

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. V. Drobotukhina, Classification of projective Montesinos links,
Algebra i Analiz, 1991, Volume 3, Issue 1, 118–130

<https://www.mathnet.ru/eng/aa234>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

April 21, 2025, 14:07:59



© 1991 г.

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОЕКТИВНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ МОНТЕСИНОСА

Ю. В. ДРОБОТУХИНА

Зацепления в трехмерном проективном пространстве, аналогичные зацеплениям Монтесиноса в трехмерной сфере, классифицируются с точностью до изотопии и до гомеоморфизмов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

1.1 Проективные зацепления Монтесиноса. Задача классификации зацеплений в трехмерной сфере эффективно решена лишь для некоторых специальных классов зацеплений. Одним из таких классов является класс зацеплений Монтесиноса (который включает в себя зацепления с двумя мостами или, иначе, четырехсплетения). В настоящей работе вводится аналогичный класс зацеплений в проективном пространстве $\mathbb{R}P^3$, и для этого класса решаются задачи классификации с точностью до изотопии и до гомеоморфизма. Формулировке основных результатов предшествовало несколько определений.

Тенглом называется одномерное компактное гладкое подмногообразие t стандартного шара D^3 с границей ∂t , состоящей из четырех различных точек p_1, p_2, p_3, p_4 на ∂D^3 . Два тенгла *изотопны*, если они переводятся друг в друга изотопией шара, тождественной на ∂D^3 . В дальнейшем мы будем рассматривать только такие тенглы, граница которых состоит из двух пар центрально симметричных точек, лежащих на ортогональных диаметрах. Ясно, что два тенгла изотопны тогда и только тогда, когда их диаграммы можно соединить последовательностью преобразований Райдемайстера $\Omega_1 - \Omega_3$ (см., например, [1, 2]).

Произведением $(t_1 t_2)$ тенглов t_1 и t_2 называется тенгл, получающийся как объединение $\Gamma \cup t'_1 \cup t'_2$, где Γ - дуги в $D^3 \setminus (\text{Int } D_1 \cup \text{Int } D_2)$, показанные на рис.1, t'_2 - образ тенгла t_2 при очевидной гомотетии $D^3 \rightarrow D_2$, t'_1 - образ тенгла t_1 при композиции симметрии относительно плоскости, ортогональной плоскости диаграммы и проходящей через точки p_1 и p_3 , и гомотетии $D^3 \rightarrow D_1$. Пример произведения показан на рис.2.

Целочисленными тенглами $n, -n, (n \in \mathbb{N})$ и 0 называются тенглы, изображенные на рис. 3, a - v соответственно. Тенгл, изображенный на рис. 3, z , обозначается символом ∞

Ключевые слова: тенгл, проективное зацепление Монтесиноса, проективное четырехсплетение, призматические многообразия.

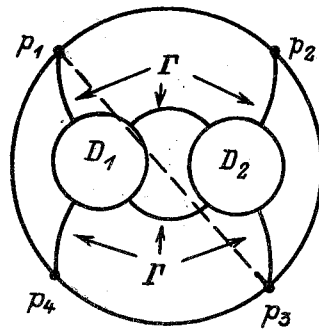


Рис. 1.

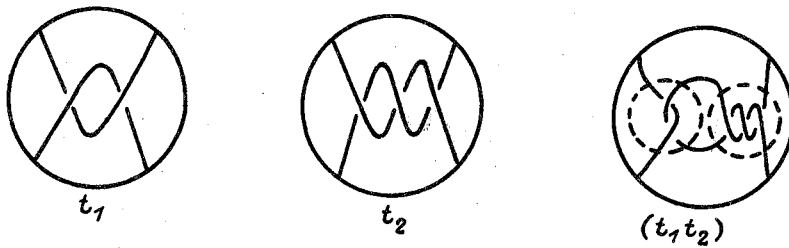


Рис. 2.

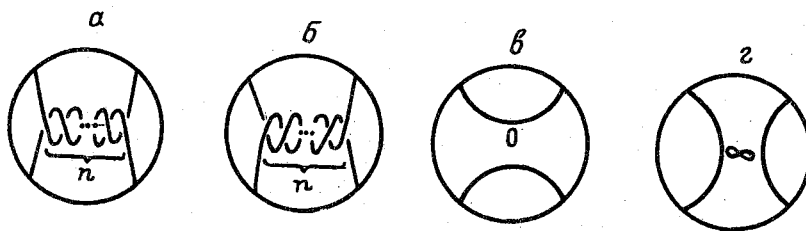


Рис. 3.

Рациональным тенглом $i_1 \dots i_n$ называется произведение $(\dots((i_1 i_2) i_3) \dots i_n)$ целочисленных тенглов i_1, \dots, i_n .

