A. V. Pskhu, Solution of Boundary Value Problems for the Fractional Diffusion Equation by the Green Function Method, *Differ. Uravn.*, 2003, Volume 39, Number 10, 1430–1433

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 10, с. 1430–1433

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.954

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ФУНКЦИИ ГРИНА

© 2003 г. А. В. Псху

1. Введение. Рассмотрим уравнение диффузии дробного порядка

$$\mathbf{L}u(x,y) \equiv u_{xx}(x,y) - D_{0y}^{\alpha}u(x,y) = f(x,y) \tag{1}$$

в области $D = \{(x,y):\ 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$, $0 < a,b < \infty$, $0 < \alpha \le 1$, где D_{0y}^{α} – частная производная по переменной y порядка α. Оператор дробного интегро-дифференцирования (в смысле Римана–Лиувилля) D_{st}^{ν} порядка ν определяется следующим образом [1, с. 13]:

$$D_{st}^{\nu}g(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(t-s)}{\Gamma(-\nu)} \displaystyle\int_s^t g(\xi)(t-\xi)^{-\nu-1}\,d\xi, & \nu < 0, \\ \operatorname{sign}^{[\nu]+1}(t-s)(d^{[\nu]+1}/dt^{[\nu]+1})D_{st}^{\nu-[\nu]-1}g(t), & \nu \ge 0. \end{cases}$$

Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера; $[\nu]$ – целая часть числа ν. Для функции $u(x,y)$, зависящей от двух переменных, оператор частного интегро-дифференцирования $D_{0y}^{\alpha}u(x,y)$ по переменной y определяется так же, как и для функции одной переменной, при этом переменная x рассматривается как параметр.

Уравнения с частными производными дробного порядка могут возникать при математическом моделировании физических процессов в средах с фрактальной геометрией [1, гл. 5; 2]. Краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка исследовались в работах [3–10].

В настоящей работе методом функции Грина будет получено общее представление решений уравнения (1) и построены функции Грина первой, второй и смешанных краевых задач для уравнения (1).

2. Общее представление. Обозначим $D_y = \{(\xi,\eta):\ 0 < \xi < a,\ 0 < \eta < y\}$.

Теорема. *Пусть существует функция $v = v(x,y,\xi,\eta)$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) в области D_y при фиксированных $(x,y) \in D$ функция v является решением уравнения*

$$\mathbf{L}^*v \equiv v_{\xi\xi}(x,y,\xi,\eta) - D_{y\eta}^{\alpha}v(x,y,\xi,\eta) = 0; \tag{2}$$

2) для любой функции $g(x) \in C[x_1,x_2]$, $0 \le x_1 < x_2 \le a$, выполняется соотношение

$$\lim_{\eta\to y}\int_{x_1}^{x_2} g(\xi)D_{y\eta}^{\alpha-1}v(x,y,\xi,\eta)\,d\xi = g(x), \quad x_1 < x < x_2;$$

3) функция v непрерывна в $\bar{D}\times\bar{D}_y \setminus \{y=\eta\}$ и для любых точек $(x,y)\in D$ и $(\xi,\eta)\in D_y$ выполняется неравенство $|v(x,y,\xi,\eta)| < k(y-\eta)^{-1+\beta}$, где $\beta = \alpha/2$, k – константа, зависящая только от области D.

Пусть функция $u(x,y)$ такова, что $y^{1-\alpha}u(x,y)\in C(\bar{D})$, $u_{xx}, u_y \in C(D)$, производная u_x непрерывна вплоть до участков границы $x = 0$ и $x = a$, и $u(x,y)$ является решением уравнения (1) и удовлетворяет краевому условию

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y) = \tau(x), \quad 0 \le x \le a. \tag{3}$$

Тогда функция $u(x,y)$ представима в виде

$$u(x,y) = \int_0^y [v(x,y,a,\eta)u_\xi(a,\eta) - v(x,y,0,\eta)u_\xi(0,\eta) - v_\xi(x,y,a,\eta)u(a,\eta) +$$

$$+v_\xi(x,y,0,\eta)u(0,\eta)]\,d\eta + \int_0^a \tau(\xi)v(x,y,\xi,0)\,d\xi - \int_0^a\int_0^y v(x,y,\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\int_0^a\int_0^{y_\varepsilon}[v(x,y,\xi,\eta)\mathbf{L}u(\xi,\eta) - u(\xi,\eta)\mathbf{L}^*v(x,y,\xi,\eta)]\,d\xi\,d\eta, \tag{5}$$

