В. Е. Захаров, С. В. Манаков, Об обобщении метода обратной задачи рассеяния, *ТМФ*, 1976, том 27, номер 3, 283–287

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 27, № 3
июнь, 1976

# ОБ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

**В. Е. Захаров, С. В. Манаков**

Показано, что с каждым одномерным дифференциальным оператором, коэффициентные функции которого зависят от произвольной совокупности параметров, связана серия интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния многомерных нелинейных уравнений в частных производных.

Метод обратной задачи рассеяния был открыт в 1967 г. Крускалом, Гарднером, Грином и Миурой [1], проинтегрировавшими известное уравнение Кортевега — де Фриза при помощи преобразования от потенциала одномерного стационарного оператора Шредингера к его матрице рассеяния. Впоследствии в работе [2] аналогичным образом при помощи одномерного оператора Дирака было проинтегрировано нелинейное уравнение Шредингера. В последующих работах было показано [3—6], что с этими операторами связаны бесконечные классы интегрируемых уравнений, вычисляемых алгоритмическим образом. В работе [7] была предложена процедура вычисления этих уравнений вместе с описанием способа их решения для произвольных матричных операторов любого порядка.

В недавних работах (см. [8]) Калоджеро предложил некоторое обобщение метода обратной задачи рассеяния, он показал, что при помощи операторов Шредингера и Дирака и их матричных аналогов можно интегрировать новые классы нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих функции от произвольного числа аргументов. В настоящей статье мы обобщим результат Калоджеро на случай произвольных матричных операторов любого порядка, а также дадим более простое доказательство этого результата. Наш подход в существенной мере опирается на работу [7].

Пусть даны произвольный интегральный оператор $F$ и вольтерровский справа оператор $K$, действующие на вектор-функции $\psi_n(x)$, $-\infty<x<\infty$, $1\leqslant n\leqslant N$, причем ядра операторов $F(x, y)$ и $K(x, y)$ связаны соотношением

$$(1)\qquad F(x,y)+K(x,y)+\int\limits_x^\infty K(x,s)F(s,y)\,ds=0,$$

а сами операторы — соотношением

$$(2)\qquad F+K+K\cdot F=0.$$

Функции $\psi(x)$ и операторы $K$ и $F$ зависят еще от векторного параметра $z=(z_1, \ldots, z_l)$.

Пусть задан определенный на $\psi(x, z)$ дифференциальный по $x$ и $z$ оператор $M$, коммутирующий с некоторым оператором $F$: $MF-FM=0$. Тогда (см. [7]) найдется дифференциальный по $x$ и $z$ оператор $\widetilde{M}$, такой, что для $K$, связанного с $F$ условием (2), справедливо соотношение

$$\widetilde{M}K-KM=0.$$

Здесь $\widetilde{M}=M+Q$, где $Q$ — оператор, подчиненный $M$; коэффициенты оператора $Q$ вычисляются из условий исчезновения внеинтегральных членов в соотношении

$$\widetilde{M}\left(\psi(x,z)+\int_x^\infty K(x,s)\psi(s,z)\,ds\right)= \tag{3}$$

$$=(\widetilde{M}\psi)(x,z)+\int_x^\infty K(x,s)\,(M\psi)(s,z)\,ds,$$

и выражаются при помощи рекуррентных формул через конечное число производных по $x$ и $z$ от ядра $K(x, y, z)$, взятых при $y=x$, набор которых мы обозначим через $\xi(x, z)$. Уравнение (1) является при этом уравнением Гельфанда — Левитана, решающим обратную задачу рассеяния для оператора $\widetilde{M}$.

Пусть, далее, существуют такие два оператора $M_1$ и $M_2$, что уравнения относительно $F$

$$[M_1, F]=0, \quad [M_2, F]=0 \tag{4}$$

имеют совместное решение. Тогда совместны и уравнения

$$\widetilde{M}_1K-KM_1=0, \quad \widetilde{M}_2K-KM_2=0. \tag{5}$$

Условие их совместности представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений на набор величин $\xi(x, z)$ — объединение наборов $\xi_1(x, z)$ и $\xi_2(x, z)$, связанных с операторами $M_1$ и $M_2$. Эта система и является искомой интегрируемой системой. Каждое решение $F$ системы (4) после нахождения из уравнения (1) $K$ и вычисления $\xi(x, z)$ порождает точное решение этой системы.

