В. Д. Конаков, А. Р. Фалалеев, Сходимость некоторых классов случайных полетов в метрике Канторовича, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2020, том 65, выпуск 4, 829–840

DOI: 10.4213/tvp5364

 ***КОНАКОВ В. Д.**[*], **ФАЛАЛЕЕВ А. Р.**[**]*

СХОДИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕТОВ В МЕТРИКЕ КАНТОРОВИЧА[1)]

В этой статье мы рассмотрим случайное блуждание частицы в $\mathbf{R}^d$. Слабая сходимость различных преобразований траекторий случайных полетов с пуассоновскими моментами переключения была изучена в работе [3]. Кроме того, там же была построена диффузионная аппроксимация случайных полетов. Цель настоящей работы — доказать более сильную сходимость в терминах расстояния Канторовича. Рассматриваются три типа преобразований, случаи экспоненциального и сверхэкспоненциального роста функции преобразования моментов переключения достаточно просты, и результат следует из того, что предельные процессы принадлежат единичному шару, а в случае показательного роста функции преобразования факт сходимости следует из комбинаторных рассуждений и свойств метрики Канторовича.

Ключевые слова и фразы: расстояние Канторовича, случайное блуждание частицы, сходимость преобразований траекторий случайных полетов, максимальное неравенство Дуба.

DOI: https://doi.org/10.4213/tvp5364

1. Введение. Случайные полеты имеют множество физических приложений. В качестве примера упомянем процесс Лоренца — стохастический процесс, определяемый частицей, движущейся согласно закону движения Ньютона, через статические рассеиватели, распределенные в пространстве в соответствии с некоторой вероятностной мерой. Рассмотрим предел Больцмана–Града: плотность рассеивателей возрастает до бесконечности, при этом диаметр рассеивателей уменьшается до нуля таким образом, что средний свободный путь частицы остается постоянным. Известно, что процесс Лоренца сходится в слабой-*топологии регулярных борелевских мер на пространстве траекторий к некоторому стохастическому процессу. Предельный процесс является марковским тогда и только тогда, когда масштабированная плотность рассеивателей сходится по вероятности к ее среднему значению. В этом случае предельный процесс

[*]Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия; e-mail: VKonakov@hse.ru

[**]Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия; e-mail: mrfal9@gmail.com

[1)]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20119).

является (пространственно неоднородным) процессом случайного полета.

Пусть $(\mathcal{X}, \mathbf{d})$ — польское пространство и $p \in [1, \infty)$. Напомним определение пространства Канторовича–Вассерштейна порядка p:

$$P_p(\mathcal{X}) := \left\{ \mu \in P(\mathcal{X});\ \int_{\mathcal{X}} d(x_0, x)^p \, \mu(dx) < +\infty \right\}$$

для некоторого (а значит, для любого) $x_0 \in \mathcal{X}$, где $P(\mathcal{X})$ есть множество всех вероятностных мер на $\mathcal{X}$.

Для любых двух вероятностных мер μ, ν на $\mathcal{X}$ расстояние Канторовича порядка p между μ и ν определяется формулой

$$\begin{aligned} W_p(\mu, \nu) &= \left(\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int_{\mathcal{X}} d(x, y)^p \, d\pi(x, y) \right)^{1/p} \\ &= \inf\left\{ [\mathbf{Ed}(X, Y)^p]^{1/p},\ \mathrm{law}(X) = \mu,\ \mathrm{law}(Y) = \nu \right\}. \end{aligned}$$

Известно, что расстояние Канторовича W_p метризует слабую сходимость в $P_p(\mathcal{X})$ (см. [1, теорема 6.8]). Однако необходимо подчеркнуть, что "слабая сходимость" в смысле [1] сильнее классической слабой сходимости [4] (см. [1, определение 6.7]). Эти два типа сходимости эквивалентны, если метрика d ограничена, но в общем случае они различны. Слабая сходимость, установленная в [3], была в классическом смысле. Именно поэтому сходимость в метрике Канторовича—Вассерштейна должна быть доказана и автоматически не вытекает из слабой сходимости, рассмотренной в [3].

