ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 60, № 1
июль, 1984

КРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА КАК ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Антонов Н. В., Васильев А. Н.

Критическая динамика [1–3] рассматривается систематически с позиций квантовой теории поля. Подробно обсуждается связь динамики и статики и ее следствия для констант ренормировки. Основным техническим результатом является расчет вклада ε^3 в $4-2\varepsilon$-разложении динамического индекса Δ_ω (критическая размерность частоты) для O_n-симметричной модели φ^4: вместо значения $\Delta_\omega=2+0{,}726(1-2\varepsilon\cdot 1{,}687)\eta$, полученного ранее в [4], мы получили $\Delta_\omega=2+0{,}726(1-2\varepsilon\cdot 0{,}1885)\eta$.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время методы ренормгруппы (РГ) с успехом применяются для расчета не только статического, но и динамического критического поведения. Критическую динамику поля (или системы полей) $\varphi(x)\equiv\equiv\varphi(\mathrm{x}, t)$ в отсутствие «межмодовой связи» (см. обзор [1] и монографии [2, 3]) описывают обычно стохастическим уравнением Ланжевена

$$\partial_t\varphi=\Gamma V(\varphi)+F, \tag{1}$$

в котором $V(\varphi)=\delta\bar{S}(\varphi)/\delta\varphi$ — вариационная производная статического функционала действия $\bar{S}(\varphi)$ для поля $\varphi(\mathrm{x})$ (после выполнения дифференцирования $\varphi(\mathrm{x})\to\varphi(x)$), кинетический коэффициент Онзагера Γ — некоторая не зависящая от φ линейная операция, действующая только на аргумент x (обычно $\Gamma=\mathrm{const}$ или $\mathrm{const}\cdot\Delta$), а F — случайная внешняя сила. Для F предполагается гауссово распределение с коррелятором

$$D(x, x')=\langle F(x)F(x')\rangle=2\Gamma\delta(x-x'). \tag{2}$$

Статические корреляционные функции (функции Грина) определяются функциональными средними с весом $\exp\bar{S}(\varphi)$ (мы включаем в $\bar{S}$ обычный минус в показателе), и если $\bar{S}(\varphi)$, как теперь обычно считается, соответствует некоторой ренормируемой евклидовой теории поля, то для анализа критического поведения можно пользоваться стандартной квантово-полевой РГ-техникой. Под стандартной техникой мы подразумеваем уравнения в форме Овсянникова — Каллана — Симанзика с расчетом их коэффициентов (β- и γ-функций) через константы ренормировки Z. Эта техника удобна в приложениях, особенно при вычислении высших порядков, и имеет надежную базу в виде хорошо разработанной квантово-полевой теории ренормировки.

В динамике также применяют РГ-метод, но чаще не в стандартной форме, а в виде рекурсионных соотношений Вильсона [1–3], и расчеты, как правило, ограничиваются лишь низшими порядками $4-2\varepsilon$-разложения

(ε или ε^2). Единственный известный нам расчет динамического индекса с точностью до ε^3 был выполнен в работе [4] для O_n-симметричной модели φ^4 («модель А» в терминологии [1]). Он основан на более ранней работе [5], в которой стохастическая задача (1), (2) для модели φ^4 была сведена к квантово-полевой теории бозе-газа, что позволило использовать в [4] стандартную РГ-технику. Но результаты [5] относятся лишь к конкретной модели φ^4, причем процедура сведения стохастической задачи к теории поля отнюдь не тривиальна, а соответствие не прямое, т. к. в полученной теории поля нужно еще выполнить некоторую предельную процедуру («классический предел» в терминологии [5]).

Существует, однако, очень простой и универсальный способ превращения стохастической задачи (1) в теорию поля посредством удвоения числа полей [6]. Он позволяет использовать стандартную РГ-технику в любой динамической задаче и был также с успехом применен в теории турбулентности для обоснования РГ-методом колмогоровского скейлинга [7].

В данной работе мы, пользуясь результатами [6], изложим стохастическую задачу (1), (2) для модели φ^4 в форме обычной квантовой теории поля. Стандартной РГ-техникой мы вычисляем затем вклад ε^3 в динамический индекс Δ_ω ($\Delta_\omega \equiv z$ в обозначениях [1, 2]) и получаем приведенный в аннотации ответ, отличающийся приблизительно на порядок от полученного ранее в [4] (ответ [4] воспроизводится в обзоре [1]). По нашему мнению, в [4] допущена ошибка в вычислениях, поскольку ответ [4], в отличие от нашего и вопреки утверждению [1], не согласуется с известным первым членом $1/n$-разложения Δ_ω [1, 2, 8] (в [1] он приведен с опечаткой).

2. ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Основное утверждение [6] (его короткое доказательство на функциональном языке приводится в [9]) можно сформулировать следующим образом: стохастическая задача (1) с произвольным коррелятором $D(x, x')$ случайной силы F полностью эквивалентна евклидовой квантовой теории пары полей $\Phi \equiv \varphi, \varphi'$ с функционалом действия

$$S(\Phi) = {}^1\!/_2 \varphi' D \varphi' + \varphi' [-\partial_t \varphi + \Gamma V(\varphi)] \tag{3}$$

(нужные интегрирования по аргументам x в этой и аналогичных формулах подразумеваются). Это значит, что корреляционные функции стохастической задачи представляются, как обычно в евклидовой теории поля, функциональными средними от произведений соответствующих полей с весом $\exp S(\Phi)$. Их производящий функционал имеет вид

$$G(A) = \mathrm{const} \int D\Phi \exp[S(\Phi) + A\Phi] \tag{4}$$

с нормировкой $G(0)=1$, ($A \equiv A_\varphi$, $A_{\varphi'}$ — полный набор источников). Отметим, что сформулированное утверждение верно для произвольного (не обязательно вида (2)) коррелятора D случайной силы, имеющей гауссово распределение, и для совершенно произвольной правой части (1). Поэтому оно пригодно, например, и для гидродинамического уравнения Навье —

Стокса, правая часть которого не сводится к вариационной производной какого-либо функционала [7, 9].

