,\lambda}$, $0<\lambda\leqslant 1$; $k(z)$ – функция сдвига, ограниченная сверху числом $k\geqslant 1$. Рассмотрим марковскую цепь $\xi_1=x$, $\xi_2,\ldots$ с переходной плотностью $p_1(x,y)$ относительно равномерного распределения на сфере $S_{z'}$ со сдвинутым центром и положим $p_2(z,y)=q_1(z,y)$. Имеет место

Теорема 2. *Пусть для описанного выше процесса $\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots$ выполняются следующие условия*:

1) *процесс сходится к границе и для любого* $\varepsilon>0$

$$f(\varepsilon)=\sup_{x\in G}\mathrm{E}_x\nu_\varepsilon<+\infty,$$

2) *существуют такие положительные константы c и σ, что $|p_1(z,y)-p_2(z,y)|\leqslant\leqslant c|z-y|^\sigma$ при $z\in G$, $y\in S_{z'}$. Тогда для $f(\varepsilon)$ имеет место логарифмическая оценка.*

Утверждение теоремы 2 будет следовать из нескольких лемм. Пусть (x_1, x_2, x_3) – местная система координат в точке $a\in\Gamma$ с осью x_3, направленной по внутренней нормали к Γ. Определим, согласно [5], $\Pi(a,\rho)=\{0\leqslant|x_3|<2\rho,\ 0\leqslant|x_i|<\rho,\ i=1,2\}$ и для каждой точки $z\in\Pi(a,\rho)\cap G$ положим $d'=d'(z)=\rho(z,\Gamma)$ и $d''=\rho(z,K)$, где K – касательная плоскость к Γ в точке a.

Лемма 2. *Пусть $\mu=\min(\lambda,\sigma/2)$, $\xi_1=x\in\Gamma_{2\varepsilon}\setminus\Gamma_\varepsilon$, $\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ – описанный выше процесс, $m=[\mu(2-\mu)|\log_{2k}(\varepsilon)|/4]$. Тогда $\xi_j\in\Pi(a, 2\varepsilon^{1-\mu(2-\mu)/4})$, $1\leqslant j\leqslant m$, где a – ближайшая к x точка* Γ.

Доказательство леммы 2 проводится аналогично доказательству соответствующей леммы в [5] (см. также [2, лемма 1.3.6]).

Лемма 3. *Пусть функции F_1 и F_2 строго возрастают на промежутке* $[0, a]$, $a>0$, $F_i(0)=0$, $F_i(a)=1$, $i=1, 2$, $|F_1(x)-F_2(x)|<\delta$. *Тогда при* $y\in(0, 1)$

$$|F_1^{-1}(y)-F_2^{-1}(y)|\leqslant G_1(y+\delta)-G_1(y-\delta),$$

где

$$G_1(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ F_1^{-1}(z), & 0\leqslant z\leqslant 1,\\ a, & z>1.\end{cases}$$

Доказательство этой леммы элементарно.

Лемма 4. *Пусть p_1 и p_2 – некоторые плотности распределения относительно равномерного распределения на сфере S радиуса d с центром в нуле. Пусть существуют такие положительные константы M, $\varkappa$ и δ, $\delta<\min(1,\varkappa/2)$,* что

$|p_1(y)-p_2(y)|<\delta$, $y\in S$, *и* $\varkappa\leqslant p_i(y)\leqslant M$, $i=1, 2$. *Тогда найдется такое вероятностное пространство и такие случайные векторы* z_1 *и* z_2, *определенные на нем, что случайные векторы* z_i *имеют плотности распределения* p_i, $i=1, 2$, *и существует константа* $c>0$ *такая, что* $|z_1-z_2|<c d\delta^{1/2}$.

Доказательство. Построение z_1 и z_2 на сфере S в координатах (h, φ), где $h=x_3+d$, $d^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ и φ — полярный угол в плоскости (x_1, x_2), проводится методом суперпозиции и методом обратных функций исходя из равномерно распределенных на $[0, 1]$ независимых случайных величин α_1 и α_2, а именно положим $z_i=(h_i, \varphi_i)$. Пусть $F_i(h)$ — функции распределения случайных величин h_i, $F_i(\varphi|h)$ — функции условного распределения φ_i при условии $h_i=h$. Тогда случайные величины h_i и φ_i могут быть получены решением уравнений

$$F_i(h_i)=\alpha_i,\qquad F_i(\varphi_i|h_i)=\alpha_2,\qquad i=1, 2.$$

Поскольку $|F_1(h)-F_2(h)|<\delta$ и $|F_1(\varphi|h)-F_2(\varphi|h)|<c_1\delta$ для некоторого c_1, то, по лемме 3, $\Delta h=|h_1-h_2|<c\delta d$ и $\Delta\varphi=|\varphi_2-\varphi_1|<c_2\delta$. Следовательно, $|z_1-z_2|\leqslant(2d\Delta h)^{1/2}+d\Delta\varphi\leqslant \leqslant cd\delta^{1/2}$, что и требовалось доказать.