где $y_\varepsilon = y-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Для того чтобы преобразовать выражение (5), докажем, что если $b > y > y_\varepsilon > \eta \geq 0$, то для любой функции $g(\eta) \in L(0,b)$ верно соотношение

$$D^{-\alpha}_{y_\varepsilon \eta}D^\alpha_{y\eta}g(\eta) = g(\eta) - \frac{(y_\varepsilon-\eta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}D^{\alpha-1}_{yy_\varepsilon}g(y_\varepsilon) + \sin(\pi\alpha)S^{1-\alpha}_{y_\varepsilon y}g(\eta), \tag{6}$$

где [1, с. 28] $S^{1-\alpha}_{y_\varepsilon y}g(\eta) = \pi^{-1}\int_{y_\varepsilon}^y [g(s)/(s-\eta)]((s-y_\varepsilon)/(y_\varepsilon-\eta))^{1-\alpha}\,ds$.

Действительно,

$$D^{-\alpha}_{y_\varepsilon \eta}D^\alpha_{y\eta}g(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{d\eta}\int_\eta^{y_\varepsilon}(t-\eta)^\alpha \frac{d}{dt}\int_t^y \frac{g(s)\,ds}{(s-t)^\alpha}\,dt =$$

$$= -\frac{(y_\varepsilon-\eta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_{y_\varepsilon}^y \frac{g(s)\,ds}{(s-y_\varepsilon)^\alpha} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{d\eta}\left[\int_\eta^{y_\varepsilon} g(s)\int_\eta^s \frac{(t-\eta)^{\alpha-1}}{(s-t)^\alpha}\,dt\,ds + \int_{y_\varepsilon}^y g(s)\int_\eta^{y_\varepsilon}\frac{(t-\eta)^{\alpha-1}}{(s-t)^\alpha}\,dt\,ds\right]. \tag{7}$$

Преобразуем подынтегральные выражения последних двух слагаемых:

$$\int_\eta^s \frac{(t-\eta)^{\alpha-1}}{(s-t)^\alpha}\,dt = \int_0^1 \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{-\alpha}\,d\xi = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha), \tag{8}$$

$$\frac{d}{d\eta}\int_\eta^{y_\varepsilon}\frac{(t-\eta)^{\alpha-1}}{(s-t)^\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\eta}z^\alpha F(\alpha,\alpha,\alpha+1;z) = \frac{1}{\eta-s}\left(\frac{s-y_\varepsilon}{y_\varepsilon-\eta}\right)^{1-\alpha}. \tag{9}$$

Здесь $z = (y_\varepsilon-\eta)/(s-\eta)$; $F(\alpha,\delta,\gamma;z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса. При получении (9) мы воспользовались соотношениями (см., например, [1, с. 61, 88]) $F(\alpha,\delta,\gamma;z) = [\Gamma(\gamma)/(\Gamma(\delta)\Gamma(\gamma-\delta))]\int_0^1 t^{\delta-1}(1-t)^{\gamma-\delta-1}(1-zt)^{-\alpha}\,dt$ и $(d/dz)z^{\gamma-1}F(\alpha,\delta,\gamma;z) = (\gamma-1)z^{\gamma-2}F(\alpha,\delta,\gamma-1;z)$, $F(\alpha,\delta,\alpha;z) = (1-z)^{-\delta}$.

Из (7) с учетом (8) и (9) получаем (6).

Из (6), принимая во внимание равенства [1, с. 42] $\int_0^t g(s)D^{-\alpha}_{ts}h(s)ds = \int_0^t h(s)D^{-\alpha}_{0s}g(s)\,ds$ и [1, с. 102] $D^{-\alpha}_{0t}D^\alpha_{0t}g(t) = g(t) - (t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha))\lim\limits_{t\to 0}D^{\alpha-1}_{0t}g(t)$, а также условие (3), получаем

$$\int_0^{y_\varepsilon} v(x,y,\xi,\eta)D^\alpha_{0\eta}u(\xi,\eta)\,d\eta = \int_0^{y_\varepsilon} D^\alpha_{0\eta}u\left[D^{-\alpha}_{y_\varepsilon\eta}D^\alpha_{y\eta}v + \frac{(y_\varepsilon-\eta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}D^{\alpha-1}_{yy_\varepsilon}v - \sin(\pi\alpha)S^{1-\alpha}_{y_\varepsilon y}v\right]d\eta =$$