Отметим также, что в критической динамике обычно рассматривается трансляционно-инвариантная по времени асимптотическая задача (1) с нулевым условием для φ при $t\to-\infty$, тогда интегрирования по времени в функционале действия (3) и в соответствующих диаграммах теории возмущений пишутся по всей оси. Если бы для уравнения (1) ставилась задача Коши с начальными данными для φ в некоторый момент $t=\tau_0$, то интегрирования по времени в (3) следовало бы производить лишь по области $t\geqslant\tau_0$, а функциональное интегрирование в (4) — по полям $\Phi(x)$, заданным на этой области, с данным краевым значением для $\varphi(x)$ при $t=\tau_0$.

Рассмотрим теперь конкретную евклидову безмассовую вещественную O_n-симметричную теорию $\varphi^4=(\varphi^2)^2$ с обычным статическим действием

$$\bar{S}(\varphi)=-\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2-\frac{g_0}{24}\varphi^4+h_0\varphi \tag{5}$$

(интегрирования по x и суммирования по индексам, как обычно, подразумеваются). Исходное действие (5) считается неренормированным; мы ввели в него взаимодействие с внешним полем h и снабдили параметры индексом «0», чтобы отличать их от ренормированных аналогов без индекса. Из (5) имеем

$$V(\varphi)=\delta\bar{S}(\varphi)/\delta\varphi=\Delta\varphi-g_0\varphi^3/6+h_0. \tag{6}$$

Мы будем рассматривать динамическую задачу (1), (2) с $\Gamma=\Gamma_0=\text{const}$ — «модель А» в терминологии [1, 2]. Действие (3) динамической задачи с коррелятором (2) имеет тогда вид

$$S(\Phi)=\Gamma_0\varphi'\varphi'+\varphi'[-\partial_t\varphi+\Gamma_0V(\varphi)],$$

где $V(\varphi)$ — функционал (6) с заменой $\varphi(\mathrm{x})\to\varphi(x)$. Удобно сделать растяжение $\varphi'\to\varphi'c_0$ с $c_0=\Gamma_0^{-1}$, что дает

$$S(\Phi)=c_0\varphi'\varphi'+\varphi'[-c_0\partial_t\varphi+V(\varphi)]. \tag{7}$$

Этому действию соответствует стандартная фейнмановская диаграммная техника с вершиной $\varphi'\varphi^3$ и затравочными пропагаторами

$$\langle\varphi\varphi'\rangle=\langle\varphi'\varphi\rangle^*=\frac{1}{-i\omega c_0+p^2}, \tag{8}$$

$$\langle\varphi\varphi\rangle=\frac{2c_0}{|i\omega c_0+p^2|^2},\qquad \langle\varphi'\varphi'\rangle=0$$

в импульсно-частотном представлении. Пропагатор $\langle\varphi\varphi'\rangle$ запаздывающий, $\langle\varphi'\varphi\rangle$ опережающий; эти свойства вместе с $\langle\varphi'\varphi'\rangle=0$ приводят к тому, что любая 1-неприводимая диаграмма с внешними линиями только поля φ (и любая вакуумная петля) обязательно содержит замкнутый цикл опережающих функций и поэтому обращается в нуль [9].

3. РАСХОДИМОСТИ И РЕНОРМИРОВКА

Мы будем рассматривать теорию в пространстве x произвольной размерности 2μ (повсюду μ будет обозначать половину размерности пространства x), обеспечив тем самым размерную регуляризацию. Анализ расходимостей связан, как хорошо известно, с анализом размерностей. В отличие от статической динамическая теория двухмасштабна, т. е. в ней можно ввести две независимые канонические размерности: импульсную (d^p) и частотную (d^ω), а по ним — суммарную $d=d^p+2d^\omega$ (в свободной теории $\omega\propto p^2$). Размерность величины A будем обозначать через d_A; по определению $d_p{}^p=-d_x{}^p=d_\omega{}^\omega=-d_t{}^\omega=1$, $d_\omega{}^p=d_t{}^p=d_p{}^\omega=d_x{}^\omega=0$, а размерности всех прочих величин в (7) находятся из требования безразмерности (импульсной и частотной отдельно) всех слагаемых. Получаемые таким путем сведения о размерностях сведены в табл. 1. В ней приведены также раз-

Таблица 1

	φ	φ'	c_0	h_0	g_0	M	c	h	g
d^p	$\mu-1$	$\mu-1$	2	$\mu+1$	$4-2\mu$	1	2	$\mu+1$	0
d^ω	0	1	-1	0	0	0	-1	0	0
d	$\mu-1$	$\mu+1$	0	$\mu+1$	$4-2\mu$	1	0	$\mu+1$	0

мерности ренормированных параметров c, g, h и «ренормировочной массы» M — дополнительного параметра ренормированной теории. Размерности M приписываются по определению, а для c, g, h находятся из формул ренормировки (см. ниже).