Конвей [3] показал, что два рациональных тенгла $i_1 \dots i_n$ и $j_1 \dots j_m$ изо-

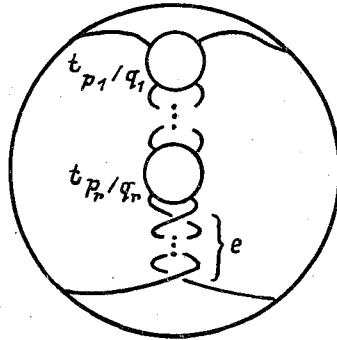


Рис. 4.

топны тогда и только тогда, когда соответствующие непрерывные дроби

$$i_n + 1/i_{n-1} + 1/i_{n-2} + \dots + 1/i_1$$

и

$$j_m + 1/j_{m-1} + 1/j_{m-2} + \dots + 1/j_1$$

равны (считаем, что $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$, $\infty + k = \infty$, где $k \in \mathbb{Z}$). Поэтому любой рациональный тенгл, отличный от 0 , ∞ , 1 , -1 , можно привести к стандартной форме $i_1 \dots i_n$ либо $i_1 \dots i_n 0$, где $|i_1| \geq 2$, все числа i_1, \dots, i_n отличны от 0 и имеют одинаковые знаки. Рациональный тенгл $i_1 \dots i_n$ с

$$i_n + 1/i_{n-1} + 1/i_{n-2} + \dots + 1/i_1 = p/q \in \mathbb{Q}$$

называется тенглом p/q . Рациональный тенгл p/q будем обозначать символом $t_{p/q}$.

При отождествлении диаметрально противоположных точек граничной сферы ∂D^3 тенгл $t \subset D^3$ превращается в зацепление $L \subset \mathbb{R}P^3$. Такие зацепления, полученные из рациональных тенглов, мы будем называть *проективными четырехсплетениями* (объяснение этого термина см. в Добавлении).

Проективным зацеплением *Монтесиноса типа* $(e, p_1/q_1, \dots, p_r/q_r)$ называется зацепление, изображенное на рис.4, где $e \in \mathbb{Z}$, t_{p_i/q_i} — рациональный тенгл типа p_i/q_i , $p_i \geq 2$ и p_i, q_i взаимно просты для всех $i = 1, \dots, r$.

1.2. Классификация проективных четырехсплетений.

Теорема 1. Два зацепления в вещественном проективном пространстве $\mathbb{R}P^3$, получающиеся из рациональных тенглов типов p/q и r/s (со взаимно простыми p, q и r, s), изотопны тогда и только тогда, когда $p/q = r/s$ или $p/q = -s/r$.

Теорема 2. Два зацепления в вещественном проективном пространстве $\mathbb{R}P^3$, получающиеся из рациональных тенглов типов p/q и r/s (со взаимно простыми p, q и r, s), гомеоморфны тогда и только тогда, когда $|p/q| = |r/s|$ или $|p/q| = |s/r|$.

Доказательство теоремы 2. Достаточность. Нетрудно видеть, что умножению дроби p/q на -1 отвечает симметрия тенгла относительно плоскости

проекции, а обращению дроби p/q (т.е. перестановке чисел p и q) отвечает симметрия относительно плоскости, ортогональной плоскости проекции и проходящей через точки p_1 и p_3 (рис. 1). Обе эти симметрии порождают автогомеоморфизм пространства $\mathbb{R}P^3$.

Необходимость вытекает из теоремы 3, которая будет доказана в § 2, и теоремы 4 о топологической классификации призматических многообразий.

Теорема 3. *Существуют в точности два двулистных накрывающих проективного пространства $\mathbb{R}P^3$, разветвленных над зацеплением, которое получается из рационального тенгла типа p/q . Они гомеоморфны призматическим многообразиям $Q(|p|, |q|)$ и $Q(|q|, |p|)$ (при условии, что p и q взаимно просты).*

Теорема 4. (см. [4,5]). *Многообразия $Q(m_1, n_1)$ и $Q(m_2, n_2)$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда $|m_1| = |m_2|$ и $|n_1| = |n_2|$.*

Теорема 1 выводится ниже в п.2.7 из теоремы 2 и известного факта несуществования обращающих ориентацию автогомеоморфизмов многообразий $Q(m, n)$ при $m \neq 1$ и $n \neq 0$.

1.3. Классификация проективных зацеплений Монтезиноса.

Теорема 5. *Два проективных зацепления Монтезиноса L и L' типов*

$$(e, p_1/q_1, \dots, p_r/q_r) \text{ и } (e', p'_1/q'_1, \dots, p'_{r'}/q'_{r'})$$

с $r, r' \geq 2$ изотопны тогда и только тогда, когда

$$1) e - \sum_{i=1}^r p_i/q_i = e' - \sum_{i=1}^{r'} p'_i/q'_i;$$

2) *последовательности*

$$(p_1/q_1 \pmod{1}, \dots, p_r/q_r \pmod{1}) \text{ и } (p'_1/q'_1 \pmod{1}, \dots, p'_{r'}/q'_{r'} \pmod{1})$$

получаются друг из друга в результате циклической перестановки и (или) обращения порядка.