Рассмотрим случайное блуждание частицы в $\mathbf{R}^d$, которое определяется двумя независимыми последовательностями случайных величин T_k и ε_k. Последовательность ε_k состоит из независимых случайных величин, распределенных на единичной сфере S^{d-1}, и определяет направление движения частицы. Последовательность T_k такова, что $T_k \geqslant 0$, $T_k \leqslant T_{k+1}$ для любого k и может быть интерпретирована как последовательность моментов, когда направление полета частицы измененяется. Частица начинает движение из начала координат и движется в направлении ε_1 вплоть до момента T_1. Потом она меняет направление на ε_2 и движется в этом направлении в течение времени $T_2 - T_1$ и т.д. Скорость движения постоянна на всех участках. Положение частицы в момент времени t обозначается $X(t)$. В статье [3] определены условия, при которых процесс $\{Y_T, T > 0\}$:

$$Y_T(t) = \frac{1}{B(T)} X(tT), \qquad t \in [0, 1],$$

слабо сходится в $\mathbf{C}[0, 1]$: $Y_T \Rightarrow Y$, $T \to \infty$ и $B(T) \to \infty$.

Предполагается, что моменты переключений образуют пуассоновский процесс $\mathbb{T} = (T_k)$ в $\mathbf{R}_+$. В однородном случае процесс $X(t)$ является случайным блужданием, поскольку интервалы $T_{k+1} - T_k$ независимы, а Y — винеровский процесс. В случае же неоднородного пуассоновского процесса ситуация усложняется, поскольку приращения $T_{k+1} - T_k$ более не являются независимыми.

Тем не менее, была найдена форма предельного процесса и доказана слабая сходимость для некоторых функций преобразования пуассоновских моментов переключений. Пусть $T_k = f(\Gamma_k)$, где (Γ_k) — стандартный однородный пуассоновский процесс в $\mathbf{R}_+$ интенсивности 1. В этом случае

$$(\Gamma_k) = (\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k),$$

где (γ_k) — стандартные н.о.р. экспоненциальные случайные величины, а $f(x)$ — регулярная функция с полиномиальным, экспоненциальным или суперэкспоненциальным ростом. Также предполагается, что $\mathbf{E}\varepsilon_1 = 0$.

Определим процесс

$$Z_n(t) = Y_{T_n}(t).$$

Для $T = T_n$ траектории $\{Z_n(t),\, t \in [0,1]\}$ являются ломаными с вершинами в точках $\{(t_{n,k}, S_k/B_n),\, k = 0, 1, \dots, n\}$, где $t_{n,k} = T_k/T_n$, $T_0 = 0$, $B_n = B(T_n)$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i (T_i - T_{i-1})$.

Основной результат первой части работы [3] сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *При сформулированных выше предположениях справедливы следующие утверждения*:

1) *Если функция f растет полиномиально*: $f(t) = t^\alpha$, $\alpha > 1/2$, *положим $B(T) = T^{(2\alpha-1)/(2\alpha)}$. Тогда процесс Z_n слабо сходится к Y, где Y — гауссовский процесс*

$$Y(t) = \sqrt{2\alpha} \int_0^t s^{(\alpha-1)/(2\alpha)}\, dw(s),$$

w — процесс броуновского движения, для которого ковариационная матрица $w(1)$ совпадает с ковариационной матрицей ε_1.

2) *Если функция f растет экспоненциально*: $f(t) = e^{t\beta}$, $\beta > 0$, *то положим $B(T) = T$. Тогда процесс Z_n слабо сходится к Y, где Y — непрерывный кусочно-линейный процесс с вершинами в точках $(t_k, Y(t_k))$,*

$$t_k = e^{-\beta\Gamma_{k-1}}, \quad \Gamma_0 = 0,$$
$$Y(t_k) = \sum_{i=k}^{\infty} \varepsilon_i (e^{-\beta\Gamma_{i-1}} - e^{-\beta\Gamma_i}), \quad Y(0) = 0.$$

3) *В случае суперэкспоненциального роста функции f предположим, что f является возрастающей непрерывной функцией такой, что*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f'(t)}{f(t)}=+\infty.$$

Рассмотрим $B(T)=T$. Тогда $T_n/T_{n+1}\to 0$ по вероятности и $Z_n\Rightarrow Y$, где предельный процесс вырождается:

$$Y(t)=\varepsilon_1 t,\qquad t\in[0,1].$$

Напомним, что цель этой работы — доказать более сильную сходимость, а именно сходимость в метрике Канторовича–Вассерштейна. Отметим, что значения констант в приведенных ниже доказательствах могут меняться от строки к строке.

2. Основной результат. В дальнейшем мы рассмотрим $\mathcal{X}=\mathbf{C}[0,1]$ и $\mathbf{d}(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$. Для непрерывного случайного процесса $X(t)$, $t\in[0,1]$, обозначим через μ_X меру в $\mathbf{C}[0,1]$, соответствующую этому процессу.