Из табл. 1 видно, что теория становится логарифмической (безразмерность константы связи g_0) при $2\mu=4$, т. е. в четырехмерном пространстве x. При нашей регуляризации расходимости проявляются в форме полюсов по параметру отклонения от логарифмичности $\varepsilon=2-\mu$ и устраняются стандартной процедурой ренормировки. Вид необходимых контрчленов находится из анализа размерностей 1-неприводимых функций Грина: для такой функции с $N_\Phi\equiv N_\varphi$, $N_{\varphi'}$ внешними линиями искомые размерности суть $\delta^p=2\mu-d_\Phi{}^pN_\Phi$, $\delta^\omega=1-d_\Phi{}^\omega N_\Phi$ и $\delta=2\mu+2-d_\Phi N_\Phi$, где d — соответствующие размерности полей и для краткости обозначено $d_\Phi{}^pN_\Phi\equiv\equiv d_\varphi{}^pN_\varphi+d_{\varphi'}{}^pN_{\varphi'}$ и т. п. Расходимость определяется суммарной канонической размерностью δ: диаграмма «поверхностно расходится», если в логарифмической теории δ есть целое неотрицательное число. В нашей теории при $\varepsilon=0$ по данным табл. 1 размерностей находим $\delta=6-N_\varphi-3N_{\varphi'}$. Учитывая, что сумма $N_\varphi+N_{\varphi'}$ должна быть четной (четность (7) относительно замены $\Phi\to-\Phi$ при нулевом внешнем поле h, которое не может входить в 1-неприводимые диаграммы) и что $N_{\varphi'}\neq0$ (см. замечание в конце предыдущего раздела), видим, что поверхностные расходимости имеются лишь в 1-неприводимых функциях $\langle\varphi'\varphi'\rangle$, $\langle\varphi'\varphi\rangle$ и $\langle\varphi'\varphi\varphi\varphi\rangle$, т. е. только в тех, которые присутствуют в (7).

Контрчлены добавляются, как известно, не к неренормированному действию (7), а к «промежуточному», отличающемуся от (7) заменой всех затравочных параметров их ренормированными аналогами: $c_0\to c$, $h_0\to h$, $g_0\to gM^{2\varepsilon}$ (отсюда определяются размерности c, g, h). Учитывая, что поверхностная расходимость любой 1-неприводимой диаграммы в данной теории обязательно локальна, т. е. представляется полиномом по внешним импульсам и частотам, и зная отдельно их импульсные и частотные размерности, т. е. их зависимость от p, ω, c (как уже отмечалось выше, 1-неприводимые функции и, следовательно, контрчлены от h не зависят). В итоге легко убедиться, что все нужные контрчлены воспроизводятся, как обычно, мультипликативной ренормировкой полей $\Phi\to Z_\Phi^{1/2}\Phi$ и параметров:

$$g_0=gM^{2\varepsilon}Z_g,\quad c_0=cZ_c,\quad h_0=hZ_h=hZ_{\varphi'}^{-1/2}. \tag{9}$$

Ренормированный функционал действия имеет вид

$$S_{\text{рен}}=Z_1c\varphi'\varphi'+\varphi'[-Z_2c\partial_t\varphi+Z_3\Delta\varphi-Z_4gM^{2\varepsilon}\varphi^3/6+h], \tag{10}$$

где все Z — полностью безразмерные (и поэтому зависящие только от g) константы ренормировки:

$$Z_1=Z_{\varphi'}Z_c,\quad Z_2=Z_{\varphi'}^{1/2}Z_\varphi^{1/2}Z_c,$$
$$Z_3=Z_{\varphi'}^{1/2}Z_\varphi^{1/2},\quad Z_4=Z_{\varphi'}^{1/2}Z_\varphi^{3/2}Z_g. \tag{11}$$

Ренормированные функции Грина порождаются функционалом типа (4) с заменой $S\to S_{\text{рен}}$. Слагаемое $\varphi'h$ из (10) группируется при этом с вкладом источника $\varphi'A_{\varphi'}$ и не приводит к появлению новых расходимостей, если они были устранены в теории с $h=0$, это и есть обоснование выбора $Z_h=Z_{\varphi'}^{-1/2}$ в (9).

4. СООТНОШЕНИЕ ДИНАМИКИ И СТАТИКИ

Рассмотрим одновременные корреляционные функции основного поля φ в некоторый фиксированный момент времени $t=\tau$. Их производящий функционал $g_\tau(a)$ можно получить, взяв в (4) источники вида $A_{\varphi'}=0$, $A_\varphi(x)=\delta(t-\tau)a(\mathbf{x})$. В силу трансляционной инвариантности по времени асимптотической задачи (1) с нулевым условием для φ при $t\to-\infty$ функционал $g_\tau(a)$ от τ в действительности не зависит, а для задачи Коши с нулевым условием для φ в некоторый момент $\tau_0<\tau$ аналогичный функционал $g_{\tau,\tau_0}(a)$ зависит лишь от разности $\tau-\tau_0$. Для задачи (1) с $V=\delta\bar{S}/\delta\varphi$ введем также производящий функционал статических корреляционных функций:

$$\bar{g}(a)=\text{const}\int D\varphi\exp[\bar{S}(\varphi)+a\varphi] \tag{12}$$

с нормировкой $\bar{g}(0)=1$. Сразу отметим, что интеграл (12) является решением соответствующего функционального уравнения Швингера:

$$[V(\delta/\delta a)+a]\bar{g}(a)=0,\quad V(\varphi)=\delta\bar{S}(\varphi)/\delta\varphi. \tag{13}$$

За последнее время в рамках квантовой теории поля появилось довольно много работ, посвященных «стохастическому квантованию» [10—14]. Под этим термином понимаются доказательство и использование следующего утверждения: для стохастической задачи (1), (2) с $V=\delta\bar{S}/\delta\varphi$ и $\Gamma=1$

$$\lim_{\tau\to\infty}g_{\tau,\tau_0}(a)=\bar{g}(a). \tag{14}$$

Другими словами, одновременные корреляционные функции стохастической задачи Коши независимо от выбора начальных данных для φ в пределе $\tau\to\infty$ стремятся к корреляционным функциям исходной статической задачи. Это утверждение используется для обоснования нового способа введения дополнительного условия при квантовании поля Янга — Миллса [13, 14] и для исследования асимптотики больших N в теории Янга — Миллса и $N\times N$-матричных моделях [11].