Доказательство. **Необходимость.** Построим прообраз проективного зацепления Монтезиноса L при накрытии $S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$. Для этого (см.[2]) поместим на плоскости диаграмму D зацепления L , рядом под ней поместим ее образ при скользящей симметрии относительно прямой, проходящей через центр круга диаграммы D ; в этом образе заменяем все проходы на переходы. Соединим простой дугой каждый лежащий на граничной окружности конец дуги диаграммы D с точкой, полученной из этого конца в результате последовательного применения симметрии относительно центра круга диаграммы D и скользящей симметрии. Соединяющие дуги выберем попарно непересекающимися. Нетрудно видеть, что при описанной скользящей симметрии и последующей замене проходов на переходы рациональный тенгл переходит сам в себя. Поэтому прообразом проективного зацепления Монтезиноса L типа $(e, p_1/q_1, \dots, p_r/q_r)$ при накрытии $S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ служит обычное зацепление Монтезиноса \tilde{L} типа

$$(2e, p_1/q_1, \dots, p_r/q_r, p_1/q_1, \dots, p_r/q_r),$$

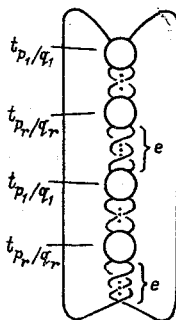


Рис. 5.

см. рис.5. Если зацепления L и L' изотопны, то изотопны и их прообразы \tilde{L} и \tilde{L}' в S^3 . Из изотопической классификации зацеплений Монтесиноса в S^3 (см., например, [6]) следует, что

$$2e - 2 \sum_{i=1}^r p_i/q_i = 2e' - 2 \sum_{i=1}^{r'} p'_i/q'_i$$

и что последовательности

$$(p_1/q_1 \bmod 1, \dots, p_r/q_r \bmod 1, p_1/q_1 \bmod 1, \dots, p_r/q_r \bmod 1)$$

и

$$(p'_1/q'_1 \bmod 1, \dots, p'_{r'}/q'_{r'} \bmod 1, p'_1/q'_1 \bmod 1, \dots, p'_{r'}/q'_{r'} \bmod 1)$$

получаются друг из друга в результате циклической перестановки и (или) обращения порядка. Значит, выполнены условия 1) и 2) теоремы.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1) и 2). Ясно, что изотопией зацепления L , порожденной циклической перестановкой тенглов и (или) обращением их порядка можно добиться выполнения условий $p_i/q_i = p'_i/q'_i \bmod 1$ для всех $i = 1, \dots, r$. Очевидная изотопия (рис. 6, а) позволяет переместить часть из e скрещиваний в промежутки между тенглами. Сделаем это таким образом, чтобы между тенглами t_{p_i/q_i} и $t_{p_{i+1}/q_{i+1}}$ было $e_i = p_i/q_i - p'_i/q'_i$ скрещиваний (рис. 6, б). Присоединение e_i скрещиваний к тенглу t_{p_i/q_i} (рис. 6, б) дает тенгл $t_{p'_i/q'_i}$. Таким образом, мы получили зацепление Монтесиноса типа

$$(e - \sum_{i=1}^r (p_i/q_i - p'_i/q'_i), p'_1/q'_1, \dots, p'_r/q'_r),$$

т.е. зацепление L' .

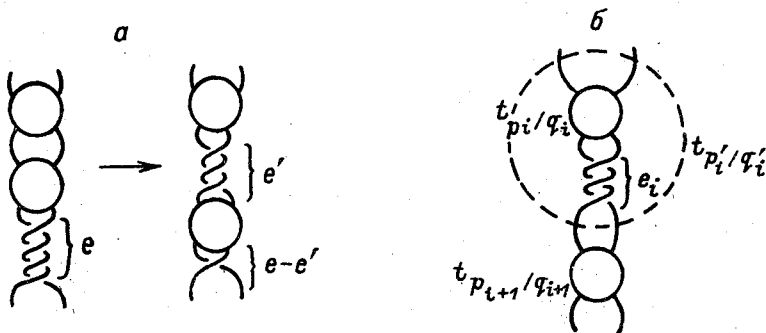


Рис. 6.