Теорема 2. *Рассмотрим польское пространство $(\mathcal{X},\mathbf{d})$ и $p\in[1,\infty)$. Тогда*

$$W_p(\mu_{X_n},\mu_Y)\to 0,$$

где процесс X_n для случаев 1)–3) является ломаной с вершинами в точках $(t_{n,k},X_n(t_{n,k}))$.

Для случая 1)

$$t_{n,k}=\left(\frac{\Gamma_k}{\Gamma_n}\right)^{\alpha},\quad X_n(t_{n,k})=n^{1/2-\alpha}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i(\Gamma_i^{\alpha}-\Gamma_{i-1}^{\alpha}),$$
$$\Gamma_0^{\alpha}=0,\qquad k=1,\dots,n.$$

Предельный процесс $Y(t)$ — гауссовский и имеет интегральное представление

$$Y(t)=\sqrt{2\alpha}\int_0^t s^{(\alpha-1)/(2\alpha)}\,dw(s),$$

где $w(s)$ — броуновское движение с ковариационной матрицей $w(1)$, совпадающей с ковариационной матрицей ε_1.

Для случая 2)

$$t_{n,k}=e^{-\beta(\Gamma_n-\Gamma_k)},\quad X_n(t_{n,k})=e^{-\beta\Gamma_n}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i(e^{\beta\Gamma_i}-e^{\beta\Gamma_{i-1}}),$$
$$\Gamma_0=0,\qquad k=1,\dots,n.$$

Предельный процесс $Y(t)$ *является непрерывным кусочно-линейным процессом со счетным числом вершин* $(t_k, Y(t_k))$, $k = 1, 2, \dots,$ $t_k = e^{-\beta\Gamma_{k-1}}$, $\Gamma_0 = 0$,

$$Y(t_k) = \sum_{i=k}^{\infty} \varepsilon_i (e^{-\beta\Gamma_{i-1}} - e^{-\beta\Gamma_i}).$$

Для случая 3)

$$t_{n,k} = \frac{f(T_k)}{f(T_n)}, \quad X_n(t_{n,k}) = \frac{1}{f(T_n)} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i (f(\Gamma_i) - f(\Gamma_{i-1})),$$
$$\Gamma_0 = 0, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Предельный процесс $Y(t)$ *вырождается*:

$$Y(t) = \varepsilon_1 t, \qquad t \in [0, 1].$$

Что касается интуитивного объяснения предельных процессов, то следует сказать, что в полиномиальном случае такое объяснение фактически было дано в работе [3]. Исходный процесс аппроксимировался процессом, представляющим собой ломаную линию, построенную по последовательности частичных сумм независимых (неодинаково распределенных) случайных величин. Тогда можно применить теорему Ю. В. Прохорова. Экспоненциальный случай следует прямым вычислением, и сверхэкспоненциальный случай получается как вырождение экспоненциального случая, когда вся ломаная линия до ее предпоследнего звена сосредоточена в сколь угодно малой окрестности нуля. Последнее звено вырождается в луч, идущий из начала координат.

3. Вспомогательные определения и результаты.

Определение 1 (слабая сходимость в P_p). Пусть $(\mathcal{X}, \mathbf{d})$ — польское пространство, $p \in [1, \infty)$. Пусть также (μ_k), $k \in \mathbf{N}$, — последовательность вероятностных мер в $P_p(X)$ и $\mu \in P_p(\mathcal{X})$. Скажем, что μ_k “слабо сходится в $P_p(X)$”, если выполнено любое из следующих эквивалентных утверждений для некоторого (а значит, и для любого) $x_0 \in X$:

(i) $\mu_k \Rightarrow \mu$, $k \to \infty$, и

$$\int d(x_0, x)^p \, d\mu_k(x) \to \int d(x_0, x)^p d\mu(x);$$

(ii) $\mu_k \Rightarrow \mu$, $k \to \infty$, и

$$\limsup_{k\to\infty} \int d(x_0, x)^p \, d\mu_k(x) \leqslant \int d(x_0, x)^p \, d\mu(x);$$

(iii) $\mu_k \Rightarrow \mu$, $k \to \infty$, и

$$\lim_{R\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \int_{d(x_0,x)\geqslant R} d(x_0, x)^p \, d\mu_k(x) = 0;$$