$$= \int_0^{y_\varepsilon} D^{-\alpha}_{0\eta}D^\alpha_{0\eta}uD^\alpha_{y\eta}v\,d\eta + D^{\alpha-1}_{yy_\varepsilon}vD^{-\alpha}_{0y_\varepsilon}D^\alpha_{0y_\varepsilon}u - \sin(\pi\alpha)\int_0^{y_\varepsilon} S^{1-\alpha}_{y_\varepsilon y}vD^\alpha_{0\eta}u\,d\eta =$$

$$= \int_0^{y_\varepsilon} uD^\alpha_{y\eta}v\,d\eta + u(\xi,y_\varepsilon)D^{\alpha-1}_{yy_\varepsilon}v - \tau(\xi)v(x,y,\xi,0) - \tau(\xi)\sin(\pi\alpha)S^{1-\alpha}_{y_\varepsilon y}v(x,y,\xi,0) - \sin(\pi\alpha)\int_0^{y_\varepsilon} D^\alpha_{0\eta}uS^{1-\alpha}_{y_\varepsilon y}v\,d\eta$$

или

$$\int_0^{y_\varepsilon}(vD^\alpha_{0\eta}u - uD^\alpha_{y\eta}v)\,d\eta = u(\xi,y_\varepsilon)D^{\alpha-1}_{yy_\varepsilon}v(x,y,\xi,y_\varepsilon) - \tau(\xi)v(x,y,\xi,0) - R(x,y,y_\varepsilon,\xi), \tag{10}$$

где $R(x,y,y_\varepsilon,\xi)=\sin(\pi\alpha)\tau(\xi)S^{1-\alpha}_{y_\varepsilon y}v(x,y,\xi,0)+\sin(\pi\alpha)\int_0^{y_\varepsilon}D^\alpha_{0\eta}u(\xi,\eta)S^{1-\alpha}_{y_\varepsilon y}v(x,y,\xi,\eta)\,d\eta$.

Учитывая (10) и соотношение $vu_{\xi\xi}-uv_{\xi\xi}=(vu_\xi)_\xi-(uv_\xi)_\xi$, преобразуем выражение (5):

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^{y_\varepsilon}\Big[v(x,y,\xi,\eta)\mathbf{L}u(\xi,\eta)-u(\xi,\eta)\mathbf{L}^*v(x,y,\xi,\eta)\Big]\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\int\limits_0^{y_\varepsilon}[v(x,y,a,\eta)u_\xi(a,\eta)-v(x,y,0,\eta)u_\xi(0,\eta)-v_\xi(x,y,a,\eta)u(a,\eta)+v_\xi(x,y,0,\eta)u(0,\eta)]\,d\eta-$$

$$-\int\limits_0^a[u(\xi,y_\varepsilon)D^{\alpha-1}_{yy_\varepsilon}v(x,y,\xi,y_\varepsilon)-\tau(\xi)v(x,y,\xi,0)-R(x,y,y_\varepsilon,\xi)]\,d\xi. \tag{11}$$

С учетом условия 3) нетрудно показать, что $\lim\limits_{\varepsilon\to0}R(x,y,y_\varepsilon,\xi)=0$. Поэтому из (1), (2), (11) и условия 2), устремляя ε к нулю, получаем соотношение (4). Теорема доказана.

3. Функции Грина. Рассмотрим функции

$$G_i(x,y,\xi,\eta)=\frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2na|}{(y-\eta)^\beta}\right)+(-1)^{i+1}e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+\xi+2na|}{(y-\eta)^\beta}\right)\right],\quad i=0,1, \tag{12}$$

$$G_i(x,y,\xi,\eta)=\frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\left[e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2na|}{(y-\eta)^\beta}\right)+(-1)^{i+1}e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+\xi+2na|}{(y-\eta)^\beta}\right)\right],\quad i=2,3, \tag{13}$$

где $\beta=\alpha/2$ и $e^{\mu,\delta}_{\nu,\varepsilon}(z)=\sum_{n=0}^\infty z^n/[\Gamma(\delta-\varepsilon n)\Gamma(\nu n+\mu)]$, $\nu>\varepsilon$, – функция типа Райта.