Следствие. Два проективных зацепления Монтесиноса L и L' типов

$$(e, p_1/q_1, \dots, p_r/q_r) \quad \text{и} \quad (e', p'_1/q'_1, \dots, p'_{r'}/q'_{r'})$$

с $r, r' \geq 2$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует такое ϵ , равное 1 или -1 , что

- 1) $e - \sum_{i=1}^r p_i/q_i = \epsilon(e' - \sum_{i=1}^{r'} p'_i/q'_i)$;
- 2) последовательности

$$(p_1/q_1 \bmod 1, \dots, p_r/q_r \bmod 1) \quad \text{и} \quad (\epsilon p'_1/q'_1 \bmod 1, \dots, \epsilon p'_{r'}/q'_{r'} \bmod 1)$$

получаются друг из друга в результате циклической перестановки и (или) обращения порядка.

Доказательство. Поскольку всякий гомеоморфизм $\mathbb{R}P^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ изотопен либо тождественному гомеоморфизму, либо симметрии относительно некоторой плоскости, достаточно заметить, что все члены последовательности $(e, p_1/q_1, \dots, p_r/q_r)$ при симметрии зацепления относительно плоскости проекции умножаются на -1 . •

§ 2. ДВУЛИСТНЫЕ НАКРЫВАЮЩИЕ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}P^3$ С ВЕТВЛЕНИЕМ НАД ПРОЕКТИВНЫМ ЧЕТЫРЕХСПЛЕТЕНИЕМ

2.1. Число двулистных разветвленных накрытий. Напомним общую теорему о классификации двулистных разветвленных накрытий.

Теорема. Пусть X есть r -мерное многообразие, $A \subset X$ - его подмногообразие коразмерности 2 с $\partial A \subset \partial X$. Двулистное накрытие $Y \rightarrow X$ с ветвлением над A существует тогда и только тогда, когда $\text{in}_*[A] = 0 \in H_{r-2}(X, \partial X; \mathbb{Z}_2)$, где $\text{in}_* : H_{r-2}(A, \partial A; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{r-2}(X, \partial X; \mathbb{Z}_2)$ - гомоморфизм включения. Такие

накрытия (рассматриваемые с точностью до эквивалентности) находятся во взаимно однозначном соответствии с классами $w \in H_{r-1}(X, A \cup \partial X; \mathbb{Z}_2)$, для которых $\partial w = [A]$, где ∂ — композиция $H_{r-1}(X, A \cup \partial X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{r-2}(A \cup \partial X, \partial X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{r-2}(A, \partial A; \mathbb{Z}_2)$ граничного гомоморфизма последовательности тройки $(X, A \cup \partial X, \partial X)$ и изоморфизма вырезания. Накрытие, отвечающее классу w , однозначно характеризуется тем, что оно тривиально над дополнением цикла, реализующего w . Таким образом, накрывающее можно получить в результате склеивания двух копий многообразия X , разрезанного вдоль такого цикла.

Из этой теоремы следует, что для любого проективного четырехсплетения $L \subset \mathbb{R}P^3$ (и вообще для любого зацепления в $\mathbb{R}P^3$) существуют ровно два (с точностью до эквивалентности) двулистных накрытия $\tilde{k}_i : N_i \rightarrow \mathbb{R}P^3$, $i = 1, 2$, с ветвлением над L .

2.2. Представление накрывающего в виде результата приклеивания полнотория к бутылке Клейна. Пусть $t \subset D^3$ — рациональный тенгл, $L \subset \mathbb{R}P^3$ — соответствующее проективное четырехсплетение. Общая теорема о двулистных разветвленных накрытиях показывает, что существует единственное двулистное накрытие $B \rightarrow D^3$ шара D^3 с ветвлением над t . Как известно, рациональный тенгл t можно получить из тенгла $t_0 \subset D^3$ типа 0, изображенного на рис. 7, при помощи гомеоморфизма $\tilde{\beta} : D^3 \rightarrow D^3$ с $\tilde{\beta}(t_0) = t$. Накрывающее пространство B_0 двулистного накрытия $B_0 \rightarrow D^3$ с ветвлением над t_0 получается в результате склеивания двух копий шара D^3 , из которого вырезаны два диска, ограниченные тенглом t_0 и дугами большой окружности, соединяющими граничные точки p_1, p_2, p_3, p_4 тенгла t_0 (рис. 7). Поэтому B_0 гомеоморфно полноторию $D^2 \times S^1$. Отображение $\tilde{\psi} : B_0 \rightarrow B$, накрывающее $\tilde{\beta}$, доставляет гомеоморфизм $B \cong D^2 \times S^1$.

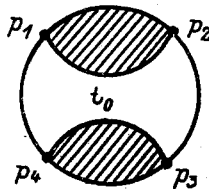


Рис. 7.