(iv) для любой непрерывной функции φ с $|\varphi(x)| \leqslant C(1 + d(x_0, x)^p)$, $C \in \mathbf{R}_+$, верно

$$\int \varphi(x)\, d\mu_k(x) \to \int \varphi(x)\, d\mu(x).$$

Теорема 3 (W_p метризует $P_p(\mathcal{X})$, [1, теорема 6.8])**.** *Пусть* $(\mathcal{X}, \mathbf{d})$ — *польское пространство,* $p \in [1, \infty)$; *тогда расстояние Канторовича* W_p *метризует "слабую сходимость в* $P_p(\mathcal{X})$*". Другими словами, если* $(\mu_k)_{k \in \mathbf{N}}$ — *последовательность вероятностных мер в* $P_p(\mathcal{X})$ *и* μ — *мера в* $P_p(\mathcal{X})$*, то утверждения*

$$\mu_k \text{ "слабо сходится в } P_p(\mathcal{X})\text{" к } \mu$$

и

$$W_p(\mu_k, \mu) \to 0$$

эквивалентны.

Для доказательства нам потребуются дополнительные оценки.

Теорема 4 (максимальное неравенство Дж. Дуба, [2])**.** *Если* X_k *является мартингалом или положительным субмартингалом, индексируемым конечным множеством* $k \in (0, 1, \ldots, N)$*, то для любого* $p \geqslant 1$ *и* $\lambda > 0$

$$\lambda^p \mathbf{P}\Big[\sup_{0 \leqslant k \leqslant N} |X_k| \geqslant \lambda\Big] \leqslant \mathbf{E}[|X_N|^p].$$

Мы воспользуемся следующими оценками из [3].

Лемма 1. *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $m \geqslant 1$*. Тогда для любых* $x > 0$, $h > 0$

$$(x + h)^\alpha - x^\alpha = \sum_{k=1}^{m} a_k h^k x^{\alpha - k} + R(x, h),$$

где

$$a_k = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)}{k!},$$
$$|R(x, h)| \leqslant |a_{m+1}| h^{m+1} \max\{x^{\alpha - (m+1)}, (x + h)^{\alpha - (m+1)}\}.$$

Лемма 2. *Пусть* $\alpha \geqslant 0$*. Тогда при* $k \to \infty$

$$\left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)^k = e^\alpha + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Лемма 3. *Пусть* Γ *обозначает гамма-функцию. Тогда при* $k \to \infty$

$$\frac{\Gamma(k + \alpha)}{\Gamma(k)} = k^\alpha + O(k^{\alpha - 1}).$$

Лемма 4. *Для любого действительного* β *и* $k \to \infty$

$$\mathbf{E}\Gamma_k^\beta = k^\beta + O(k^{\beta-1}).$$

Лемма 5. *Пусть* $\alpha \geqslant 0$. *Для* $k \to \infty$ *следующие соотношения имеют место*:

$$\Gamma_{k+1}^\alpha - \Gamma_k^\alpha = \alpha\gamma_{k+1}\Gamma_k^{\alpha-1} + \rho_k,$$

где $|\rho_k| = O(k^{\alpha-2})$ *по вероятности*;

$$\mathbf{E}|\Gamma_{k+1}^\alpha - \Gamma_k^\alpha|^2 = 2\alpha^2 k^{2\alpha-2} + O(k^{2\alpha-3}).$$

Из леммы 5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Справедливо следующее равенство*:

$$\sum_1^{n-1} \mathbf{E}|\Gamma_{k+1}^\alpha - \Gamma_k^\alpha|^2 = \frac{2\alpha^2}{2\alpha-1} n^{2\alpha-1} + O(n^{2\alpha-2}).$$

4. Доказательство теоремы 2. Мы рассмотрим три случая.

Случай экспоненциального роста. Функция преобразования моментов переключения имеет следующий вид: $f(t) = e^{t\beta}$, $\beta > 0$, $B(T) = T$, процесс Z_n слабо сходится к Y, где Y — непрерывный кусочно-линейный процесс с вершинами в точках $(t_k, Y(t_k))$,

$$t_k = e^{-\beta\Gamma_{k-1}}, \quad \Gamma_0 = 0,$$

$$Y(t_k) = \sum_{i=k}^\infty \varepsilon_k(e^{-\beta\Gamma_{i-1}} - e^{-\beta\Gamma_i}), \quad Y(0) = 0.$$

Для $T = T_n$ траектории $\{Z_n(t),\, t \in [0,1]\}$ являются непрерывными ломаными линиями с вершинами в точках $\{(t_{n,k}, S_k/B_n),\, k = 0, 1, \ldots, n\}$, где $t_{n,k} = T_k/T_n$, $T_0 = 0$, $B_n = B(T_n)$, $S_k = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i(T_i - T_{i-1})$.