Как уже отмечалось, для задачи Коши с нулевым условием функционал $g_{\tau,\tau_0}(a)$ зависит лишь от разности $\tau-\tau_0$ и поэтому предел $\tau\to\infty$ совпадает с пределом $\tau_0\to-\infty$, соответствующим, очевидно, переходу к асимптотической задаче с нулевым условием. Из (14) тогда имеем

$$(15)\qquad g_\tau(a)=\bar{g}(a).$$

Идея согласованности динамики и статики всегда была основополагающей в критической динамике: именно стандартный выбор коррелятора в форме (2) обеспечивает это соответствие. Не будь его, критические размерности одной и той же величины, вычисленные в рамках динамики и статики, могли бы оказаться различными, что лишило бы смысла само понятие размерности. Отметим, что во многих моделях критической динамики в правую часть (1) добавляются члены «межмодовой связи», не оказывающие никакого влияния на равновесное статическое поведение [1, 2]. Насколько нам известно, подобная возможность никогда еще не обсуждалась в работах по стохастическому квантованию.

Наиболее общая формулировка утверждений типа (14), (15) состоит в следующем (короткое доказательство см. в [9]): пусть есть уравнение (1) с произвольным функционалом $V(\varphi)$, не обязательно сводящимся к чьей-то вариационной производной, и с коррелятором силы вида $\delta(t-t')d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Тогда производящий функционал одновременных корреляционных функций асимптотической задачи $g_\tau(a)$ не зависит от τ и удовлетворяет следующему уравнению в вариационных производных:

$$(16)\qquad a[\Gamma V(\delta/\delta a)+da/2]\,g_\tau(a)=0$$

(аргументы x и возможные индексы левого множителя a и квадратной скобки свернуты). Для коррелятора (2) имеем $d(x,x')=2\Gamma\delta(x-x')$, т. е. $da=2\Gamma a$ и при $V=\delta\bar{S}/\delta\varphi$ операция в квадратных скобках (16) с точностью до «общего множителя» Γ совпадает с операцией в уравнении Швингера (13), поэтому статический функционал (12) является решением уравнения (16). Считая решение с нормировкой $g(0)=1$ единственным (что безусловно верно в рамках любой теории возмущений), из (16) в рассматриваемом частном случае получаем (15). Отметим, что добавки от межмодовой связи к ΓV исчезают при сворачивании с левым множителем a в (16).

Вернемся теперь к нашей конкретной модели φ^4 и проанализируем следствия (16) с учетом ренормировки. Будем искать статическое действие, соответствующее в смысле (15) ренормированному действию (10). Чтобы записать уравнение (16), нужно сначала привести действие (10) к каноническому виду (3) с единичным коэффициентом при $\varphi'\partial_t\varphi$, что достигается растяжением $\varphi'\to\varphi'(cZ_2)^{-1}$, не влияющим на функции Грина основного поля φ. В итоге мы получим для $g_\tau(a)$ уравнение (16) с $\Gamma=(cZ_2)^{-1}$, $d=2c^{-1}Z_2^{-2}Z_1$ и

$$(17)\qquad V(\varphi)=Z_3\Delta\varphi-Z_4gM^{2\varepsilon}\varphi^3/6+h.$$

Умножив уравнение на $2d^{-1}$, чтобы сделать единицей коэффициент при a в квадратной скобке (16), получим

$$(18)\qquad a[Z_1^{-1}Z_2V(\delta/\delta a)+a]g_\tau(a)=0,$$

где V — функционал (17). С другой стороны, если бы мы начали непосредственно со статической задачи, то после выполнения в ней ренормировки со своими константами $\bar{Z}$ мы получили бы для статического функционала $\bar{g}(a)$ уравнение Швингера (13) с функционалом $V_1(\varphi)=\delta\bar{S}_{\text{рен}}/\delta\varphi$, отличающимся от (17) лишь заменой $Z_{3,4}\to\bar{Z}_{3,4}$. Отсюда ясно, что решение (18) представляется интегралом типа (12) с некоторым функционалом $\bar{S}'(\varphi)$, отличающимся от $\bar{S}_{\text{рен}}(\varphi)$ только константами ренормировки: $\delta\bar{S}'(\varphi)/\delta\varphi=Z_1^{-1}Z_2V(\varphi)$, где $V(\varphi)$ — функционал (17).

Переход к совпадающим временам в ренормированной теории (10) не приводит (в отличие от совпадения полных аргументов x) к появлению новых ультрафиолетовых расходимостей, поэтому оба функционала $\bar{g}(a)$, $g_\tau(a)$ конечны, следовательно, связаны между собой конечной ренормировкой. Тем самым доказано, что отношения констант $Z_1^{-1}Z_2$, $Z_3^{-1}\bar{Z}_3$, $Z_4^{-1}\bar{Z}_4$ конечны в пределе $\varepsilon\to0$.

В общем случае большего утверждать нельзя, но если и в динамике, и в статике используется схема минимальных вычитаний [15], в которой все константы Z содержат только полюса по ε, то любое конечное произведение или отношение констант Z есть единица.

Считая в дальнейшем принятой схему минимальных вычитаний, будем записывать доказанное выше утверждение в виде

$$(19)\qquad Z_1=Z_2,\quad Z_3=\bar{Z}_3,\quad Z_4=\bar{Z}_4,$$

что при учете (11) и обычной связи $\bar{Z}_3=\bar{Z}_\varphi=\bar{Z}_h^{-2}$, $\bar{Z}_4=\bar{Z}_\varphi^2\bar{Z}_g$ статических констант эквивалентно соотношениям

$$(20)\qquad Z_\varphi=Z_{\varphi'}=\bar{Z}_\varphi=\bar{Z}_h^{-2}=Z_h^{-2},\quad Z_g=\bar{Z}_g,\quad Z_c=Z_1Z_\varphi^{-1}=Z_2Z_\varphi^{-1}.$$

Единственной новой по сравнению со статикой константой ренормировки динамической теории является Z_c, которую можно вычислять либо по логарифмическим расходимостям 1-неприводимой функции $\langle\varphi'\varphi'\rangle$ (т. е. через Z_1), либо по расходимостям коэффициента при $-i\omega c$ в 1-неприводимой функции $\langle\varphi'\varphi\rangle$ (т. е. через Z_2). В заключение отметим, что упрощающее предположение относительно минимальной схемы вычитаний для дальнейшего несущественно: конечные в пределе $\varepsilon\to0$ константы, которые в общем случае войдут множителями в соотношения (19), не отражаются на критических размерностях.