Пусть s — антиподальная инволюция сферы ∂D^3 . Возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 B & \longrightarrow & N_i \\
 \downarrow & & \downarrow \tilde{k}_i \\
 t \subset D^3 & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \mathbb{R}P^3 \supset L
 \end{array}$$

Ясно, что многообразия N_i ($i = 1, 2$) получаются из B в результате факторизации его края $T = \partial B$ по инволюциям, накрывающим c . Заметим, что таких инволюций две — они получаются друг из друга в результате композиции с нетождественным автоморфизмом накрытия $\partial B \rightarrow \partial D^3$. Как и инволюция c , накрывающие ее инволюции \tilde{c}_i ($i = 1, 2$) действуют без неподвижных точек и обращают ориентацию. Значит, фактор-пространство $X_i = T/\tilde{c}_i$ является замкнутым неориентируемым многообразием. Кроме того, в силу формулы Римана-Гурвица, эйлерова характеристика $\chi(X_i) = \chi(\tilde{k}_i^{-1}(\tilde{\text{pr}}(\partial D^3))) = 0$. Поэтому X_i гомеоморфно бутылке Клейна K_i . Итак, многообразие N_i получается в результате приклеивания полнотория B своим краем к бутылке Клейна K_i .

2.3. Призматические многообразия $Q(m, n)$. Пусть $S^1 = \{z \in C : |z| = 1\}$ - окружность, $\sigma : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ - инволюция тора, задаваемая формулой $\sigma(z_1, z_2) = (\bar{z}_1, -z_2)$, где $(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1$. Тогда факторпространство тора $S^1 \times S^1$ по инволюции σ является бутылкой Клейна K . Пусть $\pi : S^1 \times S^1 \rightarrow K$ - естественная проекция.

Пусть $D^2 \times S^1$ - полноторий и $\varphi : \partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ - некоторый геоморфизм. Обозначим через $[\mu], [\lambda] \in H_1(S^1 \times S^1; \mathbb{Z})$ гомологические классы меридиана $\mu = S^1 \times i$ и параллели $\lambda = i \times S^1$ тора $S^1 \times S^1$ (здесь $i = \sqrt{-1}$). Ясно, что $\varphi_*[\mu] = m[\mu] + n[\lambda]$ для некоторых взаимно простых $m, n \in \mathbb{Z}$. Числа m, n определяют отображение φ с точностью до изотопии и композиции (справа) с гомеоморфизмом, продолжающимся до гомеоморфизма полнотория, и, значит, определяют с точностью до гомеоморфизма многообразие $Q(m, n) = D^2 \times S^1 \cup_{\pi \circ \varphi} K$. В [7] показано, что результат приклеивания полнотория $D^2 \times S^1$ к K зависит только от $|m|, |n|$ и что многообразия $Q(|m|, |n|)$, соответствующие различным парам $|m|, |n|$, попарно гомотопически не эквивалентны.

2.4. Геометрия накрытия π . Представим тор $S^1 \times S^1$ как объединение двух цилиндров: $S^1 \times S^1 = C_+ \cup C_-$, где

$$C_+ = \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : \text{Re } z_1 \geq 0\}, \quad C_- = \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : \text{Re } z_1 \leq 0\}.$$

Поскольку $C_+ = C_+^+ \cup C_+^-$, где

$$C_+^+ = \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : \text{Re } z_1 \geq 0, \text{Re } z_2 \geq 0\},$$

$$C_+^- = \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : \text{Re } z_1 \geq 0, \text{Re } z_2 \leq 0\}$$

и $\sigma(C_+^+) = C_+^-$, то $\pi(C_+) = \pi(C_+^+)$ - лента Мёбиуса с краем $\Delta = \pi(\{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : \text{Re } z_1 = 0\})$ (рис.8). Аналогично, $\pi(C_-)$ - лента Мёбиуса с тем же краем Δ . Поэтому бутылка Клейна $K = \pi(C_+ \cup C_-)$ представляется как результат склеивания двух лент Мёбиуса $\pi(C_+)$ и $\pi(C_-)$ по их общему краю Δ . Поскольку $\{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : \text{Re } z_1 = 0\} = i \times S^1 \cup (-i) \times S^1$ и $\sigma(i \times S^1) = (-i) \times S^1$, то $\Delta = \pi(i \times S^1)$. Заметим, что край Δ изотопен удвоенной средней линии ленты Мёбиуса, т.е. удвоенной параллели бутылки Клейна K . Меридиан бутылки Клейна есть

$$\pi(\{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 : \text{Re } z_2 = 0\}) = \pi(S^1 \times i \cup S^1 \times (-i)) = \pi(S^1 \times i).$$

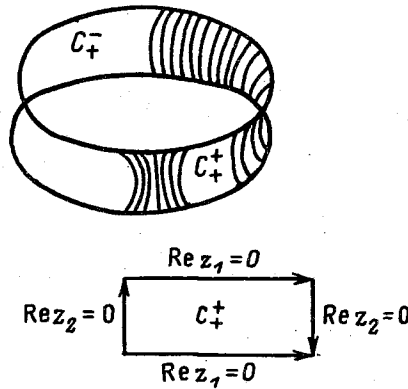


Рис. 8.