Таким образом, траектории процесса имеют форму ломаной с вершинами в точках $(t_{n,k}, X_n(t_{n,k}))$:

$$X_n(t_{n,k}) = \frac{1}{e^{\beta\Gamma_n}} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i(e^{\beta\Gamma_i} - e^{\beta\Gamma_{i-1}}).$$

Процесс $X_n(\,\cdot\,) \overset{\mathcal{L}}{=} Y_n(\,\cdot\,)$ ([3, с. 8]), где $Y_n(\,\cdot\,)$ — ломаная с вершинами в точках $(\tau_{n,k}, Y_n(\tau_{n,k}))$, $(\tau_{n,k})\downarrow$, $\tau_{n,1} = 1$, $\tau_{n,k} = e^{-\beta(\gamma_1+\cdots+\gamma_{k-1})}$, $k = 2, \ldots, n$,

$$Y_n(\tau_{n,k}) = \sum_{i=k}^{n-1} \varepsilon_i(e^{-\beta\Gamma_{i-1}} - e^{-\beta\Gamma_i}) + \varepsilon_n e^{-\beta\Gamma_{n-1}},$$

$Y_n(0) = 0$ и $\Gamma_0 = 0$.

Так как $Y_n(\tau_{n,k})$ является суммой неотрицательных слагаемых, умноженных на случайный вектор ε_i, $|\varepsilon_i| = 1$, то

$$\max_{k=1,\dots,n} |Y_n(\tau_{n,k})| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} (e^{-\beta\Gamma_{i-1}} - e^{-\beta\Gamma_i}) + e^{-\beta\Gamma_{n-1}} = 1.$$

Следовательно, для $R > 1$

$$\mu_n(\mathbf{d}(\mathbf{0}, x) \geqslant R) = \mathbf{P}\Big(\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |Y_n(t)| \geqslant R\Big) = 0.$$

Тогда

$$\lim_{R\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \int_{\mathbf{d}(\mathbf{0},x)\geqslant R} \mathbf{d}^p(\mathbf{0}, x)\, d\mu_n(x) = 0.$$

Сходимость $W_p(\mu_n, \mu) \to 0$ для любого $p > 1$ доказана.

Случай супер-экспоненциального роста. В этом случае, полагая $B_n = B(T_n) = T_n$, имеем

$$\max_{k=1,\dots,n} |X_n(t_{n,k})| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k - T_{k-1}}{T_n} = \frac{T_n}{T_n} = 1.$$

Следовательно, для $R > 1$

$$\mu_n(\mathbf{d}(\mathbf{0}, x) \geqslant R) = \mathbf{P}\Big(\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |X_n(t)| \geqslant R\Big) = 0.$$

Тогда

$$\lim_{R\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \int_{\mathbf{d}(\mathbf{0},x)\geqslant R} \mathbf{d}^p(0, x)\, d\mu_n(x) = 0.$$

Сходимость $W_p(\mu_n, \mu) \to 0$ для любого $p > 1$ доказана.

Случай полиномиального роста. Заметим, что если ε_j — равномерно распределенная случайная величина на единичном шаре в $\mathbf{R}^d$, то $\langle \varepsilon_i, e_j \rangle$ — одномерная случайная величина, распределенная симметрично относительно 0. Воспользуемся тем, что нечетные моменты такой случайной величины равны 0. Имеем

$$T_k = \Gamma_k^\alpha, \quad \alpha > \frac{1}{2}, \quad t_{n,k} = \frac{T_k}{T_n} = \left(\frac{\Gamma_k}{\Gamma_n}\right)^\alpha, \quad B_n = n^{\alpha - 1/2},$$

$$\Gamma_0^\alpha = 0, \quad X_n(t_{n,k}) = \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i (\Gamma_i^\alpha - \Gamma_{i-1}^\alpha).$$

Получим верхнюю оценку:

$$\mathbf{P}\bigg(\max_{k=1,\dots,n}\bigg|\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{k}\langle\varepsilon_i,e_j\rangle(\Gamma_i^\alpha-\Gamma_{i-1}^\alpha)\bigg|\geqslant 3R\bigg)$$

$$\leqslant \mathbf{P}\bigg(\max_{k=1,\dots,n}\bigg|\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{k}\langle\varepsilon_i,e_j\rangle(\Gamma_i^\alpha-\Gamma_{i-1}^\alpha)-\frac{\alpha}{B_n}\sum_{i=1}^{k}\langle\varepsilon_i,e_j\rangle\gamma_i\Gamma_{i-1}^{\alpha-1}\bigg|>R\bigg)$$

$$+\mathbf{P}\bigg(\max_{k=1,\dots,n}\bigg|\frac{\alpha}{B_n}\sum_{i=1}^{k}\langle\varepsilon_i,e_j\rangle\gamma_i\Gamma_{i-1}^{\alpha-1}-\frac{\alpha}{B_n}\sum_{i=1}^{k}\langle\varepsilon_i,e_j\rangle\gamma_i(i-1)^{\alpha-1}\bigg|>R\bigg)$$

$$+\mathbf{P}\bigg(\max_{k=1,\dots,n}\bigg|\frac{\alpha}{B_n}\sum_{i=1}^{k}\langle\varepsilon_i,e_j\rangle\gamma_i(i-1)^{\alpha-1}\bigg|>R\bigg)=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}.$$