5. КРИТИЧЕСКИЕ РАЗМЕРНОСТИ

Из связи $S_{\text{рен}}(\Phi, e)=S(Z_\Phi^{1/2}\Phi, e_0)$ ренормированного и неренормированного функционалов действия ($e_0=c_0$, g_0, h_0 и $e=M$, c, g, h — полные наборы соответственно затравочных и ренормированных параметров) вытекает связь $G_{\text{рен}}(A, e)=G(Z_\Phi^{-1/2} A, e_0)$ соответствующих производящих функционалов (4) и такая же связь для их логарифмов $W=\ln G$, являющихся производящими функционалами связных корреляционных функций. Функционал $W_{\text{рен}}(Z_\Phi^{1/2} A, e)=W(A, e_0)$ не зависит от ренормировочной массы M при фиксированных e_0, и это свойство выражается известным уравнением Гелл-Мана — Лоу:

$$(21)\qquad \left[\sum_i \tilde{\mathcal{D}}_M e_i \frac{\partial}{\partial e_i} + \gamma_\Phi \mathcal{D}_\Phi\right] W_{\text{рен}}(A, e)=0,$$

где $\tilde{\mathcal{D}}_M$ здесь и далее обозначает операцию $M\partial_M$ при фиксированных параметрах e_0 и

$$(22)\qquad \gamma_\Phi=\tilde{\mathcal{D}}_M \ln Z_\Phi^{1/2}, \qquad \mathcal{D}_\Phi=\int dx\, A(x)\,\delta/\delta A(x).$$

Для многокомпонентного поля (у нас $\Phi=\varphi, \varphi'$) в выражениях типа $\mathcal{D}_\Phi$ здесь и далее подразумевается суммирование по всем компонентам. Импульсная и частотная безразмерность действия (10) выражается уравнениями

$$(23)\qquad \left[\sum_i d_i^p \mathcal{D}_i - \mathcal{D}_x - d_\Phi^p \mathcal{D}_\Phi\right] W_{\text{рен}}(A, e)=0,$$

$$(24)\qquad \left[\sum_i d_i^\omega \mathcal{D}_i - \mathcal{D}_t - d_\Phi^\omega \mathcal{D}_\Phi\right] W_{\text{рен}}(A, e)=0.$$

Здесь и далее $\mathcal{D}_i\equiv e_i\partial_{e_i}$ (у нас $e\equiv M, c, g, h$), d — соответствующие канонические размерности параметров и полей и

$$\mathcal{D}_x=\int dx\, A(x)\, x\partial_x \delta/\delta A(x), \qquad \mathcal{D}_t=\int dx\, A(x)\, t\partial_t \delta/\delta A(x).$$

Коэффициенты в уравнении (21) выражаются через константы ренормировки. Пользуясь соотношениями (9) и обозначая $\gamma_i\equiv\tilde{\mathcal{D}}_M \ln Z_i$ для $i=c, g, h$ (отметим отличие от (22)) и $\beta\equiv\tilde{\mathcal{D}}_M g=g[-2\varepsilon-\gamma_g]$, можно переписать уравнение (21) в обычной форме:

$$(25)\qquad [\mathcal{D}_M+\beta\partial_g-\gamma_c\mathcal{D}_c-\gamma_h\mathcal{D}_h+\gamma_\Phi\mathcal{D}_\Phi]\, W_{\text{рен}}(A, e)=0.$$

Из соотношений (20) вытекают следующие связи между динамическими и статическими РГ-функциями:

$$(26)\qquad \beta=\bar{\beta}, \quad \gamma_\varphi=\gamma_{\varphi'}=\bar{\gamma}_\varphi=-\bar{\gamma}_h=-\gamma_h.$$

Единственной новой РГ-функцией является $\gamma_c=\tilde{\mathcal{D}}_M \ln Z_c$.

Масштабные уравнения (23), (24) вместе с уравнением Гелл-Мана — Лоу (25) содержат всю информацию о критическом поведении. Из статики хорошо известно, что для пространства x размерности $4-2\varepsilon$ в теории имеется инфракрасно-устойчивая фиксированная точка $\beta(g_*)=0$ с $g_*\sim\varepsilon$. В этой точке из (25) выпадает член с ∂_g и после исключения из системы (23)—(25) членов с $\mathcal{D}_M$ и $\mathcal{D}_c$ получается уравнение

$$(27)\qquad [-\mathcal{D}_x+\Delta_t\mathcal{D}_t+\Delta_h\mathcal{D}_h-\Delta_\Phi\mathcal{D}_\Phi]\, W_{\text{рен}}(A, e)=0$$

с коэффициентами

(28) $\Delta_t = -\Delta_\omega = (d_c^p + \gamma_c)/d_c^\omega, \quad \Delta_i = d_i^p + \gamma_i + \Delta_\omega d_i^\omega, \quad i = h, \varphi, \varphi'.$

Уравнение (27) выражает свойство «критического скейлинга» относительно одновременного согласованного растяжения x, t, h, Φ при произвольных фиксированных M и c, а коэффициенты (28) имеют смысл критических размерностей соответствующих величин с нормировкой $\Delta_p = -\Delta_x = 1$. Отметим, что аналогичный РГ-подход к уравнению Навье — Стокса со случайной силой приводит к уравнению типа (27) с критическими размерностями, точно воспроизводящими известный «колмогоровский скейлинг» в теории развитой турбулентности [7, 9].