Итак, образом параллели $i \times S^1$ тора $S^1 \times S^1$ при накрытии π является удвоенная параллель бутылки Клейна K , а образом меридиана $S^1 \times i$ — ее меридиан.

2.5. Простые замкнутые кривые на бутылке Клейна. Рассмотрим сужение

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{\omega_i} & K_i \\
 s \downarrow & & \downarrow k_i \\
 S^2 & \xrightarrow{pr} & \mathbb{R}P^2
 \end{array}$$

встречавшейся выше в п.2.2 коммутативной диаграммы. На граничной сфере $S^2 = \partial D^3$ выделены четыре точки: p_1, p_2, p_3, p_4 , являющиеся границей тенгла $t \subset D^3$. Обозначим через $d_{12}, d_{23}, d_{34}, d_{14}$ дуги больших окружностей на сфере S^2 , соединяющие точки p_1 и p_2 , p_2 и p_3 , p_3 и p_4 , p_1 и p_4 соответственно (рис.9). Накрывающее пространство T двулистного накрытия s с ветвлением над $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ можно получить, согласно общей теореме о двулистных разветвленных накрытиях, при склеивании двух копий сферы S^2 , разрезанной вдоль дуг d_{12} и d_{34} . Положим $\xi = s^{-1}(d_{34}), \zeta = s^{-1}(d_{23})$.

Отображение k_i является двулистным накрытием с ветвлением над точками $q_1 = pr(p_1) [= pr(p_3)]$ и $q_2 = pr(p_2) [= pr(p_4)]$. Пусть $I_1 = pr(d_{34}) [= pr(d_{12})]$ и $I_2 = pr(d_{23}) [= pr(d_{14})]$ (рис.10). Тогда одно из накрывающих K_i , скажем, K_2 , получается как результат склеивания двух копий плоскости $\mathbb{R}P^2$, разрезанной вдоль отрезка I_1 , а другое накрывающее - K_1 - как результат склеивания двух копий плоскости $\mathbb{R}P^2$, разрезанной вдоль отрезка I_2 .

Ясно, что

$$\omega_i(\xi) = k_i^{-1}(pr(s(\xi))) = k_i^{-1}(I_1),$$

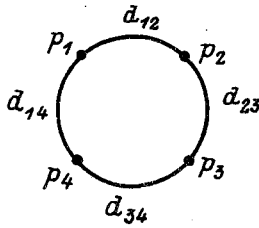


Рис. 9

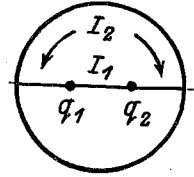


Рис. 10.

$$\omega_i(\zeta) = k_i^{-1}(\text{pr}(s(\zeta))) = k_i^{-1}(I_2).$$

Из двух возможных накрытий k_i рассмотрим то, накрывающее пространство которого является бутылкой Клейна K_1 . Таким образом, K_1 представляется как результат склеивания двух лент Мёбиуса вдоль их общего края $k_1^{-1}(I_2)$. При этом $k_1^{-1}(I_1)$ получается из слоев лент Мёбиуса при расслоении этих лент над окружностью. Следовательно, $\omega_1(\xi) = k_1^{-1}(I_1)$ является меридианом бутылки Клейна K_1 , а $\omega_1(\zeta) = k_1^{-1}(I_2)$ - ее удвоенной параллелью. Это позволяет установить гомеоморфизм накрытий π и ω_1

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 & \longrightarrow & T \\ \pi \downarrow & & \downarrow \omega_1 \\ K & \longrightarrow & K_1, \end{array}$$

при котором меридиан $S^1 \times i$ и параллель $i \times S^1$ тора $S^1 \times S^1$ переходят соответственно в кривые ξ и ζ на торе T .

2.6. Приклеивающее отображение. Пусть $t_{p/q}$ - рациональный тенгл с $p/q = i_r + 1/i_{r-1} + 1/i_{r-2} + \dots + 1/i_1$ (все числа i_k имеют одинаковые знаки и $|i_1| \geq 2$). Если r четно, переразложим дробь p/q так, чтобы r стало нечетным. Для этого достаточно представить i_1 в виде $(i_1 - 1) + 1/1$. Заметим, что такое разложение дроби p/q единственно и позволяет представить тенгл $t_{p/q}$ диаграммой, изображенной на рис. 11, а. Тенглу $t_{p/q}$ поставим в соответствие косу из четырех нитей $\alpha_2^{i_1} \alpha_3^{-i_2} \alpha_2^{i_3} \dots \alpha_2^{i_r} \in B_4$ (рис. 11, б). Как уже отмечалось (п.2.2), тенгл $t_{p/q} \subset D^3$ можно получить из стандартного тенгла $t_0 \subset D^3$, изображенного на рис. 7, при помощи некоторого гомеоморфизма β с $\beta(\partial t_0) = \partial t_{p/q}$. Гомеоморфизм β строится как композиция гомеоморфизмов $\beta_3, \beta_2 : S^2 \rightarrow S^2 : \beta = \beta_3^{i_r} \dots \beta_3^{-i_2} \beta_2^{i_1}$, где β_k ($k = 1, 2$) - скручивание, отвечающее элементарной косе $\sigma_k \in B_4$. Гомеоморфизмы β_3, β_2 можно выбрать так, чтобы их носители содержались в малых окрестностях дуг d_{34} и d_{23} . Поэтому можно считать, что носитель гомеоморфизма β содержится в некоторой окрестности дуги $d_{34} \cup d_{23}$. Обозначим через p_0 какую-нибудь точку сферы S^2 , не входящую в носитель гомеоморфизма β (так что $\beta(p_0) = p_0$).