Основной для доказательства теоремы 2 является

Лемма 5. *Пусть* $\xi_1=x\in\Gamma_{2\varepsilon}\setminus\Gamma_\varepsilon$, $\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ — *сферический процесс со сдвинутыми центрами, введенный в начале* § 3, $\tilde d_j=\rho(\xi_j, \Gamma)$, $m=[\mu(2-\mu)|\log_{2k}\varepsilon|/4]$. *Тогда при* $1\leqslant i\leqslant m$ *выполняются неравенства* $\mathrm{P}_x\{\nu_\varepsilon>j\}\leqslant\mathrm{P}_x\{\tilde d_j>\varepsilon\}<cp^j$, *где* $p>1$ *и* c — *некоторые константы, не зависящие от* ε.

Доказательство леммы проведем в несколько этапов.

1. Построение вспомогательных процессов. Пусть a — ближайшая к x точка Γ, K — касательная плоскость к Γ в точке a. Рассмотрим два вспомогательных процесса, $\{\xi_i'\}_{i=1}^\infty$ и $\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$, в G и в полупространстве, ограниченном K, соответственно, начинающихся в точке x и имеющих свойства: а) при условии $\xi_{i-1}=z$ случайная величина ξ_i' распределена с условной плотностью $p_2(z, y)$ относительно $\mu_{z'}$; б) при условии $\xi_1=z_1=x$, $\xi_2=z_2,\ldots,\xi_{n-1}=z_{n-1}$ совместное распределение случайных величин $\eta_1, \eta_2,\ldots,\eta_{n-1}$ такое же, как у процесса со сдвинутыми центрами и коэффициентами сдвига $k(z_{i-1})$ в полупространстве, ограниченном K; в) процессы ξ_i' и η_i согласованы в том смысле, что если через β_i и ζ_i обозначить сдвинутые относительно ξ_i' и η_i центры сфер, то поворотом плоскости, проходящей через точки η_i, ζ_i и η_{i+1}, треугольники с вершинами ξ_i, β_i, ξ_{i+1}' и η_i, ζ_i, η_{i+1} могут быть сделаны гомотетичными; г) процессы ξ_i и ξ_i' согласованы в том смысле, что при $1\leqslant i\leqslant m$ и $\rho=2\rho^{1-\mu(2-\mu)/4}$

(3.1) $$|\xi_i-\xi_i'|\leqslant c\rho^{1+\mu}.$$

Неравенства (3.1) можно достичь в силу леммы 4. Действительно, $\varkappa=k/(2k-1)^2\leqslant \leqslant p_2(z, y)\leqslant k(2k-1)=M$, $|p_2(z, y)-p_1(z, y)|\leqslant c|z-y|^\sigma\leqslant c\rho^\sigma=\delta$ и радиусы d_i сфер со сдвинутыми центрами при $1\leqslant i\leqslant m$ не превосходят ρ. Поэтому условия леммы 3 выполняются для p_1 и p_2 и можно считать (3.1) выполненным с $\mu=\sigma/2$.

2. Оценка расстояний в согласованных процессах. Обозначив $\tilde d_j'=\rho(\xi_j, K)$, $d_j'=\rho(\xi_j', K)$, $d_j=\rho(\xi_j', \Gamma)$, $d_j''=\rho(\eta_j, K)$, заметим, что $d_1=d_1'=d_1''= =\tilde d_1=\tilde d_1'$ и $\varepsilon<d_1<2\varepsilon$. Из условий согласованности ξ_{j+1}' и η_{j+1} получаем, что $|d_{j+1}''-d_{j+1}|\leqslant 2k|d_j''-\tilde d_j|+2c_1\rho^{1+\mu}$.

Отсюда, в силу согласованности ξ_j' и ξ_j при $1\leqslant j<m$, выполняется рекуррентное соотношение

(3.2) $$|d_{j+1}''-\tilde d_{j+1}|\leqslant 2k|d_j''-d_j|+2c_2\rho^{1+\mu}.$$

Далее, так как $|d_2''-\tilde d_2|<c\rho^{1+\mu}$, то из (3.2) следует, что $|d_{j+1}''-\tilde d_{j+1}|<c_3\varepsilon^{1+\mu^3/4}$ при $1\leqslant j<m$.