Используя соотношения для функции $e^{\mu,\delta}_{\nu,\varepsilon}(z)$, доказанные в работе [11] ([12]), легко показать, что функции (12), (13) вместе с условиями 1)–3) теоремы (сформулированными для функции v) при $y\neq\eta$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}G_0(x,y,0,\eta)=0,\quad G_0(x,y,a,\eta)=0;\quad G_{1\xi}(x,y,0,\eta)=0,\quad G_{1\xi}(x,y,a,\eta)=0;\\ G_2(x,y,0,\eta)=0,\quad G_{2\xi}(x,y,a,\eta)=0;\quad G_{3\xi}(x,y,0,\eta)=0,\quad G_3(x,y,a,\eta)=0.\end{gathered} \tag{14}$$

Поэтому из (4), используя (14), легко получить представления решений основных краевых задач для уравнения (1). Так, решение первой краевой задачи для уравнения (1) с условиями (3), $u(0,y)=\varphi_0(y)$, $u(a,y)=\varphi_1(y)$ имеет вид

$$u(x,y)=\int\limits_0^y[G_\xi(x,y,0,\eta)\varphi_0(\eta)-G_\xi(x,y,a,\eta)\varphi_1(\eta)]\,d\eta+\int\limits_0^a\tau(\xi)G(x,y,\xi,0)d\xi-\int\limits_0^a\int\limits_0^y G(x,y,\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Обозначим $F_i[\tau,f]=\int_0^a\tau(\xi)G_i(x,y,\xi,0)\,d\xi-\int_0^a\int_0^y G_i(x,y,\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$, $i=1,2,3$. Из (4) и (14) следует, что решения $u_i(x,y)$ второй ($i=1$) и смешанных ($i=2,3$) краевых задач для уравнения (1), удовлетворяющие условиям: $\lim\limits_{y\to0}D^{\alpha-1}_{0y}u_i(x,\eta)=\tau(x)$ и $u_{1x}(0,y)=\nu_0(y)$, $u_{1x}(a,y)=\nu_1(y)$; $u_2(0,y)=\varphi(y)$, $u_{2x}(a,y)=\nu(y)$; $u_{3x}(0,y)=\nu(y)$, $u_3(a,y)=\varphi(y)$, представимы соответственно в виде

$$u_1(x,y)=\int\limits_0^y[G_1(x,y,a,\eta)\nu_1(\eta)-G_1(x,y,0,\eta)\nu_0(\eta)]\,d\eta+F_1[\tau,f],$$

$$u_2(x,y)=\int\limits_0^y[G_2(x,y,a,\eta)\nu(\eta)+G_{2\xi}(x,y,0,\eta)\varphi(\eta)]\,d\eta+F_2[\tau,f],$$

$$u_3(x,y)=-\int\limits_0^y[G_3(x,y,0,\eta)\nu(\eta)+G_{3\xi}(x,y,a,\eta)\varphi(\eta)]\,d\eta+F_3[\tau,f].$$

Функции (12), (13) являются функциями Грина первой, второй и смешанных краевых задач соответственно для уравнения (1).

Заметим, что при $\beta = 1/2$, учитывая, что $1/\Gamma(-n) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, и соотношение [13, с. 555] $\Gamma(-k+1/2) = \sqrt{\pi}(-1)^k \cdot 4^k k!/(2k)!$, получаем $e_{1,1/2}^{1,1/2}(-x/\sqrt{y}) = (1/\sqrt{\pi})\exp(-x^2/(4y))$, т.е. функции (12), (13) при $\beta = 1/2$ $(\alpha = 1)$ совпадают с функциями Грина соответствующих краевых задач для уравнения теплопроводности.

Автор выражает искреннюю благодарность А.М. Нахушеву за постановку задачи, ценные советы и поддержку, а также Е.И. Моисееву за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик, 2000.
2. *Нахушев А.М., Нахушева В.А.* О дифференциальных уравнениях переноса и состояния дробного порядка и некоторых обобщениях закона Кольрауша. Нальчик, 2000.
3. *Кочубей А.Н.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С. 660–770.
4. *Геккиева С.Х.* // Докл. Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 1994. Т. 1. № 1. С. 17–18.
5. *Нахушева З.А.* // Докл. Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 1997. Т. 2. № 2. С. 36–41.
6. *Шогенов В.Х., Кумыкова С.К., Шхануков-Лафишев М.Х.* // Докл. НАН Украины. 1997. № 12. С. 47–54.
7. *Нахушева В.А.* Краевые задачи для обобщенных дифференциальных уравнений переноса. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нальчик, 1998.
8. *Геккиева С.Х.* // Докл. Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 2000. Т. 5. № 1. С. 16–19.
9. *Псху А.В.* Решение краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка. Нальчик, 2001.
10. *Псху А.В.* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 9. С. 1286–1289.
11. *Псху А.В.* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 8. С. 1092–1099.
12. *Псху А.В.* // Докл. Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 2000. Т. 5. № 1. С. 45–53.
13. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., 1987.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик

Поступила в редакцию 09.07.2002 г.