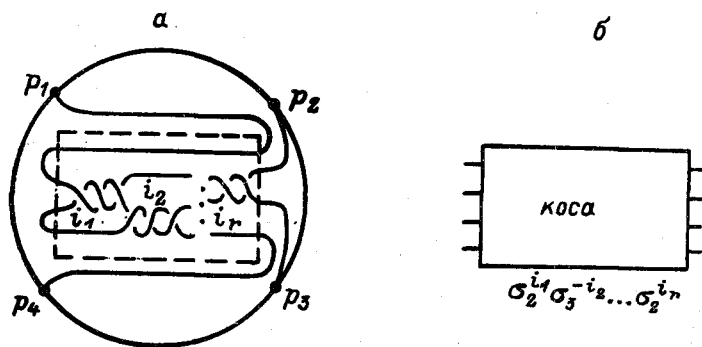


Рис. 11.

Пусть $s : T \rightarrow S^2$ - двулистное накрытие с ветвлением над $\partial t_0 = \partial t_{p/q}$. Обозначим через ψ гомеоморфизм тора T , тождественный на $s^{-1}(p_0)$ и накрывающий гомеоморфизм β :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\psi} & T \\ s \downarrow & & \downarrow s \\ S^2 & \xrightarrow{\beta} & S^2 \end{array}$$

Пусть $\text{Homeo}(T)$ - множество всех сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов тора T . Описанное здесь построение по косе из четырех нитей изотопического класса гомеоморфизмов тора дает гомоморфизм $\gamma : B_4 \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(T))$; ср. [8, п.2.10]. Как известно, $\pi_0(\text{Homeo}(T)) \cong SL(2; \mathbb{Z})$, и этот изоморфизм доставляется индуцированным автоморфизмом группы $H_1(T)$ и изоморфизмом $H_1(T) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Выберем последний так, чтобы образами классов кривых ξ и ζ на торе T были соответственно элементы $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Тогда на образующих $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ группы кос B_4 гомоморфизм γ задается следующим образом:

$$\gamma(\sigma_1) = \gamma(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Гомеоморфизм ψ , отвечающий тенглу $t_{p/q}$, определяет автоморфизм гомологической группы $H_1(T)$, имеющий матрицу

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{i_r} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-i_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{i_1}.$$

Поскольку существует гомеоморфизм $\tilde{\psi} : B_0 \rightarrow B$, накрывающий $\tilde{\beta}$ (см. п. 2.2) и продолжающий $\psi : \partial B_0 = T \rightarrow T = \partial B$, то накрывающее $N_1 = B \cup_{\omega_1} K_1$ можно представить как $B_0 \cup_{\omega_1 \psi} K_1$. Кривая $\xi = s^{-1}(d_{34}) \subset T$ является меридианом полнотория B_0 , поскольку она ограничивает в B_0 диск, являющийся прообразом при двулистном разветвленном накрытии $B_0 \rightarrow D^3$ сегмента, ограниченного дугой d_{34} и тенглом t_0 (рис. 7). Вычислим $\Psi_*[\xi]$:

$$\Psi_*[\xi] = \Psi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = q[\xi] + p[\zeta].$$

Следовательно, многообразие N_1 гомеоморфно $Q(q, p)$. Многообразие N_2 , как нетрудно понять, гомеоморфно $Q(p, q)$.

2.7. Доказательство теоремы 1. Известно, что любой гомеоморфизм пространства $\mathbb{R}P^3$ изотопен либо тождественному гомеоморфизму, либо симметрии относительно некоторой плоскости. Поэтому любые два гомеоморфных, но не изотопных зацепления зеркальны.