Проблема перечисления систем, интегрируемых при помощи уравнения (1), сводится, таким образом, к проблеме перечисления пар операторов $M_1$ и $M_2$, для которых уравнения (4) имеют совместные решения. В работе [7] рассмотрен класс таких пар операторов, определенных на функциях $\psi_n(x, z_1, z_2)$ $(z=(z_1, z_2))$ и имеющих вид

$$M_1=\frac{\partial}{\partial z_1}+L_1, \qquad M_2=\frac{\partial}{\partial z_2}+L_2,$$

где $L_{1,2}=L_{1,2}(x, z, \partial/\partial x)$ — матричные операторы, дифференциальные по $x$ и удовлетворяющие условию

$$[M_1, M_2]=0. \tag{6}$$

Соответствующие операторы $\widetilde{M}_1$ и $\widetilde{M}_2$ имеют вид

$$\widetilde{M}_1=\frac{\partial}{\partial z_1}+\widetilde{L}_1, \qquad \widetilde{M}_2=\frac{\partial}{\partial z_2}+\widetilde{L}_2,$$

где $\widetilde{L}_1$ и $\widetilde{L}_2$ — также операторы, дифференциальные по $x$, зависящие от величин

$$\xi_i(x,z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)^i K(x,y)\Big|_{x=y}, \qquad i=1,2,\ldots,p-1,$$

где $p$ — наибольший из порядков операторов $L_1$, $L_2$. Операторы $\widetilde{M}_1$, $\widetilde{M}_2$ также подчиняются условию (6), которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial\widetilde{L}_2}{\partial z_1}-\frac{\partial\widetilde{L}_1}{\partial z_2}+[\widetilde{L}_1,\widetilde{L}_2]=0,$$

представляющем собой обобщение известного соотношения Лакса [3]. К этому классу относится большинство открытых ранее систем, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния.

Системы, описанные Калоджеро, соответствуют другому выбору пары $M_1$, $M_2$. Пусть

$$M_1=L=L\left(x,z,\frac{\partial}{\partial x}\right), \qquad (z=(z_1,\ldots,z_l)) \tag{7}$$

— произвольный матричный оператор, дифференциальный по $x$,

$$M_2=\sum_i f_i(z,L)\frac{\partial}{\partial z_i}, \qquad i=1,\ldots,l, \tag{8}$$

где $f_i(z, L)$ — многочлен по $L$ с коэффициентами — вектор-функциями от $z$. Покажем, что операторы (7), (8) могут быть выбраны в качестве пары (4). Условие $[L, F]=0$ означает, что ядро $F(x, y)$ подчиняется дифференциальному уравнению

$$L\left(x,z,\frac{\partial}{\partial x}\right)F(x,y)-L^+\left(y,z,\frac{\partial}{\partial y}\right)F(x,y)=0, \tag{9}$$

где $L^+$ — оператор, сопряженный к $L$; матрицы в $L^+$ умножаются на $F$ справа.

Очевидно, из условия $[LF]=0$ следует $[f_i(z, L), F]=0$. Поэтому условие $[M_2, F]=0$ сводится к условию

$$\sum_i f_i(z,L)\frac{\partial F}{\partial z_i}=0,$$

т. е. к дифференциальному уравнению

$$\sum_i f_i\left(z,L\left(x,z,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial F(x,y)}{\partial z_i}=0 \tag{10}$$