Нетрудно убедиться, что для сохраняющихся в статике величин φ и h получаемые из (28) критические размерности совпадают с их статическими аналогами. В статике мы имели бы только два уравнения (23), (25) без членов с $\mathscr{D}_c$ и $\mathscr{D}_{\varphi'}$ и после исключения в фиксированной точке $\mathscr{D}_M$ получали бы уравнение типа (27) с размерностями $\bar\Delta = \bar d + \bar\gamma$. Из (1) и (2) легко увидеть, что для любой сохраняющейся в статике величины $d^p = \bar d$ и $d^\omega = 0$; кроме того, из сказанного в предыдущем разделе относительно ренормировки следует $\gamma = \bar\gamma$, поэтому $\Delta = \bar\Delta$.

Существенно новым динамическим индексом является определенная в (28) критическая размерность частоты $\Delta_\omega = -\Delta_t$ (индекс z в обозначениях [1, 2]). Пользуясь данными табл. 1, находим $\Delta_\omega = 2 + \gamma_c$, где $\gamma_c = = \widetilde{\mathscr{D}}_M \ln Z_c$. Расчет Δ_ω с точностью до ε^3 обсуждается в следующем разделе.

Мы все время рассматривали «модель А» [1, 2] с $\Gamma = \mathrm{const}$ в (1), (2) (напомним, что $c = \Gamma^{-1}$). Другая, «модель В», с $\Gamma = \mathrm{const} \cdot p^2$ проще, хотя на первый взгляд кажется обратное. В этом случае в (10) происходит замена $c \to c/p^2$, соответствующие члены действия становятся нелокальными и не требуют контрчленов при ренормировке (при локальном взаимодействии нелокальных расходимостей не бывает). Другими словами, в «модели В» $Z_1 = Z_2 = 1$, т. е. $Z_c = Z_\varphi^{-1}$ (см. (20)) и $\gamma_c = -2\gamma_\varphi = -\eta$. Для нового параметра c в «модели В» $d_c^p = 4$ и $d_c^\omega = -1$, поэтому из (28) имеем $\Delta_\omega = 4 + \gamma_c = 4 - \eta$ — хорошо известный результат [1—3].

6. РАСЧЕТ Δ_ω С ТОЧНОСТЬЮ ДО ε^3

Динамический индекс $\Delta_\omega = 2 + \gamma_c$ в низшем порядке ε^2 для γ_c был вычислен в [8], а в следующем — в [4]. Результат обычно представляют в виде $\Delta_\omega = 2 + R\eta$, где $\eta = 2\gamma_\varphi$ — известный из статики индекс Фишера, и приводят ответ для коэффициента R, который в двух первых порядках оказывается не зависящим от числа компонент n поля φ. В низшем порядке $R = 6 \ln (4/3) - 1 = 0{,}726$, а в следующем согласно [4] (результат [4] воспроизведен в обзоре [1])

(29) $R = 0{,}726(1 - 2\varepsilon \cdot 1{,}687).$

Мы получили другой ответ:

(30) $R = 0{,}726(1 - 2\varepsilon \cdot 0{,}1885).$

С точки зрения физики наш ответ более «оптимистичен», т. к. в (29) при реальном $2\varepsilon=1$ вклад второго члена перевешивает вклад первого и меняет знак всего выражения, тогда как в (30) второй член оказывается действительно поправкой.

Остановимся кратко на технике вычисления Δ_ω. Из (20) имеем $\gamma_c = \widetilde{\mathscr{D}}_M \ln Z_c = \gamma_1 - \eta$, где $\gamma_1 \equiv \widetilde{\mathscr{D}}_M \ln Z_1 = \beta\partial_g \ln Z_1$. Поскольку $\beta=\bar{\beta}$ известна, вся задача сводится к вычислению константы $Z_1=Z_2$ (см. (19)). Константу ренормировки Z_Γ данной 1-неприводимой функции Γ удобно находить по формуле [16]: $Z_\Gamma = 1 - \mathscr{K}\mathscr{R}'\bar{\Gamma}$, где $\bar{\Gamma}$ — нормированная на единицу в низшем порядке функция Γ, $\mathscr{K}$ — используемая операция вычитания (в схеме минимальных вычитаний $\mathscr{K}$ отбирает только полюса по ε), $\mathscr{R}'$ — неполная $\mathscr{R}$-операция, содержащая вычитания на все расходящиеся подграфы без последнего вычитания на граф как целое. Константа Z_1 определяется по 1-неприводимой функции $\langle\varphi'\varphi'\rangle$, константы Z_2 и Z_3 — по расходящимся коэффициентам при $-i\omega c$ и p^2, соответственно, в 1-неприводимой функции $\langle\varphi'\varphi\rangle$, константа Z_4 — по вершине $\langle\varphi'\varphi\varphi\varphi\rangle$. Согласно соотношениям (19) для расчета γ_c достаточно вычислить лишь одну из констант Z_1 или Z_2, но для контроля выкладок мы вычислили с нужной степенью точности все $Z_1 - Z_4$. Соотношения (19), конечно, подтвердились, но нетривиально: вклады в Z_3 отдельных динамических диаграмм порядка g^3 выглядят весьма сложно (см. приложение), и лишь после суммирования всех вкладов одного порядка получается очень простой статический вклад в $\bar{Z}_3$.