Пусть L_1 - проективное четырехсплетение p/q и L_2 - его зеркальный образ. (Как было замечено выше, в доказательстве теоремы 2, L_2 отвечает дроби $-p/q$ или q/p). Если зацепления L_1 и L_2 изотопны, то существует обращающий ориентацию гомеоморфизм $Q(p, q) \rightarrow Q(p, q)$. Легко показать, что многообразие $Q(p, q)$ является расслоением Зайферта над $\mathbb{R}P^2$ с одним особым слоем. Про такие многообразия известно [9], что они допускают обращающий ориентацию гомеоморфизм только, если $p = 1$ и $q = 0$. Зацепление, полученное из тенгла $\infty = 1/0$, является аффинной незаузленной окружностью. Таким образом, проективное четырехсплетение, рассматриваемое с точностью до изотопии, определяет пару дробей $(p/q, -q/p)$.

ДОБАВЛЕНИЕ: СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТИПЫ ДИАГРАММ ЗАЦЕПЛЕНИЙ В $\mathbb{R}P^3$

Имеется ряд специальных типов зацеплений в сфере: замкнутые косы, $2n$ -сплетения, зацепления с n мостами. Известно, что любое зацепление представимо замкнутой косой (теорема Александра), замкнутая коса с n нитями есть $2n$ -сплетение, любое $2n$ -сплетение изотопно зацеплению с n мостами и, наоборот, любое зацепление с n мостами изотопно $2n$ -сплетению.

Для зацеплений в проективном пространстве можно выделить аналогичные специальные типы зацеплений — замкнутые косы, $2n$ -сплетения, с n мостами. Общий вид замкнутой косы и $2n$ -сплетения показан на рис. 12, а и 12, б; пример зацепления с n мостами — на рис. 12, в ($n = 2$).

Такой перенос терминологии со случая зацеплений в сфере на случай зацеплений в $\mathbb{R}P^3$ объясняется тем, что прообраз зацепления со специальной диаграммой при накрытии $S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ может быть задан диаграммой соответствующего типа. Нетрудно видеть, что между специальными типами зацеплений в $\mathbb{R}P^3$ имеются связи, аналогичные перечисленным выше связям между специальными типами зацеплений в S^3 .

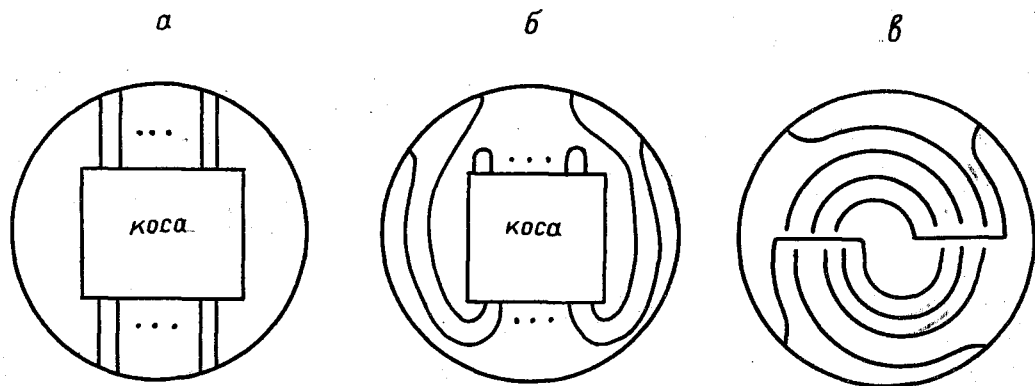


Рис. 12.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Reidemeister K., *Knotentheorie*, Berlin, 1932.
- [2] Дроботухина Ю.В., Аналог многочлена Джоунса для зацеплений в $\mathbb{R}P^3$ и обобщение теоремы Кауффмана-Мурасуги, *Алгебра и анализ* 2, вып. 3 (1990), 171–192.
- [3] Conway J. H., *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, Computational problems of abstract algebra, 1969, pp. 329–358.
- [4] Rubinstein J. K., *On 3-manifolds that have finite fundamental group and contain Klein bottles*, *Trans.AMS.* 251 (1979), 129–137.
- [5] Asano K., *Homeomorphisms of prism manifolds*, *Yokohama Math. J.* 26 (1978), 19–29.
- [6] Bonahon F., *Involutions et fibré de Seifert dans les variétés de dimension 3*, Thèse de 3e cycle, Orsay, 1979.
- [7] Иванов Н. В., *Гомотопии пространств диффеоморфизмов некоторых трехмерных многообразий*, *Зап. науч. семинаров ЛОМИ* 122 (1982), 72–103.
- [8] Виро О. Я., *Зацепления, двулистные разветвленные накрытия и косы*, *Мат. сб.* 87(129) (1972), 216–228.
- [9] Neumann W. D., Raymond F., *Seifert manifolds, plumbing, μ -invariant and orientation reversing maps*, *Lect. Notes in Math.* 664 (1978), 163–196.

Ленинградское отделение
 Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР,
 191011, Ленинград, наб. р. Фонтанки, 27

Поступило 25 июня 1990 г.