3. Оценка величины $\mathrm{P}_x\{\tilde d_j>\varepsilon\}$. Введем функцию $\varphi(\varepsilon)=1-c_3\varepsilon^{\mu^3/4}$. При достаточно малых $\varepsilon<\varepsilon_0$ функция $\varphi(\varepsilon)$ неотрицательна и монотонно убывает. Поэтому

$$\mathrm{P}_x\{\tilde d_j>\varepsilon\}\leqslant\mathrm{P}_x\{d_j''>\varepsilon\varphi(\varepsilon)\}\leqslant\mathrm{P}_x\{d_j''>\varepsilon\varphi(\varepsilon_0)\}.$$

Обозначив $\theta_j = \ln(d_j''/d_{j+1}'')$, получим, что при $A = \ln\varphi(\varepsilon_0) - \ln 2$

$$\mathbb{P}_x\{\tilde{d}_j > \varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}_x\left\{\sum_{i=2}^{j}\theta_i > -\ln 2 + \ln\varphi(\varepsilon_0)\right\} = \mathbb{P}_x\left\{\sum_{i=2}^{j}\theta_j > A\right\}.$$

Положив $g_i = d_i''/d_{i-1}''$, легко показать, что для любого t величина $\mathbf{P}\{g_i > t\} \leqslant \mathbf{P}\{g_i^0 > t\}$, где $g_i^0 = 2\alpha_i$ и α_i равномерно распределены на $[0, 1]$ и независимы. Поэтому при $\theta_i^0 = \ln g_i^0$ выполнены неравенства $\mathbf{P}\{\theta_i > t\} \leqslant \mathbf{P}\{\theta_i^0 > t\}$ также для любого t и, следовательно, как нетрудно видеть,

$$\mathbb{P}_x\left\{\sum_{i=2}^{j}\theta_i > A\right\} \leqslant \mathbb{P}_x\left\{\sum_{i=2}^{j}\theta_i^0 > A\right\}.$$

Окончание доказательства леммы 5 и вывод утверждения теоремы 2 из лемм 2–5 в точности следуют рассуждениям теоремы 1.3.6 из [2].

Замечание 1. Из теоремы 2 можно получить логарифмическую оценку величины $f(\varepsilon)$ для случайного процесса с переходной плотностью

$$q_2(z, y) = v(y)\, q_1(z, y)\left[\int_{S_{z'}} v(x)\, q_1(z, x)\, \mu_{z'}(dx)\right]^{-1}$$

относительно $\mu_{z'}$ (что также соответствует методу существенной выборки) при следующих условиях на $k(z)$ и $v(z)$: $1 \leqslant k(z) \leqslant k$, $v \in C^1(G)$, $0 < L \leqslant v(z) \leqslant M$, $|v'(y)| \leqslant R$; L, M и R – некоторые постоянные. Действительно, тогда

$$|q_2(z, y) - p_1(z, y)| \leqslant \frac{MR \cdot 2k}{L}|z - y|;$$

конечность $f(\varepsilon)$ также легко проверяется.

Замечание 2. В работе не рассматривалась трудоемкость моделирования вариантов сферического процесса, которая может оказаться большой при решении конкретных задач. В целом вопрос о применимости того или иного процесса для решения краевой задачи может быть решен только на практике. Заметим только, что реализация метода, изложенного в § 2, представляется нам вполне осуществимой.

Замечание 3. Техника, используемая в § 2, позволяет получать оценки $f(\varepsilon)$ для более широкого класса процессов, чем описанные выше. В частности, можно показать, что отказ от ограниченности функции сдвига приведет к более медленному, чем логарифмический, росту функции $f(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Подобные результаты, однако, выходят за рамки настоящей работы.

Литература

1. *Ермаков С. М., Михайлов Г. А.* Статистическое моделирование. 2-е изд. М.: Наука, 1982.
2. *Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С.* Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. М.: Наука, 1984.
3. *Moto M.* Some evaluations of continuous Monte-Carlo method by using hitting process. – Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo, 1959, v. 11, № 1, p. 49–53.
4. *Кронберг А. А.* Об асимптотике математического ожидания числа шагов ε-сферического процесса. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 2, с. 528–531.
5. *Курбанмурадов О. А.* Оценка математического ожидания числа шагов ε-сферического процесса. – В кн.: Методы Монте-Карло в вычисл. матем. и матем. физ. Ч. 2. Новосибирск: Наука, 1979, с. 137–144.
6. *Hatori H.* Some theorems in an extended renewal theory. I. – Kōdai Math. Semin. Repts, 1959, v. 11, № 3, p. 139–146.
7. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 26.III.1984
Переработанный вариант 5.VIII.1985