При расчете вкладов $\mathscr{K}\mathscr{R}'\ldots$ отдельных диаграмм в пространстве $\mathbf{x}$ произвольной размерности 2μ вычисления можно производить в координатном представлении и лишь на последнем шаге переходить к импульсно-частотному. Формулу преобразования Фурье для пространства произвольной размерности 2μ пишем в виде

$$F(x) = (2\pi)^{-2\mu-1} \int d\omega \int d\mathbf{p}\, \tilde{F}(\omega, \mathbf{p}) \exp[-i\omega t + i\mathbf{p}\mathbf{x}].$$

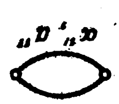
Удобно пользоваться следующим графическим обозначением:

$$\overset{x'}{\bullet}\underset{\alpha,\, a}{\overline{\qquad}}\overset{x''}{\bullet} \sim D_{\alpha,\, a}(x) \equiv (4\pi)^{-\mu}\theta\,(t\varepsilon\,(a))\, t^{-\alpha} \exp\,(-\, a\mathbf{x}^2/4t),$$

где $x \equiv x' - x''$, параметр a и $t \equiv t' - t''$ могут иметь любой знак, θ и ε — обычные тэта- (1, 0) и знаковая (1, −1) функции. Данной линии соответствует преобразование Фурье

$$\tilde{D}_{\alpha,a}(\omega, \mathbf{p}) = \frac{\varepsilon\,(a)\,\Gamma(\mu+1-\alpha)}{a^{\alpha-1}[-i\omega a + p^2]^{\mu+1-\alpha}},$$

где Γ — гамма-функция. Для петли имеем

 $$= (4\pi)^{-\mu}\theta\,(a'a'')\; \bullet\underset{\alpha'+\alpha'',\; a'+a''}{\overline{\qquad\qquad}}\bullet\,,$$

а свертка двух таких линий (цепочка) может быть представлена однократным интегралом по параметру:

$$\bullet\underset{\alpha',\, a'}{\overline{\qquad}}\bullet\underset{\alpha'',\, a''}{\overline{\qquad}}\bullet = \varepsilon\,(a'a'')\,(a')^{1-\alpha'}\,(a'')^{1-\alpha''} \times$$

$$\boxtimes \int_0^1 du \frac{\varepsilon(Q)\, u^{\mu-\alpha'}(1-u)^{\mu-\alpha''}}{Q^{\mu+2-\alpha'-\alpha''}} \underset{\alpha'+\alpha''-\mu-1,\ Q}{\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet},$$

где для краткости обозначено $Q \equiv ua' + (1-u)a''$. Отличные от нуля пропагаторы полей φ, φ' в таких обозначениях принимают вид

$$\overset{\varphi}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{\varphi'}{\bullet} = c^{\mu-1} \underset{\mu,\ c}{\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet},$$

$$\overset{\varphi'}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{\varphi}{\bullet} = (-1)^{\mu} c^{\mu-1} \underset{\mu,\ -c}{\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet},$$

$$\overset{\varphi}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{\varphi}{\bullet} = \int_{-c}^{c} ds\varepsilon(s)\, s^{\mu-2} \underset{\mu-1,\ s}{\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet}.$$

Зависимость от c всегда легко выделяется и вычисления можно производить с $c=1$. Все интересующие нас графики сводятся к цепочкам и петлям, поэтому приведенных выше формул достаточно для сведения их к конечнократным интегралам по параметрам u и s. Интегралы сводятся затем к однократным и в конечном счете выражаются через π, $\ln 2$, $\ln 3$ и $F(^1/_4)$, где $F(z)$ – дилогарифм (интеграл Спенса) [17].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вклады графиков в константы Z

В табл. 2 приводятся данные о вкладах отдельных графиков в различные константы ренормировки Z, вычисляемые по формуле $Z=1-\mathcal{KR}'\widetilde{\Gamma}$. При изображении графиков на концах каждой линии следовало бы ставить индексы φ, φ' для указания типа пропагатора. Чтобы не загромождать рисунки, мы обозначаем концы φ' перечеркиванием линии, а концы φ оставляем неперечеркнутыми. В каждой вершине сходятся одно поле φ' и три поля φ, т. е. одна линия с перечеркнутым концом и три неперечеркнутых. Для получения вклада графика в Z нужно умножить значение его $\mathcal{KR}'\ldots$ на коэффициент (в коэффициент включены также константа связи g и структурные множители k_i группы O_n), в последнем столбце табл. 2 указано, в какую именно константу Z мы получаем вклад. В табл. 2 всюду $2\varepsilon=4-2\mu$ – отклонение размерности пространства x от 4 и $b\equiv\ln(4/3)$, $u\equiv q/16\pi^2$, $k_1=(n+2)/3$, $k_2=(n+8)/9$, $k_3=k_1k_2=(n^2+10n+16)/27$.

В статике величины $\mathcal{KR}'\ldots$ для таких сравнительно простых диаграмм содержат лишь рациональные числа [18], а в динамике они гораздо сложнее: обозначенные через $I_1 \div I_7$ в табл. 2 величины имеют вид

$$I = \frac{1}{2}\left[c_1 F\left(\frac{1}{4}\right) + c_2 \ln 2 + c_3 \ln 3 + c_4 \frac{\pi^2}{12} + c_5 \ln^2 2 + c_6 \ln^2 3 + \right.$$
$$\left. + c_7 \ln 2 \cdot \ln 3 + c_8\right],$$

где $F(z)$ – дилогарифм (интеграл Спенса) [17]:

$$F(z) = \int_1^z dt \frac{\ln t}{1-t}, \qquad F\left(\frac{1}{4}\right) = 0{,}978469.$$

Значения числовых коэффициентов c_i для всех I даны в табл. 3.

Отметим, что при вычислениях появляются дилогарифмы от разных аргументов, но с помощью различных рекуррентных соотношений [17] можно выразить через $F(1/4)$, $\ln 2$, $\ln 3$ и π значения $\mathrm{Re}F(z)$ для довольно большого набора значений аргумента z, а именно для $z=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, -1/2, 1/2, 3/2, -1/3, 1/3, 2/3, 4/3, 1/4$ и $3/4$.