Оценка для I. Воспользуемся максимальным неравенством Дж. Дуба, полагая $\lambda=B_nR$, $p=2N$. Пусть $\mathfrak{M}_n=\sigma(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ — фильтрация, индуцированная $(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$. Тогда процесс

$$A_k^\alpha=\sum_{i=1}^{k}\langle\varepsilon_i,e_j\rangle(\Gamma_i^\alpha-\Gamma_{i-1}^\alpha-\alpha\gamma_i\Gamma_{i-1}^{\alpha-1})$$

становится условным мартингалом. Согласно максимальному неравенству Дуба

$$I=\mathbf{E}\Big(\mathbf{P}\Big(\max_{k=1,\dots,n}|A_k^\alpha|>B_nR\Big)\ \Big|\ \mathfrak{M}_n\Big)\leqslant\frac{1}{R^{2N}n^{2N\alpha-N}}\mathbf{E}(A_k^\alpha)^{2N}$$

$$=\frac{n^{N-2N\alpha}}{R^{2N}}\sum_{k_1+\dots+k_n=2N}\frac{(2N)!}{k_1!\cdots k_n!}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{E}(\langle\varepsilon_i,e_j\rangle)^{k_i}\mathbf{E}(\Gamma_i^\alpha-\Gamma_{i-1}^\alpha-\alpha\gamma_i\Gamma_{i-1}^{\alpha-1})^{k_i}.$$

Заметим, что если среди k_i имеется хотя бы одно нечетное число, то соответствующее слагаемое в сумме равно нулю из-за симметричности распределения ε_i относительно 0.

Из (19) в [3] вытекает, что для $1/2<\alpha<2$

$$\big|\mathbf{E}(\Gamma_i^\alpha-\Gamma_{i-1}^\alpha-\alpha\gamma_i\Gamma_{i-1}^{\alpha-1})^{k_i}\big|\leqslant\mathbf{E}|\Gamma_i^\alpha-\Gamma_{i-1}^\alpha-\alpha\gamma_i\Gamma_{i-1}^{\alpha-1}|^{k_i}$$

$$\leqslant C(\alpha,N)\mathbf{E}(\gamma_i)^{2k_i}\mathbf{E}\Gamma_{i-1}^{k_i(\alpha-2)}\leqslant C(\alpha,N)(2k_i)!\,i^{(\alpha-2)k_i}.$$

Следовательно, используя то, что $\alpha<2$, получаем

$$\bigg|\prod_{i=1}^{n}\mathbf{E}(\langle\varepsilon_i,e_j\rangle)^{k_i}\mathbf{E}(\Gamma_i^\alpha-\Gamma_{i-1}^\alpha-\alpha\gamma_i\Gamma_{i-1}^{\alpha-1})^{k_i}\bigg|\leqslant C(\alpha,N)\prod_{i=1}^{n}i^{k_i(\alpha-2)}\leqslant C(\alpha,N).$$

Для $\alpha\geqslant 2$ воспользуемся неравенством Коши–Буняковского:

$$\mathbf{E}\big(\gamma_i^{2k_i}\Gamma_i^{(\alpha-2)k_i}\big)\leqslant\sqrt{\mathbf{E}(\gamma_i)^{4k_i}}\sqrt{\mathbf{E}\Gamma_i^{(2\alpha-4)k_i}}\leqslant C(\alpha,N)i^{(\alpha-2)k_i},$$

и

$$\left|\mathbf{E}(\Gamma_i^\alpha-\Gamma_{i-1}^\alpha-\alpha\gamma_i\Gamma_{i-1}^{\alpha-1})^{k_i}\right|\leqslant \mathbf{E}|\Gamma_i^\alpha-\Gamma_{i-1}^\alpha-\alpha\gamma_i\Gamma_{i-1}^{\alpha-1}|^{k_i}\leqslant C(\alpha,N)i^{(\alpha-2)k_i}.$$