Функция $F$, удовлетворяющая условиям (9), (10), коммутирует с $M_1$ и $M_2$. Для вычисления системы, интегрируемой при помощи операторов $M_1$ и $M_2$, необходимо найти операторы $\widetilde{M}_1$, $\widetilde{M}_2$. Это можно сделать, используя соотношение (3). Легко проверить, что $\widetilde{M}_1=\widetilde{L}=L+Q_1$, $\widetilde{M}_2=M_2+Q_2$, где $Q_1$ и $Q_2$ — операторы, содержащие дифференцирование только по $x$. Коэффициенты $Q_1$ и $Q_2$ вычисляются при помощи рекуррентных формул. После построения $\tilde{L}$, $\tilde{M}_2$ искомая интегрируемая система может быть найдена из соотношения

(11) $$[\tilde{L}, \tilde{M}_2]=0.$$

Можно комбинировать оба рассмотренных класса систем, выбирая $M_1$ в виде (7), $M_2$ в виде

(12) $$M_2=\sum_i f_i(z,L)\frac{\partial}{\partial z_i}+L_2\left(x,z,\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

где $[L, L_2]=0$; в частности, можно положить $L_2=g(z, L)$. Если в операторе (12) явно выделяется производная по одному из параметров $t=t(z)$,

$$M_2=\partial/\partial t+M,$$

то соотношение (11) можно написать в виде соотношения Лакса [3]

$$\partial\tilde{L}/\partial t=[\tilde{L}, \tilde{M}],$$

которое, однако, означает сохранение спектра оператора $\tilde{L}$, только если этот спектр при $t=0$ не зависит от $z$.

В качестве примера положим

$$L=i\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_N \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x},\quad M_2=\frac{\partial}{\partial t}+L\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}L.$$

Из (9) и (1) при этом следует, что $(A=\operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_N))$

(13) $$iA\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}A+i[A,K(x,x)]K(x,y)=0;$$

второе же из уравнений (7) в этом примере имеет вид

(14) $$\frac{\partial K(x,y)}{\partial t}+iA\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial z\,\partial x}-i\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial z\,\partial y}A+i[A,K(x,x)]K_z(x,y)+ \\ +i(AK_z(x,x)+K_z(x,x)A)K(x,y)=0.$$

Соотношения (13), (14) означают, что матрица $u(x, t, z)=K(x, x)$ удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial t}+i\frac{a_i^2+a_j^2}{a_i-a_j}\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x\,\partial z}+2i(a_i+a_j)\frac{\partial u_{ij}}{\partial z}u_{jj}+2ia_i(u_{ii}+u_{jj})_z u_{ij}+ \\ +i\sum_{k\neq j}2a_i\frac{a_i-a_k}{a_i-a_j}u_{ik}\frac{\partial u_{kj}}{\partial z}+i\sum_{k\neq i,j}2\frac{a_i^2-a_ja_k}{a_i-a_j}\frac{\partial u_{ik}}{\partial z}u_{kj}=0$$

при $i\neq j$. Для диагональных элементов $u$ непосредственно из (13) имеем

$$a_i\frac{\partial u_{ii}}{\partial x}=-\sum_k (a_i-a_k)u_{ik}u_{ki}.$$

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29 января 1976 г.

## Литература

[1] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura. Phys. Rev. Lett., **19**, 1095, 1967.
[2] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. ЖЭТФ, **61**, 118, 1971.
[3] P. D. Lax. Commun. Pure Appl. Math., **21**, 467, 1968.
[4] C. S. Gardner. J. Math. Phys., **12**, 1548, 1971.
[5] В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев. Функц. анализ, **5**, вып. 4, 1971.
[6] В. Е. Захаров, С. В. Манаков. ТМФ, **19**, 332, 1974.
[7] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. Функц. анализ, **8**, вып. 3, 52, 1974.
[8] F. Colodgero. Preprint, 1975.

## ON GENERALIZATION OF THE INVERSE SCATTERING PROBLEM METHOD

**V. E. Zakharov, S. V. Manakov**

It is shown that each one-dimensional differential operator with coefficient functions depending on an arbitrary set of parameters can be related to the set of many-dimensional nonlinear partial differential equations which can be integrated by means of the inverse scattering problem method.