Таблица 2

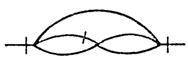
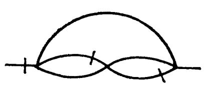
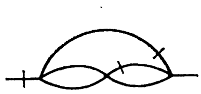
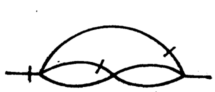
№	Граф	$\mathcal{KR}'$-граф	Коэффициент в Z	Z
1		$-\frac{3b}{2\varepsilon}$	$\frac{1}{6}u^2k_1$	Z_1
2		$-\frac{b}{2\varepsilon}$ $-\frac{1}{12\varepsilon}$	$\frac{1}{2}u^2k_1$	Z_2 Z_3
3		$\frac{1}{2\varepsilon}$	$3uk_2$	Z_4
4		$\frac{3b+\varepsilon I_1}{12\varepsilon^2}$	$-u^3k_3$	Z_1
5		$\frac{b+\varepsilon I_2}{6\varepsilon^2}$ $\frac{1+\varepsilon I_3}{36\varepsilon^2}$	$-u^3k_3$	Z_2 Z_3
6		$\frac{b+\varepsilon I_4}{12\varepsilon^2}$ $\frac{1+\varepsilon I_5}{72\varepsilon^2}$	$-\frac{1}{2}u^3k_3$	Z_2 Z_3
7		$\frac{b+\varepsilon I_6}{12\varepsilon^2}$ $\frac{1+\varepsilon I_7}{72\,\varepsilon^2}$	$-\frac{1}{2}u^3k_3$	Z_2 Z_3

Таблица 3

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	7	c_8
I_1	—8	—12	6	12	52	21	—68	0
I_2	—2	—12	6	4	44	13	—48	0
I_3	0	—20	10	0	96	24	—96	1
I_4	30	—68	42	—40	96	—11	—36	0
I_5	144	—504	316	—192	480	—48	—192	—5
I_6	—38	92	—54	48	—168	1	92	0
I_7	—144	584	—356	192	—864	—48	576	—5

По данным табл. 2 находим

$$Z_1 = 1 - \frac{bu^2k_1}{4\varepsilon} - \frac{(3b+\varepsilon I_1)\,u^3k_3}{12\varepsilon^2},$$

$$Z_2 = 1 - \frac{bu^2k_1}{4\varepsilon} - \frac{u^3k_3}{24\varepsilon^2}\,[6b+\varepsilon(4I_2+I_4+I_6)];$$

$$Z_3 = 1 - \frac{u^2k_1}{24\varepsilon} - \frac{u^3k_3}{144\varepsilon^2}\,[6+\varepsilon(4I_3+I_5+I_7)];$$

$$Z_4 = 1 + \frac{3uk_2}{2\varepsilon}.$$

Можно непосредственно убедиться в справедливости соотношений (19): константа Z_4 совпадает со статической [18], аналогичное совпадение для Z_3 является следствием соотношения $4I_3+I_5+I_7=-3$, а равенство $Z_1=Z_2$ – следствием соотношения $4I_2+I_4+I_6=2I_1$. Оба эти соотношения легко проверяются по данным табл. 3.

Коэффициент R в выражении $\Delta_\omega=2+R\eta$ для динамического индекса с точностью до ε включительно представляется следующим образом: $R=6b-1+2\varepsilon(I_1+3b/2)$. Вычислив R по данным табл. 3, получаем ответ (30).

Литература

[1] *Hohenberg P. C., Halperin B. I.*– Rev. Mod. Phys., 1977, *49*, № 3, 435–479.
[2] *Ма Ш.* Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980.
[3] *Паташинский А. З., Покровский В. Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982.
[4] *De Dominicis C., Brezin E., Zinn-Justin J.*– Phys. Rev., 1975, *B12*, № 11, 4945–4953.
[5] *De Dominicis C.*– Nuovo Cim. Lett., 1975, *12*, № 15, 567–574.
[6] *Martin P. C., Siggia E. D., Rose H. A.*– Phys. Rev., 1973, *A8*, № 1, 423–437. *De Dominicis C., Peliti L.*– Phys. Rev., 1978, *B18*, № 1, 353–376.
[7] *De Dominicis C., Martin P. C.*– Phys. Rev., 1979, *A19*, № 1, 419–422.
[8] *Halperin B. I., Hohenberg P. C., Ma S.*– Phys. Rev. Lett., 1972, *29*, № 23, 1548–1551.
[9] *Аджемян Л. Ц., Васильев А. Н., Письмак Ю. М.*– ТМФ, 1983, *57*, № 2, 268–282.
[10] *Parisi G., Wu Y. S.*– Scientia Sinica, 1981, *24*, № 2, 483–488.
[11] *Alfaro J., Sakita B.* Derivation of quenched momentum prescription by means of stochastic quantisation. Preprint CUNY-HEP-82/8, New-York: CUNY, 1982.
[12] *Floratos E., Iliopoulos J.* Equivalence of stochastic and canonical quantisation in perturbation theory. Preprint LPTENS 82/31, Paris: LPTENS, 1982.
[13] *Zwanziger D.*– Nucl. Phys., 1981, *B192*, № 1, 259–269.
[14] *Baulieu L., Zwanziger D.*– Nucl. Phys., 1981, *B193*, № 1, 163–172.
[15] *t'Hooft G.*– Nucl. Phys., 1973, *B61*, № 2, 455–460.
[16] *Владимиров А. А.*– ТМФ, 1980, *43*, № 2, 210–217.
[17] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
[18] *Казаков Д. И., Тарасов О. В., Владимиров А. А.*– ЖЭТФ, 1979, *77*, вып. 3(9), 1035–1045.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 20.VII.1983 г.

CRITICAL DYNAMICS AS A FIELD THEORY

Antonov N. V., Vassiliev A. N.

Critical dynamics [1–3] is systematically considered from the quantum field theory viewpoints. The relation between dynamics and statics as well as its implications for renormalization constants are given in detail. The main technical result is the calculation of the ε^3-contribution into the $(4-2\varepsilon)$-expansion of the dynamical index Δ_ω (critical dimension of frequency) for φ^4 model with the O_n – symmetry: instead of the value $\Delta_\omega=2+0{,}726(1-2\varepsilon\cdot 1{,}687)\eta$ which was obtained in [4] we have obtained $\Delta_\omega=2+0{,}726(1-0{,}1885\,2\varepsilon)\eta$.