Следовательно, по лемме 5

$$\left|\frac{(2N)!}{k_1!\cdots k_n!}\prod_{i=1}^n\mathbf{E}(\langle\varepsilon_i,e_j\rangle)^{k_i}\mathbf{E}(\Gamma_i^\alpha-\Gamma_{i-1}^\alpha-\alpha\gamma_i\Gamma_{i-1}^{\alpha-1})^{k_i}\right|$$
$$\leqslant C(\alpha,N)\prod_{i=1}^n i^{(\alpha-2)k_i}\leqslant C(\alpha,N)\prod_{i=1}^n n^{(\alpha-2)k_i}=C(\alpha,N)n^{2N\alpha-4N}.$$

Оценим число ненулевых слагаемых в сумме $\sum_{k_1+\dots+k_n=2N}$. Ограничение $C(N)n^N$ на число слагаемых получается из простых комбинаторных рассуждений. Имеем

$$\mathrm{I}\leqslant\frac{C(\alpha,N)}{R^{2N}n^{2N\alpha-N}}n^{2N\alpha-4N}n^N<\frac{C(\alpha,N)}{R^{2N}}. \tag{4.1}$$

Этой оценки достаточно для проверки п. (iii) в определении 1.

Оценка для II. Таким же образом воспользуемся независимостью γ_i и Γ_{i-1}^α и получим

$$\mathrm{II}\leqslant\frac{\alpha^{2N}}{R^{2N}n^{2N\alpha-N}}\sum_{k_1+\dots+k_n=2N}D_{\overline{k}},$$

где

$$D_{\overline{k}}=\frac{(2N)!}{k_1!\cdots k_n!}\prod_{i=2}^n\mathbf{E}(\langle\varepsilon_i,e_j\rangle)^{k_i}\mathbf{E}(\gamma_i)^{k_i}\mathbf{E}\bigl(\Gamma_{i-1}^{\alpha-1}-(i-1)^{\alpha-1}\bigr)^{k_i},$$

$\overline{k}=(k_1,\dots,k_n)$. Оценим математическое ожидание:

$$\mathbf{E}\bigl(\Gamma_{i-1}^{\alpha-1}-(i-1)^{\alpha-1}\bigr)^{k_i}=\sum_{m=0}^{k_i}C_{k_i}^m(-1)^{k_i-m}(i-1)^{(k_i-m)(\alpha-1)}\mathbf{E}\Gamma_{i-1}^{(\alpha-1)m}$$
$$=\sum_{m=0}^{k_i}(-1)^{k_i-m}(i-1)^{(k_i-m)(\alpha-1)}C_{k_i}^m\bigl[(i-1)^{(\alpha-1)m}+O_m\bigl((i-1)^{(\alpha-1)m-1}\bigr)\bigr]$$
$$=(i-1)^{k_i(\alpha-1)}\left[\sum_{m=0}^{k_i}C_{k_i}^m(-1)^{k_i-m}+\sum_{m=0}^{k_i}C_{k_i}^m(-1)^{k_i-m}O_m\bigl((i-1)^{-1}\bigr)\right].$$

Имеем

$$\left|\prod_{i=2}^{n}\mathbf{E}(\langle\varepsilon_i,e_j\rangle)^{k_i}\mathbf{E}(\gamma_i)^{k_i}\mathbf{E}\bigl(\Gamma_{i-1}^{\alpha-1}-(i-1)^{\alpha-1}\bigr)^{k_i}\right|\leqslant C(N,\alpha)\prod_{i=1}^{n}i^{k_i(\alpha-1)}$$

$$\leqslant C(N,\alpha)\prod_{i=1}^{n}n^{k_i(\alpha-1)}=C(N,\alpha)n^{2N(\alpha-1)};$$

$$\mathrm{II}\leqslant C(N,\alpha)\frac{\alpha^{2N}}{R^{2N}n^{2N\alpha-N}}n^Nn^{2N(\alpha-1)-1}\leqslant C(N,\alpha)\frac{\alpha^{2N}}{R^{2N}}. \tag{4.2}$$

Имеем

$$\mathrm{III}\leqslant\frac{\alpha^{2N}}{R^{2N}n^{2N\alpha-N}}\sum_{k_1+\dots+k_n=2N}\frac{(2N)!}{k_1!\cdots k_n!}\prod_{i=2}^{n}\mathbf{E}(\langle\varepsilon_i,e_j\rangle)^{k_i}\mathbf{E}(\gamma_i)^{k_i}(i-1)^{k_i(\alpha-1)},$$

где

$$\left|\prod_{i=2}^{n}\mathbf{E}(\langle\varepsilon_i,e_j\rangle)^{k_i}\mathbf{E}(\gamma_i)^{k_i}(i-1)^{k_i(\alpha-1)}\right|\leqslant C(N,\alpha)n^{2N(\alpha-1)}.$$

Окончательно получим

$$\mathrm{III}\leqslant C(N,\alpha)\frac{1}{R^{2N}n^{2N\alpha-N}}n^Nn^{2N(\alpha-1)}=\frac{C(N,\alpha)}{R^{2N}}. \tag{4.3}$$

Многомерные случаи сводятся к одномерному следующим образом:

$$\mathbf{P}\left(\max_{k=1,2,\dots,n}\left|\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i(\Gamma_i^\alpha-\Gamma_{i-1}^\alpha)\right|\geqslant B_nR\right)$$

$$=\mathbf{P}\left(\max_{k=1,2,\dots,n}\left|\sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{k}\langle\varepsilon_i,e_j\rangle e_j(\Gamma_i^\alpha-\Gamma_{i-1}^\alpha)\right|\geqslant B_nR\right)$$

$$\leqslant\mathbf{P}\left(\exists\, j^*,\ 1\leqslant j^*\leqslant d,\ \max_{k=1,2,\dots,n}\left|\sum_{i=1}^{k}\langle\varepsilon_i,e_{j^*}\rangle e_{j^*}(\Gamma_i^\alpha-\Gamma_{i-1}^\alpha)\right|\geqslant\frac{B_nR}{d}\right)$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{d}\mathbf{P}\left(\max_{k=1,2,\dots,n}\sum_{i=1}^{k}|\langle\varepsilon_i,e_j\rangle|(\Gamma_i^\alpha-\Gamma_{i-1}^\alpha)\geqslant\frac{B_nR}{d}\right). \tag{4.4}$$

Проверим условия теоремы 6.8 из [1], используя ранее полученные оценки (4.1)–(4.4):

$$\int_{d(0,x)>R}\mathbf{d}^p(\mathbf{0},x)\,d\mu_n(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\int_{(i+1)R\leqslant\mathbf{d}(\mathbf{0},x)<(i+2)R}\mathbf{d}^p(\mathbf{0},x)\,d\mu_n(x)$$

$$\leqslant R^p\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)^p\cdot\mu_n\bigl(\mathbf{d}(\mathbf{0},x)\geqslant(i+1)R\bigr)$$

$$
\begin{aligned}
&= R^p \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)^p \cdot \mathbf{P}\Bigl(\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |X_n(t)| \geqslant (i+1)R\Bigr) \\
&= R^p \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)^p \cdot \mathbf{P}\left(\max_{k=1,\dots,n} \left|\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i (\Gamma_i^\alpha - \Gamma_{i-1}^\alpha)\right| \geqslant (i+1)R\right) \\
&\leqslant R^p \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)^p \cdot \sum_{j=1}^{d} \mathbf{P}\left(\max_{k=1,2,\dots,n} \sum_{i=1}^{k} |\langle \varepsilon_i, e_j\rangle| (\Gamma_i^\alpha - \Gamma_{i-1}^\alpha) \geqslant \frac{B_n (i+1) R}{d}\right) \\
&\leqslant \frac{C(N,\alpha,d)}{R^{2N-p}}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, условие (iii) из определения 1 выполнено для $\alpha > 1/2$:

$$
\lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathbf{d}(\mathbf{0},x)\geqslant R} \mathbf{d}^p(\mathbf{0},x)\, d\mu_n(x) = 0.
$$

Это завершает доказательство сходимости в метрике Канторовича для случая $\alpha > 1/2$ и $p \in [1,\infty)$.

Авторы благодарны Ю. Давыдову за полезные обсуждения в ходе работы над статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C. Villani, *Optimal transport, old and new*, Grundlehren Math. Wiss., **338**, Springer-Verlag, Berlin, 2009, 635 pp.
2. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977, 351 с.; пер. с англ.: P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1968, xii+253 pp.
3. Y. Davydov, V. Konakov, “Random walks in nonhomogeneous Poisson environment”, *Modern problems of stochastic analysis and statistics*, Selected contributions in honor of Valentin Konakov’s 70th birthday (Moscow, 2016), Springer Proc. Math. Stat., **208**, Springer, Cham, 2017, 3–24.
4. D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, 3rd ed., Grundlehren Math. Wiss., **293**, Springer-Verlag, Berlin, 1999, xiv+602 pp.

Поступила в редакцию
14.X.2019
Исправленный вариант
25.XII.2019